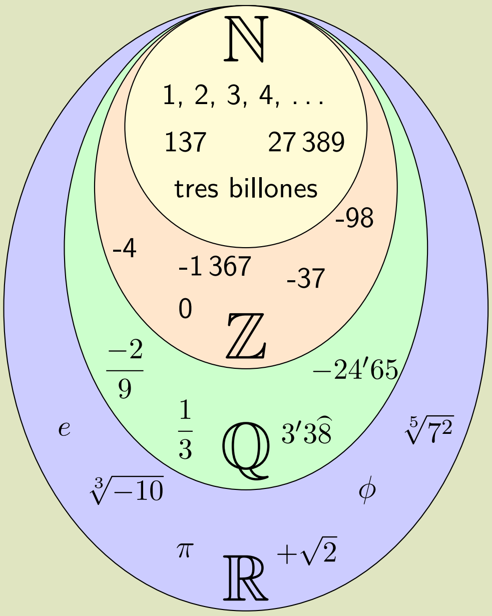
MATEMÁTICAS

1

Índice

NÚMEROS NATURALES



En el colegio hemos aprendido a utilizar distintos números. En el instituto iremos ampliando esos conocimientos, trabajando con ellos en más profundidad ¡y también conociendo números nuevos!

En los dos primeros temas trabajaremos con **números naturales** ($\mathbb{N}$), es decir, con los números de toda la vida, los que nos valen para contar.

Después aprenderemos a operar con números negativos, y así ya podremos trabajar con **números enteros** ($\mathbb{Z}$).

También introduciremos los **números racionales** ($\mathbb{Q}$), tanto en forma fraccional como en forma decimal.

Y finalmente aproximaremos **números reales** ($\mathbb{R}$) por decimales más manejables.

Los **números naturales** son aquellos que nos permiten contar los elementos de un conjunto. Por lo tanto son siempre positivos y carecen de cifras decimales.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

El sistema de numeración decimal es un **sistema posicional**, es decir, cada cifra tiene un valor según su posición en el número.

No se deben utilizar comas ni puntos para la separación de cifras de números enteros. Si se considera necesario separarlas en grupos de tres, puede hacerse con un pequeño espacio.

Unidad de millón	Centena de millar	Decena de millar	Unidad de millar	Centena	Decena	Unidad
3	5	4	6	0	4	3

1. Descompón en órdenes de unidades.

   a) 342 531 *b*) 7 100 203 *c*) 7 345 000 *d*) 52 328

2. Ordena los siguientes números de menor a mayor: 34, 50, 17, 23, 102, 8

3. Ordena de mayor a menor los siguientes números: 6 030, 6 300, 63 000, 6 003, 60 300, 6 303

4. Escribe con cifras los siguientes números, prestando atención a los ceros intermedios:

   a) Cuatrocientos dos mil ochocientos siete.

   b) Seiscientos mil cuarenta y nueve.

   c) Trescientos millones treinta mil treinta.

   d) Veinticuatro mil millones trescientos dos.

Operaciones elementales

5. Realiza las siguientes sumas y restas:

   a) $12 - 4 + 7 - 9$

   b) $4 + 7 - 2 - 8$

   c) $6 + 2 - 3 + 9$

   d) $15 - 12 + 3 - 6$

   e) $23 - 13 + 5 - 14$

   f) $7 - 2 + 15 - 8$

   g) $54 - 28 - 11 - 5$

   h) $304 - 38 - 247 + 72$

   i) $982 + 432 - 1\,025 - 277$

6. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones:

   a) $12 \cdot 90$

   b) $16\,192 : 8$

   c) $630 \cdot 91$

   d) $16\,192 : 23$

   e) $23 \cdot 104$

   f) $7\,875 : 25$

   g) $5\,004 \cdot 2\,328$

   h) $304 - 38 - 247 + 72$

   i) $1\,999 \cdot 71$

Problemas:

7. Hugo está haciendo una colección que consta de 234 cromos. Si ya tiene 127, ¿cuántos cromos le faltan para terminar la colección?

8. Marcos ha salido de casa con 60 €. Se ha gastado 22 € en un libro, 18 € en un CD y 12 € en una camiseta. ¿Cuánto dinero le ha sobrado?

9. Maite va tres días por semana a la piscina. Si nada 1300 m cada día, ¿cuántos metros nadará en cuatro semanas?

10. Una persona gana 8.414 € al año y gasta 570 € cada mes. ¿Cuánto ahorrará en el año?

11. Un ascensor puede llevar una carga máxima de 480 kg. ¿Cuántas personas de 80 kg puede llevar como máximo?

12. Un comerciante tiene 5 bidones de aceite de 135 litros cada uno. Quiere distribuirlo en garrafas de 3 litros cada una. ¿Cuántas necesitará?

13. Se vendieron 50 camisetas a 10 € cada una. ¿Qué beneficio se obtuvo si las camisetas se compraron a 7 € cada una?

POTENCIAS

Una **potencia** es una forma abreviada de escribir el producto de factores iguales.
Ese factor se llama **base** y el número de veces que la base se multiplica por si misma se llama **exponente** .

$$7^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

Recordemos que para leer una potencia utilizamos la expresión *a la* y el número ordinal correspondiente a su exponente, excepto en los casos de las potencias de exponente 2 y 3. También es correcto expresarlo como *elevado a* y el exponente.

- 7^2 se lee "7 al cuadrado".
- 7^3 se lee "7 al cubo".
- 7^4 se lee "7 a la cuarta", 7^5 se lee "7 a la quinta", etc.

1. Expresa los siguientes productos como potencias, indica cuál es la base y cuál el exponente:

   a) $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25$
   b) $17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17$
   c) $32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32$
   d) $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12$

2. Escribe como potencia y calcula su resultado:

   a) $10 \cdot 10 \cdot 10$ *b*) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ *c*) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

3. Calcula:

   a) 2^4 *b*) 3^3 *c*) 5^4 *d*) 7^2 *e*) 4^4 *f*) 2^{10}

4. Al calcular una potencia de exponente 4 obtenemos como resultado 256.
   ¿Cuál es el valor de la base?

Resultan de interés las **potencias de base 10**, cuyo cálculo es muy sencillo pues el exponente de la potencia corresponde al número de ceros del resultado.

5. Calcula:

   a) 10^2 *b*) 10^3 *c*) 10^4 *d*) 10^5 *e*) 10^6 *f*) 10^7

6. Escribe como potencia de base 10:

   a) cien millones *b*) mil millones *c*) un billón

Operaciones con potencias de la misma base

Para **multiplicar** potencias de la misma base basta con sumar sus exponentes.

$$7^2 \cdot 7^3 = 7^5$$

7. Escribe como una única potencia:

   a) $3^{12} \cdot 3^7$
   b) $7^6 \cdot 7^2$
   c) $12^{15} \cdot 12^3$
   d) $10^5 \cdot 10^2$
   e) $5^3 \cdot 5^5$
   f) $9^5 \cdot 9^{32}$
   g) $6^9 \cdot 6^{12}$
   h) $15^{28} \cdot 15^5$

Para **dividir** potencias de la misma base basta con restar sus exponentes.

$$3^9 : 3^4 = 3^5$$

8. Escribe como una única potencia:

   a) $3^8 : 3^4$
   b) $7^6 : 7$
   c) $12^{15} : 12^9$
   d) $10^5 : 10^4$
   e) $5^7 : 5^5$
   f) $6^{15} : 6^{12}$
   g) $10^8 : 10^5$
   h) $4^{30} : 4^{16}$

Toda potencia de **exponente 0** tiene valor 1.

9. Escribe como una única potencia:

   a) $3^4 : 3^4$
   b) $7^6 : 7^6$
   c) $12^9 : 12^9$
   d) $4^{30} : 4^{30}$

Para calcular la **potencia de una potencia** basta con multiplicar sus exponentes.

$$(10^5)^3 = 10^{15}$$

10. Escribe como una única potencia:

    a) $(3^{12})^2$
    b) $(5^7)^3$
    c) $(12^3)^9$
    d) $(2^4)^3$
    e) $(2^6)^2$
    f) $(10^6)^2$
    g) $(9^3)^2$
    h) $(6^5)^3$

11. Aplicar las tres propiedades en el orden conveniente:

    a) $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^4$
    b) $7^6 : 7^2 : 7$
    c) $12^{15} \cdot 12^3 : 12^9$
    d) $10^5 \cdot 10^2 : 10^4$
    e) $(5^2)^3 : 5^5$
    f) $9^5 \cdot (9^2 \cdot 9^3)^2$
    g) $6^9 \cdot (6^{15} : 6^{12})^2$
    h) $(10^8 : 10^5)^3 \cdot 10^7$
    i) $(4^5 \cdot 4^6)^2 : (4^2 \cdot 4^4)^3$

Operaciones con potencias del mismo exponente

La **potencia de un producto** es igual al producto de potencias.

$$(12 \cdot 5)^3 = 12^3 \cdot 5^3$$

La **potencia de un cociente** es igual al cociente de potencias.

$$(15 : 3)^4 = 15^4 : 3^4$$

12. Escribe como una única potencia:

a) $7^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4$
b) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2$
c) $4^6 \cdot 6^6 : 8^6$
d) $15^3 : 5^3$
e) $9^7 \cdot 8^7 : 6^7$
f) $20^5 : 10^5 \cdot 2^5$
g) $8^4 \cdot 3^4 : 6^4$
h) $9^6 : 15^6 \cdot 25^5$
i) $36^4 \cdot 2^4 : 24^4$

Raíces cuadradas

La **raíz cuadrada** es la operación inversa a la potencia de exponente 2, es decir, para hallar la raíz cuadrada simplemente debemos preguntarnos que número se ha elevado al cuadrado para obtener ese valor.

13. Indica qué números se han elevado al cuadrado para obtener los siguientes números:

a) 4
b) 9
c) 25
d) 49
e) 64
f) 81
g) 100
h) 121
i) 169
j) 196
k) 225
l) 400
m) 900
n) 12 100
ñ) 490 000
o) 1 000 000

14. Calcula las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{100}$
b) $\sqrt{10\,000}$
c) $\sqrt{1\,000\,000}$
d) $\sqrt{100\,000\,000}$

15. Calcula las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{49}$
b) $\sqrt{169}$
c) $\sqrt{196}$
d) $\sqrt{225}$
e) $\sqrt{400}$
f) $\sqrt{0}$
g) $\sqrt{2\,500}$
h) $\sqrt{8\,100}$
i) $\sqrt{10\,000}$
j) $\sqrt{12\,100}$
k) $\sqrt{22\,500}$
l) $\sqrt{16\,000\,000}$

Operaciones combinadas

Las operaciones deben realizarse en el orden correcto.
Utilizaremos pasos intermedios siempre que sea necesario.

Jerarquía de operaciones

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

16. Opera:

    a) $20^2 \cdot 2 + 5^4 + 120 \cdot 3$

    b) $315 - 42 : 3 + 14 - 36 : 12$

    c) $3^2 \cdot 5^3 : 15 - 17 + 13 \cdot 6$

    d) $2^8 - 14 \cdot 7 + 318 - 130 : 5$

17. Opera:

    a) $(370 + 2 \cdot 12^2 - 436) - (25 + 146)$

    b) $(425 - 215) - (5^2 + 2^4 - 31) + 412$

    c) $(1\,282 - 144) - (41 + 12 \cdot 3) - (52 + 14 \cdot 2)$

    d) $(2 \cdot 584 - 216) - (125 - 18 + 45 : \sqrt{9}) + 16$

    e) $[(370 + 253 - 436) \cdot 45] : 45$

    f) $[(425 + 680 - 142) \cdot 12] : 107$

    g) $[(286 + 729 - 215) \cdot 3^2 \cdot 5] : 120$

    h) $[(549 + 286) \cdot 15] - [(925 + 275) : 150]$

Aproximación y errores

Para simplificar los datos con los que se trabaja con frecuencia aproximaremos a las **cifras significativas**, es decir, a las que aportar alguna información relevante.

Veremos dos métodos diferentes para aproximar, sus ventajas y desventajas.

Truncamiento

Para aproximar por **truncamiento** simplemente ignoramos las cifras no significativas.

Valor exacto	Truncamiento a unidades de millar
4 294	4 000
4 871	4 000

Valor exacto	Truncamiento a centenas
4 294	4 200
4 871	4 800

18. Aproxima los siguientes números a las unidades de millar, por truncamiento:

    a) 3 125 345

    b) 1 198 542

    c) 15 738 928

    d) 695 258

19. Aproxima los siguientes números a millones, por truncamiento:

a) 3 125 345 *b*) 1 198 542 *c*) 15 738 928 *d*) 695 258

20. Escribe todos los números que al aproximar por truncamiento a las decenas resulte 23 730.

21. ¿Cuántos números habrá que al aproximar por truncamiento a las centenas resulte 23 700?

Redondeo

Para aproximar por **redondeo** se observa la primera de las cifras no significativas.

- Si es menor que 5, se procede igual que por truncamiento.
- Si está entre 5 y 9, se suma 1 a la última cifra significativa.

Valor exacto	Redondeo a unidades de millar
4 294	4 000
4 871	5 000

Valor exacto	Redondeo a centenas
4 294	4 300
4 871	4 900

22. Aproxima los siguientes números a las unidades de millar por redondeo:

a) 3 125 345 *b*) 1 198 542 *c*) 15 738 928 *d*) 695 258

23. Aproxima los siguientes números a millones por redondeo:

a) 3 125 345 *b*) 1 198 542 *c*) 15 738 928 *d*) 695 258

24. Escribe todos los números que al aproximar por redondeo a las decenas resulte 23 730.

25. ¿Cuántos números habrá que al aproximar por redondeo a las centenas resulte 23 700? ¿Cuál es el menor de ellos y cuál es el mayor?

26. Indica si la aproximación empleada es truncamiento o redondeo:

a) $3\,256 \longrightarrow 3\,200$

b) $18\,462 \longrightarrow 18\,000$

c) $497 \longrightarrow 500$

d) $986\,492 \longrightarrow 986\,500$

Error

Al aproximar asumimos un cierto margen de **error**.
También hay errores que no derivan del cálculo sino de la medición, pues ni siquiera las herramientas más precisas son totalmente exactas.

El **error absoluto** es la desviación con respecto al valor exacto, ignorando el signo resultante .

$$e = |\text{valor exacto} - \text{valor aproximado}|$$

27. Calcula el error cometido al aproximar a las unidades de millar por truncamiento cada uno de los siguientes números.

    a) $3\,125\,345$ *b*) $1\,198\,542$ *c*) $15\,738\,928$ *d*) $695\,258$

28. Calcula el error cometido al aproximar a las unidades de millar por redondeo cada uno de los siguientes números.

    a) $3\,125\,345$ *b*) $1\,198\,542$ *c*) $15\,738\,928$ *d*) $695\,258$

29. **Razona** cuál de los dos métodos de aproximación te parece más útil, observando los resultados de los ejercicios anteriores.

DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES

- Llamamos **múltiplo** de un número a aquel que obtenemos al multiplicarlo por otro.
- Llamamos **divisor** de un número a aquel que puede dividirlo exactamente, es decir, que al hacer la división da resto cero.

Los múltiplos de un número son mayores o iguales que él.
Los divisores de un número son menores o iguales que él.

1. ¿Es 10 un múltiplo de 2? ¿Y de 4? ¿Y de 5?
2. ¿Es 144 divisible entre alguno de los siguientes números?

   a) 2 *b*) 8 *c*) 288 *d*) 3 *e*) 10 *f*) 7 *g*) 6 *h*) 16

3. Escribe:

   a) cinco múltiplos del número 6.
   b) tres divisores del número 40.
   c) cinco múltiplos del número 7.
   d) tres divisores del número 770.
   e) cinco múltiplos de número 50.
   f) <u>todos</u> los divisores del número 100.

4. Piensa y contesta, justificando tus respuestas:

   a) ¿Se puede dividir una clase de 20 alumnos en grupos de 7, sin que sobre ninguno?
   b) Marta da pasos de 75 cm. ¿Puede recorrer 90 metros en un número exacto de pasos?
   c) ¿Puede vaciarse una tina de 1 500 litros en un número exacto de garrafas de 5 litros?

5. Halla los números indicados:

   a) Los múltiplos de 3 que hay entre 11 y 29.
   b) Los múltiplos de 3 que hay entre 214 y 232.
   c) Los múltiplos de 5 que hay entre 124 y 148.
   d) Los múltiplos de 7 que hay entre 124 y 165.
   e) Los múltiplos de 11 que hay entre 526 y 580.

6. Completa las siguientes frases con el término correcto:

   a) 25 es un __________ de 5.
   b) 5 es un __________ de 85.
   c) 86 es un __________ de 2.
   d) 24 es un __________ de 4.
   e) 33 es un __________ de 11.
   f) 6 es un __________ de 42.

7. Di si los números de cada pareja están relacionados como múltiplo/divisor, y en caso afirmativo construye dos frases que indiquen dicha relación:

   a) 224 y 16
   b) 513 y 19
   c) 420 y 35
   d) 688 y 44
   e) 613 y 13
   f) 2 070 y 46

8. Razona si es cierto o falso:

   a) Cualquier número es múltiplo de 1.
   b) Cualquier número es divisible por sí mismo.
   c) Cualquier número par es múltiplo de 2.
   d) Cualquier número impar es múltiplo de 3.

9. Escribe todos los divisores de los siguientes números:

   a) 9
   b) 10
   c) 26
   d) 33
   e) 25
   f) 15
   g) 16
   h) 49
   i) 12
   j) 20
   k) 45
   l) 121

10. Escribe todos los divisores de los siguientes números:

    a) 99
    b) 250
    c) 120
    d) 294
    e) 60
    f) 64

Números primos

Llamamos **número primo** a aquel que solo puede dividirse entre 1 y entre si mismo.
Llamamos **número compuesto** a aquel que no es primo.

11. Demuestra que los siguientes números son compuestos:

    a) 32
    b) 45
    c) 27
    d) 123
    e) 91
    f) 80
    g) 51
    h) 95
    i) 22
    j) 120
    k) 49
    l) 77
    m) 49
    n) 154
    ñ) 10 000

12. Clasifica en primos y compuestos, justificando tu respuesta:

    a) 5
    b) 8
    c) 11
    d) 15
    e) 21
    f) 28
    g) 31
    h) 33
    i) 45
    j) 49

13. ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta:

    a) Todos los números pares son compuestos.
    b) Todos los números impares son primos.
    c) Todos los números primos, excepto el 2, son impares.

Criba de Eratóstenes

La criba de Eratóstenes es un algoritmo que filtra los números compuestos y determina, por descarte, los números primos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Es el método más eficiente para hallar todos los números primos (relativamente) pequeños.

14. Comprueba si los siguientes números son primos:

a) 101 *d*) 104 *g*) 122 *j*) 125 *m*) 197
b) 102 *e*) 105 *h*) 123 *k*) 195 *n*) 198
c) 103 *f*) 121 *i*) 124 *l*) 196 *ñ*) 199

15. Elabora en tu cuaderno una criba de Eratóstenes hasta el número 200.

Criterios de divisibilidad

Para ayudarnos a localizar divisores sencillos, hay una serie de criterios de sencilla aplicación entre los cuales vamos a destacar los siguientes:

Número	**Criterio**
2	Es un número par.
3	La suma de sus cifras es múltiplo de 3.
5	Su última cifra es 5 o 0.
11	La diferencia entre la suma de las cifras en posición par y la de las cifras en posición impar es 0 o múltiplo de 11.

16. ¿Cómo sería un criterio de divisibilidad entre 10?

17. ¿Cómo sería un criterio de divisibilidad entre 6?

18. Aplica los criterios de divisibilidad entre 2, 3, 5 y 11 a los siguientes números:

a) 173 *d*) 576 *g*) 774 *j*) 247 *m*) 215
b) 510 *e*) 679 *h*) 1 023 *k*) 123 *n*) 417
c) 555 *f*) 754 *i*) 108 *l*) 162 *ñ*) 455

Descomposición en factores primos

Para factorizar un número debemos dividirlo sucesivamente entre todos los números primos que sea posible.

$$\begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \boxed{240 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$\begin{array}{r|l} 2250 & 2 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \boxed{2250 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3}$$

$$\begin{array}{r|l} 7007 & 7 \\ 1001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{7007 = 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$$

19. ¿A qué números se corresponden las siguientes descomposiciones factoriales?

a) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ *b*) $2 \cdot 5 \cdot 13$ *c*) $2 \cdot 5^2 \cdot 17$

20. Descompón en factores primos, utilizando los criterios de divisibilidad estudiados:

a) 42 *c*) 126 *e*) 60 *g*) 81 *i*) 98 *k*) 450
b) 90 *d*) 45 *f*) 76 *h*) 88 *j*) 144 *l*) 605

21. Descompón en factores primos, consultando la criba de Eratóstenes cuando sea necesario:

a) 1 815 *d*) 888 *g*) 350 *j*) 580 *m*) 364 *o*) 725
b) 170 *e*) 847 *h*) 1 024 *k*) 682 *n*) 1 728 *p*) 3 750
c) 444 *f*) 564 *i*) 712 *l*) 1 296 *ñ*) 690 *q*) 338

22. Teniendo en cuenta que $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, averigüa cuáles de los siguientes números son divisores suyos:

a) $4 = 2^2$ *b*) $21 = 3 \cdot 7$ *c*) $18 = 2 \cdot 3^2$ *d*) $28 = 2^2 \cdot 7$

Para factorizar números grandes con varios ceros a la derecha podemos simplificar teniendo en cuenta que cada uno de esos ceros procede de multiplicar por 10, es decir, por 2 y por 5.

$$9\,000\,000 = 9 \cdot 10^6 = 3^2 \cdot 2^6 \cdot 5^6$$

23. Descompón en factores primos:

 a) 70 000
 b) 25 000
 c) 400 000
 d) 66 000

Máximo común divisor

El máximo común divisor (**m.c.d.**) es el mayor de todos los divisores comunes de dos o más números.
Se calcula tomando solo los factores comunes elevados al menor exponente.

El m.c.d. es un **divisor** de los números dados, y por lo tanto es **menor** que ellos.

24. Halla el máximo común divisor de los siguientes pares de números:

 a) 4 y 6
 b) 8 y 12
 c) 10 y 15
 d) 20 y 30
 e) 40 y 45
 f) 23 y 46
 g) 320 y 180
 h) 50 y 75
 i) 20 000 y 25 000
 j) 65 y 50
 k) 99 y 165
 l) 28 y 35
 m) 72 y 108
 n) 216 y 288
 ñ) 42 y 63
 o) 70 y 71

25. Halla el máximo común divisor de los siguientes conjuntos de números:

 a) 9, 12 y 15
 b) 20, 24 y 32
 c) 18, 12 y 42
 d) 63, 49 y 57
 e) 14, 21 y 35
 f) 72, 81 y 126
 g) 160, 280 y 480
 h) 33, 88 y 121
 i) 100, 150 y 325

Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo (**m.c.m.**) es el menor de todos los múltiplos comunes de dos o más números.
Se calcula tomando todos los factores (comunes y no comunes) elevados al mayor exponente.

El m.c.m. es un **múltiplo** de los números dados, y por lo tanto **mayor** que ellos.

26. Halla el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números:

    a) 4 y 6
    b) 8 y 12
    c) 10 y 15
    d) 20 y 30
    e) 40 y 45
    f) 23 y 46
    g) 320 y 180
    h) 50 y 75
    i) 20 000 y 25 000
    j) 65 y 50
    k) 99 y 165
    l) 28 y 35
    m) 72 y 108
    n) 216 y 288
    ñ) 42 y 63
    o) 70 y 71

27. Halla el mínimo común múltiplo de los siguientes conjuntos de números:

    a) 4, 6 y 9
    b) 9, 12 y 15
    c) 20, 24 y 32
    d) 18, 12 y 42
    e) 14, 21 y 35
    f) 160, 240 y 480
    g) 33, 22 y 121
    h) 100, 150 y 350

PROBLEMAS:

28. Una fábrica envía mercancía a Santiago cada 6 días y a Lugo cada 10 días.
    Si hoy han coincidido ambos envíos, ¿cuándo volverán a coincidir?

29. La dueña de un restaurante compra un bidón de 80 litros de aceite de oliva y otro de 75 litros de aceite de girasol. Para mayor comodidad desea envasarlos en garrafas iguales, lo más grandes que sea posible, y sin mezclar.
    ¿Cuál sería la capacidad de las garrafas que necesita?

30. Ana y Pedro comen en el mismo restaurante, pero Ana va cada 20 días y Pedro cada 38. ¿Con qué frecuencia se encuentran?

31. Dos hermanos han horneado dulces, el mayor ha hecho 24 y el pequeño 18.
    Desean regalar los dulces a sus parientes de modo que todos tengan la misma cantidad y que sea la mayor posible.

    a) ¿Cuántos dulces repartirán a cada persona?
    b) ¿A cuántos familiares regalará dulces cada uno de ellos?

32. Una carpintera tiene dos listones de 180 cm y 240 cm respectivamente, y desea cortarlos en trozos iguales, lo más largos posibles sin desperdiciar madera.
    ¿Cuánto debe medir cada trozo?

33. Se han contruido dos columnas de igual altura, la primera apilando cubos de 40 cm de arista y la segunda con cubos de 30 cm de arista.
    Si las columnas han de superar los 2 metros pero no llegar a tres, ¿cuánto miden exactamente?

34. Andrés tiene una cuerda de 120 metros y otra de 96 metros.
    Desea cortarlas de modo que todos los trozos sean iguales pero lo más largos posible. ¿Cuántos trozos de cuerda obtendrá?

35. Marcos quiere pintar una casa pequeña. Según sus cálculos, necesitará 12 litros de pintura roja, 24 litros de pintura verde y 16 litros de pintura blanca, pero quiere comprar botes de pintura que tengan la misma cantidad de litros y que el número de botes sea el menor posible.

    a) ¿De cuántos litros debe ser cada bote?

    b) ¿Cuántos botes de cada color debe comprar?

36. Dos autobuses urbanos inician su ruta en la Plaza Mayor a las 8 de la mañana. Uno hace su recorrido cada 20 minutos y el otro cada 35 minutos.

    a) ¿Con qué frecuencia se cruzan? Exprésalo en horas y minutos.

    b) Si su ruta acaba en el mismo lugar a las 10 de la noche, ¿cuántas veces se habrán encontrado?

37. Un sitio turístico en el Caribe ofrece tres diferentes cruceros: uno tarda 6 días en ir y regresar a su punto de inicio, el segundo tarda 8 días y el tercero tarda 10 días.
    Si los tres cruceros partieron al mismo tiempo hace 39 días, ¿cuántos días faltan para que vuelvan a partir el mismo día todos los cruceros?

38. Daniel y Matías compraron 40 y 32 caramelos, respectivamente, para una fiesta de cumpleaños. Quieren repartirlos entre todos los invitados de modo que cada uno da el mismo número de caramelos a cada persona, pero que todos los invitados tengan el mismo número de caramelos y sea máximo.
    Calcula el número máximo de invitados que deben asistir para que ninguno se quede sin caramelos.

39. Un acuario pequeño se quedó en bancarrota, por lo que otros acuarios van a comprar los peces que tienen. En total, se venderán 48 peces payaso, 60 peces globo, 36 tiburones bebés, 24 pulpos y 72 peces león.
    Para la venta, se desea que los contenedores sean del mismo tamaño y que alberguen la mayor cantidad de animales posible. Además, en cada contenedor sólo puede haber peces de una única especie.

    a) ¿Cuántos peces debe haber por contenedor?

    b) ¿Cuántos contenedores se necesitan para cada especie?

40. Una tienda compra memorias USB de diferentes colores al por mayor. Para Navidad hizo un pedido extraordinario de 84 memorias rojas, 196 azules y 252 verdes. Para guardar la mercancía de forma organizada, exigió que le enviaran las memorias en cajas iguales, sin mezclar los colores y conteniendo el mayor número posible de memorias.

    a) ¿Cuántas memorias habrá en cada caja?

    b) ¿Cuántas cajas de cada color habrá?

41. Una estudiante de Astronomía sabe que Venus le da la vuelta al Sol en 225 días y Marte en 687 días. También sabe que la última vez que Venus, Tierra y Marte se alinearon fue hace 1805645 días. ¿En cuánto tiempo se volverán a alinear los 3 planetas en el mismo punto?

42. Marta quiere instalar en su jardín tres diferentes aspersores automáticos para regar. El primero se abrirá cada 6 horas, el segundo cada 8 horas y el tercero cada 14 horas.
Si la primera vez que inicia el contador es al mediodía, ¿cuántas veces al mes empezarán todas las tomas a regar al mismo tiempo?

43. Juan, Pablo, David y Manuel van a correr a un parque todos los días. Juan le da una vuelta al parque en 2 minutos, Pablo le da 3 vueltas al parque en 7 minutos con 30 segundos, David le da 4 vueltas en 9 minutos con 20 segundos y Manuel le da 2 vueltas al parque en 4 minutos con 20 segundos.

    a) ¿Quién es el más veloz? ¿Y el más lento?

    b) Si todos parten al mismo tiempo y del mismo lugar, ¿cuánto tardarán en encontrarse todos en el punto de partida?

Números enteros

Los números naturales se utilizan para cuantificar los elementos de un grupo, pero si necesitamos representar las situaciones opuestas asociadas necesitamos emplear números negativos.
El conjunto de todos los números naturales, más sus opuestos negativos y el neutro (cero) se llama conjunto de los **números enteros**.

$$\mathbb{Z} = \{\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$$

1. Describe tres situaciones en las que sea necesario el uso de números negativos.
2. Asocia un número entero a cada uno de los siguientes enunciados:
   a) Tengo en el banco 4 200 €.
   b) Miguel debe 125 €.
   c) ¡Qué calor! Estamos a 35°C.
   d) En invierno podemos llegar a los dos grados bajo cero.
   e) El avión vuela a 820 metros sobre el nivel del mar.
   f) El submarino navega a 40 metros bajo la superficie.
3. Asocia un número al cambio expresado en cada enunciado:
   a) La temperatura ha bajado de 21°C a 18°C.
   b) La semana pasada tenía 37€ ahorrados, pero ahora ya solo tengo 34€.
   c) Ha amanecido a 2 grados bajo cero, pero ahora estamos a 3°C.
   d) Le debía 1€ a un amigo, pero mis padres me han dado la paga y he saldado mi deuda. Todavía me quedan 9€.

Valor absoluto y opuesto

El **valor absoluto** de un número entero es el mismo número sin signo.
El **opuesto** de un número entero es el mismo número pero cambiando de signo.

4. Halla el valor absoluto y el opuesto de los siguientes números:

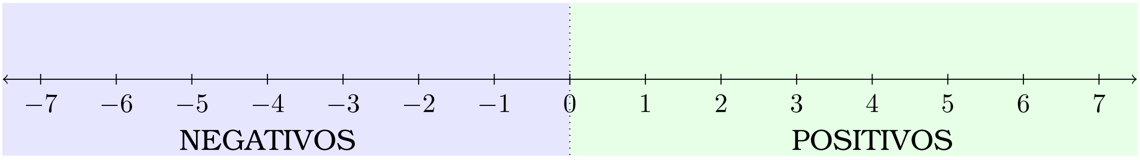
a) 4	*c*) 5	*e*) 2	*g*) -3	*i*) 41	*k*) 15
b) -4	*d*) -7	*f*) 12	*h*) -12	*j*) 125	*l*) -217

5. ¿Qué número entero es opuesto de si mismo?

Representación y ordenación

Los números enteros se representan, ordenados, en la **recta numérica** del siguiente modo:

- Los negativos están a la izquierda del 0, los positivos a la derecha del cero.
- Cuanto mayor es el valor absoluto de un número, más alejado está del cero.



Es imposible representar la recta numérica entera, pues es infinita.
Elegiremos en cada caso un segmento conveniente, que puede incluir el 0 o no.

Por lo tanto cuanto menor es el número más a la izquierda estará en la recta numérica, y análogamente cuanto mayor es más a la derecha se encontrará.
Para expresar el **orden** de una serie de números utilizamos los signos *menor que* (<) y *mayor que* (>).

6. Representa en la recta numérica y ordena de menor a mayor:

   a) +5, -3, -7, 0, +1, +6, -12, -5
   b) -6, -3, -9, 0, -1, -8, -12, -4
   c) -7, +4, -1, +7, +6, -4, -5, +3
   d) +7, +11, +18, +9, +12, +15, +16
   e) -7, -11, -18, -9, -12, -15, -16
   f) -4, +12, -3, +11, -1, +6, +4

7. Ordena los siguientes números de mayor a menor:

   a) +15, -4, +7, -2, +8, -1, +9
   b) +100, +150, -200, -50, +75, -25
   c) +227, -300, +410, -25, +32, -395
   d) -248, +824, -275, +713, -776, +425

8. Dos números enteros opuestos distan en la recta 16 unidades. ¿Qué números son?

Suma

Para **sumar dos enteros negativos**, sumamos su valor absoluto y al resultado le ponemos signo negativo.

$$\begin{array}{r} -4 \\ -2 \\ \hline -6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -7 \\ -4 \\ \hline -11 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -9 \\ -6 \\ \hline -15 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -16 \\ -27 \\ \hline -43 \end{array}$$

9. Suma tú ahora los siguientes números negativos:

a) $(-4)+(-8)$
b) $(-3)+(-2)$
c) $(-5)+(-2)$
d) $(-4)+(-1)$
e) $(-6)+(-8)$
f) $(-5)+(-9)$
g) $(-3)+(-8)$
h) $(-4)+(-6)$
i) $(-9)+(-2)$
j) $(-12)+(-3)$
k) $(-9)+(-18)$
l) $(-15)+(-9)$
m) $(-3)+(-14)$
n) $(-15)+(-2)$
ñ) $(-7)+(-16)$
o) $(-1)+(-19)$
p) $(-18)+(-4)$
q) $(-11)+(-5)$
r) $(-19)+(-17)$
s) $(-18)+(-12)$
t) $(-14)+(-11)$
u) $(-15)+(-16)$
v) $(-17)+(-11)$
w) $(-12)+(-11)$
x) $(-32)+(-27)$
y) $(-54)+(-49)$
z) $(-26)+(-51)$

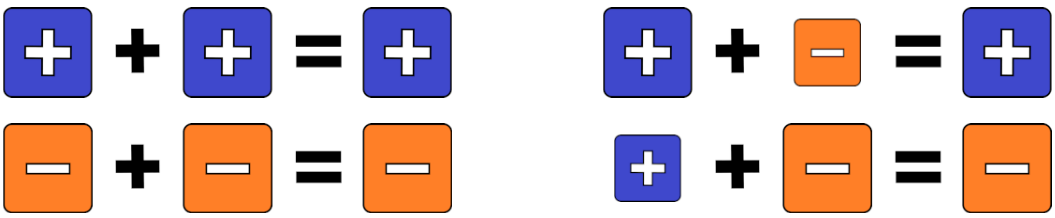
Para **sumar dos enteros de distinto signo**, restamos su valor absoluto y al resultado le ponemos el signo del mayor en absoluto.

¿4+(-2)?	¿(-4)+7?	¿6+(-9)?	¿27+(-16)?
4	7	-9	27
-2	-4	6	-16
2	3	-3	9

10. Suma tú ahora los siguientes números enteros:

a) $(-7)+5$
b) $8+(-2)$
c) $(-4)+3$
d) $3+(-8)$
e) $(-5)+9$
f) $7+(-6)$
g) $8+(-5)$
h) $(-1)+3$
i) $(-5)+5$
j) $4+(-8)$
k) $(-11)+5$
l) $15+(-2)$
m) $(-3)+14$
n) $7+(-16)$
ñ) $9+(-4)$
o) $16+(-8)$
p) $(-15)+12$
q) $17+(-19)$
r) $(-18)+10$
s) $(-21)+15$
t) $13+(-28)$
u) $(-32)+7$
v) $25+(-42)$
w) $(-31)+50$
x) $51+(-22)$
y) $(-19)+34$
z) $42+(-25)$

En resumidas cuentas, la suma de dos números enteros tendrá siempre el signo del mayor de los números.



En el caso de **sumas combinadas** podemos sumar por un lado los números positivos y por otro los negativos, realizando finalmente una única suma de enteros de distintos signo.

11. Opera:

a) $3 + (-2) + 7$
b) $4 + (-5) + (-8)$
c) $2 + (-1) + 8$
d) $(-3) + (-5) + (-4)$
e) $15 + (-25) + 7$
f) $(-21) + 11 + (-5)$
g) $(-11) + 7 + 26$
h) $14 + (-25) + 29$
i) $7 + (-28) + (-13)$
j) $(-15) + 6 + 9$
k) $12 + (-15) + 7$
l) $(-13) + 7 + 8$
m) $12 + (-5) + (-6) + 1$
n) $27 + (-19) + 23 + (-11)$
ñ) $32 + (-16) + 26 + (-28)$

12. Opera:

a) $(-21) + 26 + 12 + (-13)$
b) $44 + (-22) + (-23) + 6$
c) $19 + (-9) + 28 + (-8)$
d) $123 + (-65) + (-56) + 10$
e) $1000 + (-500) + (-200)$
f) $200 + (-32) + (-58) + (-5)$
g) $(-15) + (-95) + 10 + (-25)$
h) $(-10) + (-50) + 10 + (-50)$
i) $(-33) + (-55) + 44 + (-121)$
j) $(-25) + 15 + (-95) + 70$
k) $(-49) + 64 + (-81) + 100$
l) $(-100) + 200 + (-300) + 400$

Resta

Para **restar números enteros** se le suma al primero el opuesto del segundo.

$4 + (-3) = 4 - 3 = 1$
$-7 + (-5) = -7 - 5 = -12$
$12 - (-5) = 12 + 5 = 17$
$-5 - (-8) = -5 + 8 = 3$

13. Reescribe tú ahora las siguientes restas y opera:

a) $7 - (-6)$
b) $8 - (-5)$
c) $(-1) - 3$
d) $(-5) - 5$
e) $(-3) - (-2)$
f) $(-4) - (-6)$
g) $(-4) - (-1)$
h) $(-6) - (-8)$
i) $4 - (-8)$
j) $(-11) - 5$
k) $15 - (-2)$
l) $(-3) - 14$
m) $(-5) - (-2)$
n) $(-5) - (-9)$
ñ) $7 - (-16)$
o) $9 - (-4)$
p) $(-4) - (-8)$
q) $(-9) - (-2)$
r) $(-21) - 15$
s) $13 - (-28)$
t) $(-3) - (-8)$
u) $(-32) - 7$
v) $25 - (-42)$
w) $(-31) - 50$
x) $51 - (-22)$
y) $(-19) - 34$
z) $42 - (-25)$

Para operar **sumas y restas combinadas** podemos reescribir las operaciones convenientemente para eliminar los paréntesis.

$(-4) - 3 + 2 = (-4) + (-3) + 2 = -5$
$7 - (-2) - 5 = 7 + 2 + (-5) = 4$
$(-11) + (-1) - (-16) = (-11) + (-1) + 16 = 4$
$21 - 10 + (-1) - 7 = 21 + (-10) + (-1) + (-7) = 3$

La resta **no** verifica las propiedades conmutativa ni asociativa.

14. Reescribe y opera:

a) $6+(-4)+3$
b) $7-2-(-4)$
c) $1+(-5)-(-1)$
d) $2-7-(-5)$
e) $(-4)-(-6)+1$
f) $(-1)-9+(-5)$
g) $3-12+(-5)$
h) $(-3)-8-(-17)$
i) $19-(-2)+(-15)$
j) $(-13)-(-17)+(-4)$
k) $(-21)-(-15)+8$
l) $(-7)-(-5)+7-2$

15. Opera:

a) $5-9+(-3)-12$
b) $(-1)-7+(-15)-4$
c) $(-19)-21-(-30)+8$
d) $(-16)+13-25-(-11)$
e) $12+(-4)-7-1$
f) $(-7)-8-5+19$
g) $4-9-(-3)+12$
h) $1-(-7)+16-10$
i) $(-16)-14+25-(-4)$
j) $(-15)+7-(-1)+(-8)$
k) $12-18+(-3)-26$
l) $(-31)+12-(-8)-9$
m) $(-12)+(-11)+38-(-7)$
n) $15+(-20)-25+(-30)$
ñ) $(-100)-(-50)+(-20)-(-10)$

Multiplicación y división

Para **multiplicar** dos números enteros se multiplican sus valores absolutos.
Análogamente, para **dividir** dos números enteros se dividen sus valores absolutos.

- Si ambos tienen el mismo signo, el resultado es positivo.
- Si tienen signos diferentes, el resultado es negativo.

$+ \times + = +$ $\qquad$ $+ \times - = -$

$- \times - = +$ $\qquad$ $- \times + = -$

16. Opera:

a) $12 \cdot (-4)$
b) $(-9) \cdot 5$
c) $(-7) \cdot (-12)$
d) $(-25) \cdot (-27)$
e) $39 : (-3)$
f) $(-121) : 11$
g) $(-60) : (-5)$
h) $78 : 13$
i) $7 \cdot (-5) \cdot (-2)$
j) $(-4) \cdot (-3) \cdot (-8)$
k) $(-5) \cdot 11 \cdot 3$
l) $(-10) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 10$
m) $(-60) : (-2) : 5$
n) $(-45) : (-3) : (-5)$
ñ) $(-121) : 11 \cdot 2$
o) $(-4) \cdot (-6) : (-4)$
p) $(-18) \cdot (-10) : 4 : (-3)$
q) $1008 : (-14) : 6 \cdot (-5)$

POTENCIAS

Cuando la **potencia** tiene base positiva, el resultado es siempre positivo.
Cuando la potencia tiene base negativa:

- si el exponente es par, el resultado es positivo.
- si el exponente es impar, el resultado es negativo.

No es lo mismo que el signo forme parte de la base de la potencia o que esté fuera de ella. ¡Los **paréntesis** son fundamentales!

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$
$$-3^2 = -3 \cdot 3 = 9$$

17. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) 7^3
b) $(-7)^3$
c) -4^4
d) 10^8
e) $(-11)^2$
f) -6^2
g) 5^4
h) -8^3
i) $(-3)^8$
j) 3^5
k) $(-5)^4$
l) -13^4
m) 2^6
n) $(-2)^6$
ñ) -2^6
o) 16^2
p) $(-1)^{99}$
q) -1^99

Las propiedades de las potencias que vimos en el primer tema también se extienden a los números enteros. Repásalas y aplícalas en el siguiente ejercicio.

18. Escribe como una única potencia:

a) $(-3)^2 \cdot (-3)^5 \cdot (-3)^4$
b) $(-7)^6 : (-7)^2 : (-7)$
c) $12^{15} \cdot 12^3 : 12^9$
d) $(-10)^5 \cdot (-10)^2 : (-10)^4$
e) $(5^2)^3 : 5^5$
f) $(-9)^5 \cdot [(-9)^2 \cdot (-9)^3]^2$
g) $6^9 \cdot (6^{15} : 6^{12})^2$
h) $(10^8 : 10^5)^3 \cdot 10^7$
i) $(4^5 \cdot 4^6)^2 : (4^2 \cdot 4^4)^3$

Raíces cuadradas

La **raíz cuadrada** es la operación inversa a la potencia de exponente 2.

No existen raíces cuadradas reales de **números negativos**.

19. Calcula las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{49}$
b) $\sqrt{-49}$
c) $\sqrt{225}$
d) $\sqrt{400}$
e) $\sqrt{2\,500}$
f) $\sqrt{8\,100}$
g) $\sqrt{10\,000}$
h) $\sqrt{12\,100}$
i) $\sqrt{22\,500}$
j) $\sqrt{16\,000\,000}$
k) $\sqrt{0}$
l) $\sqrt{-121}$

Operaciones combinadas

Las operaciones deben realizarse en el orden correcto.
Utilizaremos pasos intermedios siempre que sea necesario y procuraremos ser cuidadosos a la hora de operar con signos.

Jerarquía de operaciones

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

20. Opera y observa:

a) $(-25):[(-5)-(-4)]^{15}+(-3)\cdot(-2)$
b) $(-25):(-5)-(-4)+(-3)\cdot(-2)$
c) $[(-3)-(-2)]\cdot(-6)+[8-6]:(-2)$
d) $(-3)-[(-2)\cdot(-6)+8-6]^2:(-2)$
e) $7^2+3\cdot(-2)-12:(-6)$
f) $7^2+3\cdot[(-2)-12]:(-6)$
g) $(-12)+5\cdot 3^2$
h) $[(-12)+5\cdot 3]^2$

21. Opera:

a) $[(-3)-(-4)]^{15}\cdot(-21):(-3)$
b) $(-3)-[(-4)\cdot(-3)-4]:(-8)$
c) $[(-2)-(-4)\cdot(-3)]:(-7)$
d) $[(-3)-(-2+4)]\cdot(-2)$
e) $[(-12)-(-6)\cdot(-2)]+15:(-3)$
f) $[[(-3)-(-5)]\cdot(-3)]:(-2)-(-4)\cdot 3$

22. Opera:

a) $120 - (16 - 5) - [38 - (-6)]$

b) $5 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 + 7$

c) $16 - [5 - (-9)] : (-7) + 7 \cdot [-5 - 3 \cdot (-2)]$

d) $24 : (-2) - 3 \cdot 4 - 6 : 2 - (-3) \cdot (-2)$

e) $40 : (-2) \cdot 5 - 6 + 2^3 \cdot [101 + 53 \cdot (-2)]$

f) $(-4) \cdot 3 : 2 - 3 \cdot 23 + 5 \cdot (-3) - 20$

23. Opera:

a) $(5-10) \cdot (5+10) - 12 : [16 - 15 : (-1) - 29]$

b) $3 - (5 \cdot 2) + 12 : (-3) - 4 \cdot (6 - 4)$

c) $3^2 - (4 - 3 \cdot 2) + 6 + 2 \cdot (24 : 4)$

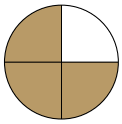
d) $[48 - 5 \cdot (-9) : 3] - 6 + 4 \cdot [19 - 3 \cdot (-7)]$

e) $2 - [2 - (-4) - 12 : (-3)] - (5^2 \cdot 3 - 1)$

f) $4 - [2 - (3 - 4 \cdot 3)] + [4 - (24 : 4)]^2 - 4$

FRACCIONES

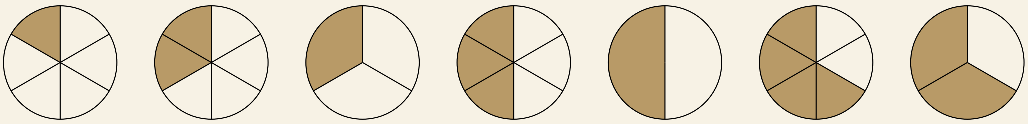
Los **números racionales** son aquellos que se pueden expresar como un cociente de 2 números enteros, que representan el número de partes que se toman del total.



$$\frac{3}{4} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{ numerador} \\ \longrightarrow \text{ denominador} \end{array}$$

El número que se escribe en la parte superior se llama **numerador** y el que se escribe en la inferior **denominador**.

1. Interpreta como una fracción e indica cuál es el numerador y cuál el denominador:

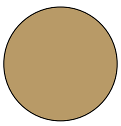
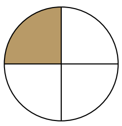
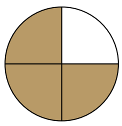


2. Interpreta como una fracción e indica cuál es el numerador y cuál el denominador:
   a) La pizza que hemos comprado venía cortada en ocho trozos. Nos hemos comido siete.
   b) La mitad del alumnado del instituto son chicas.
   c) Para aprobar un examen necesitas contestar correctamente 5 de los 10 puntos.
   d) Tres de cada cuatro personas llevan paraguas los días de lluvia.

3. Representa en tu cuadernos las siguientes fracciones indicadas con un dibujo. Un cuadrado será más fácil de dibujar que un círculo.

   a) $\frac{1}{4}$ *b*) $\frac{2}{4}$ *c*) $\frac{1}{8}$ *d*) $\frac{5}{8}$ *e*) $\frac{3}{8}$ *f*) $\frac{5}{16}$

Cuando una fracción se presenta como **operador** sobre otro número, dicho número ha de multiplicarse por el numerador y dividirse entre en denominador.

 $= 200\ \mathrm{m}^2 \longrightarrow$  $= \frac{200}{4} = 50\ \mathrm{m}^2 \longrightarrow$  $= 3 \cdot 50 = 150\ \mathrm{m}^2$

4. Calcula el valor numérico de:

   a) $\frac{1}{4}$ de 8 *c*) $\frac{2}{3}$ de 30 *e*) $\frac{4}{5}$ de 30 *g*) $\frac{3}{5}$ de 85 *i*) $\frac{3}{5}$ de 715
   b) $\frac{2}{5}$ de 15 *d*) $\frac{3}{4}$ de 48 *f*) $\frac{2}{3}$ de 72 *h*) $\frac{5}{8}$ de 40 *j*) $\frac{5}{7}$ de 483

5. Calcula el valor numérico, atendiendo a las unidades:

   a) $\frac{3}{4}$ de 100 €

   b) $\frac{7}{10}$ de 80 alumnos

   c) $\frac{9}{11}$ de 143 personas

   d) $\frac{4}{5}$ de 365 días

6. En mi clase somos 24. Las chicas representan $\frac{5}{8}$ del total.
   ¿Cuántas chicas hay? ¿Y cuántos chicos?

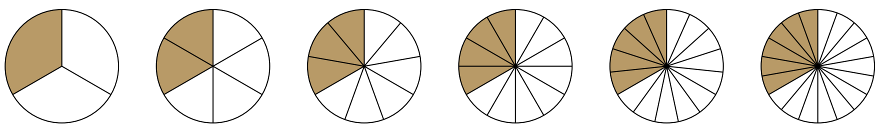
7. En un campamento hay 280 campistas, de los que $\frac{3}{7}$ son españoles. ¿Cuántos extranjeros hay?

8. Según una encuesta, de cada 100 personas con empleo solo 4 trabajan en domingo, y del resto las dos terceras partes tampoco trabajan en sábado.
   ¿Qué fracción de las personas empleadas no trabaja ni sábado ni domingo?

Es importante tener en cuenta que los números racionales pueden ser positivos o negativos, y todos los aspectos de los números negativos que vimos en el tema de números enteros son de obligada aplicación.

Fracciones equivalentes

Llamamos **fracciones equivalentes** a aquellas que representan el mismo número.



Un método para obtener fracciones equivalentes consiste en multiplicar (o dividir) numerador y denominador por el mismo número.

9. Escribe dos fracciones equivalentes a cada una de las siguientes:

   a) $\dfrac{3}{5}$ *b*) $\dfrac{8}{10}$ *c*) $\dfrac{-7}{4}$ *d*) $-\dfrac{2}{9}$

10. Comprueba si las siguientes fracciones son equivalentes:

   a) $\dfrac{2}{9}$ y $\dfrac{18}{81}$ *b*) $\dfrac{12}{25}$ y $\dfrac{60}{75}$ *c*) $\dfrac{16}{25}$ y $\dfrac{20}{30}$ *d*) $\dfrac{36}{60}$ y $\dfrac{21}{35}$

11. Dos atletas han recorrido $\frac{3}{12}$ y $\frac{8}{32}$ de una carrera, respectivamente. ¿Cuál es el que va delante?

Una fracción es **irreducible** cuando el numerador y el denominador son primos entre sí (es decir, su único divisor común es 1) y por lo tanto no puede simplificarse más.

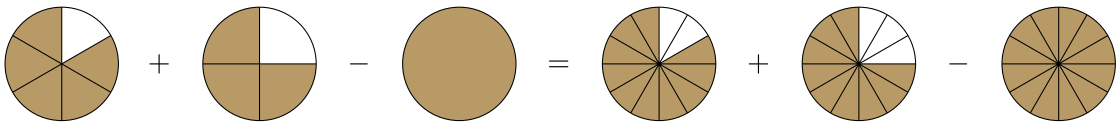
12. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{36}{100}$
b) $\frac{34}{51}$
c) $\frac{81}{120}$
d) $\frac{54}{80}$
e) $\frac{55}{121}$
f) $\frac{32}{128}$
g) $\frac{84}{21}$
h) $\frac{17}{68}$
i) $\frac{42}{77}$
j) $\frac{45}{27}$
k) $\frac{48}{84}$
l) $\frac{72}{32}$
m) $\frac{20}{45}$
n) $\frac{120}{104}$
ñ) $\frac{68}{80}$
o) $\frac{1800}{32000}$

Suma y resta

Solo es posible sumar o restar aquellas fracciones que tienen el mismo denominador.

Si no lo tuviesen, procederíamos hallando fracciones equivalentes a ellas que tengan un denominador común. Por eso emplearemos el **mcm de los denominadores**.



$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-1=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}-\frac{12}{12}=\frac{7}{12}$$

13. Opera y simplifica:

a) $\frac{3}{12}+\frac{10}{8}$
b) $\frac{7}{10}-\frac{3}{4}$
c) $\frac{5}{12}+\frac{17}{18}$
d) $\frac{11}{5}-\frac{2}{3}$
e) $\frac{19}{42}-\frac{11}{28}$
f) $\frac{-11}{12}+\frac{6}{25}$
g) $\frac{7}{66}-\frac{6}{55}$
h) $\frac{2}{3}-2+\frac{7}{8}$
i) $\frac{1}{6}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$

14. Opera y simplifica:

a) $\frac{10}{11}-\frac{4}{7}+\frac{3}{5}$
b) $\frac{13}{12}-\frac{7}{8}-\frac{5}{24}$
c) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{5}{8}$
d) $\frac{-4}{15}+\frac{3}{5}-\frac{7}{3}$
e) $\frac{4}{7}+\frac{2}{3}-5$
f) $\frac{5}{27}-\frac{5}{9}-\frac{5}{3}$
g) $\frac{1}{6}-\frac{8}{3}+\frac{3}{20}$
h) $-1-\frac{15}{24}+\frac{50}{6}$
i) $\frac{-5}{8}+\frac{3}{4}+\frac{4}{6}$

15. Opera y simplifica:

a) $\frac{42}{18}+\frac{35}{20}-\frac{17}{42}$
b) $\frac{5}{5}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$
c) $\frac{3}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$
d) $\frac{3}{5}-1-\frac{-2}{3}-\frac{7}{6}$
e) $\frac{3}{5}-7-\frac{9}{10}+\frac{5}{12}$
f) $\frac{7}{8}-\frac{6}{7}+\frac{1}{14}$
g) $1-\frac{3}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
h) $\frac{13}{17}+\frac{3}{15}-9+\frac{8}{20}$
i) $23+\frac{7}{40}-\frac{10}{7}-14$

Multiplicación y división

El **producto** de fracciones se obtiene multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 3}{7\cdot 4}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$$

16. Multiplica y simplifica:

    a) $\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{7}$ b) $\frac{7}{9}\cdot\frac{15}{14}$ c) $\frac{12}{15}\cdot\frac{25}{36}$ d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{160}$ e) $\frac{1}{15}\cdot\frac{25}{77}$

El **cociente** de dos fracciones es igual al producto de la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{5}{6}:\frac{9}{8}=\frac{5\cdot 8}{6\cdot 9}=\frac{40}{54}=\frac{20}{27}$$

17. Divide y simplifica:

    a) $\frac{3}{5}:\frac{9}{10}$ b) $\frac{12}{15}:\frac{8}{45}$ c) $\frac{2}{25}:\frac{24}{15}$ d) $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$ e) $\frac{1}{15}:\frac{6}{10}$

Simplifica siempre que sea posible, los cálculos serán más fáciles.
Fíjate en si puedes simplificar un producto incluso *antes* de operar.

18. Opera y simplifica:

    a) $\frac{13}{42}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{24}{10}$ b) $\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{18}\cdot 2$ c) $\frac{20}{9}\cdot 5\cdot\frac{9}{11}$ d) $\frac{12}{5}:\frac{4}{25}$

19. Opera y simplifica:

    a) $\frac{16}{5}\cdot\frac{3}{90}\cdot\frac{5}{11}$ c) $8:\frac{7}{6}$ e) $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{7}$ g) $\frac{12}{40}\cdot 5\cdot\frac{35}{14}$

    b) $\frac{7}{2}:4$ d) $\frac{16}{5}:24$ f) $4\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{9}{12}$ h) $\frac{8}{6}\cdot\frac{17}{21}\cdot\frac{1}{5}$

20. Opera y simplifica:

    a) $\frac{40}{5}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{2}{9}$ c) $\frac{8}{12}:\frac{4}{24}$ e) $\frac{21}{8}:\frac{7}{8}$ g) $\frac{5}{6}:15$

    b) $20\cdot\frac{7}{9}\cdot 72$ d) $\frac{7}{10}:\frac{21}{10}$ f) $\frac{15}{20}:\frac{75}{16}$ h) $15:\frac{5}{6}$

21. Expresa como una única fracción:

    a) La mitad de la mitad. b) La mitad de un cuarto. c) Un quinto de un tercio.

PROBLEMAS:

22. La quinta parte de los estudiantes que participan en una competición deportiva están federados. Si hay 36 estudiantes federados, ¿cuántos estudiantes participan?

23. Una madre desea compartir un premio de 28 000 € con sus hijos de tal forma que al mayor le corresponda la quinta parte, al mediano las tres décimas partes, al pequeño las dos séptimas partes y el resto le quede a ella.

    a) ¿Qué fracción le corresponderá a ella?

    b) ¿Cuánto dinero es la parte de cada uno?

24. El monitor de un gimnasio ha preparado una tabla de ejercicios de 45 minutos, de los que $\frac{1}{5}$ serán de calentamiento, $\frac{8}{15}$ de estiramiento y el resto de relajación.
    ¿Cuántos minutos se dedican a cada tipo de ejercicios?

25. Carlota ha gastado en sus vacaciones 900 €, distribuidos de la siguientes forma: $\frac{1}{6}$ en los billetes de tren, $\frac{1}{3}$ en el alquiler del apartamento, $\frac{2}{9}$ en comidas y el resto en compras.

    a) ¿Qué fracción de sus gastos han representado las compras?

    b) ¿Cuántos euros ha gastado en cada partida?

26. Una futbolista ha metido 15 goles en lo que va de temporada. Sabiendo que ha marcado dos de cada diez del total de goles, ¿cuántos goles llevan marcados en total?

27. Un autobús escolar transporta a 60 alumnos y hace tres paradas. En la primera parada recoge a $\frac{5}{12}$ de los alumnos, y en la segunda a $\frac{1}{3}$.

    a) ¿Qué fracción recoge en la última parada?

    b) ¿Cuántos alumnos se suben en cada parada?

28. Irene está realizando una travesía de montaña. El primer día hizo $\frac{4}{15}$ de la travesía y el segundo día $\frac{3}{10}$.

    a) ¿Qué fracción de la ruta ha recorrido entre los dos días?

    b) ¿Ha recorrido más o menos de la mitad de la ruta?

29. De una piscina de 15 000 litros se vacían primero las $\frac{3}{4}$ partes y luego $\frac{1}{3}$ de lo que queda. ¿Cuántos litros quedan finalmente en la piscina?

30. En una maratón participaban 120 corredores, pero solo terminaron la carrera $\frac{3}{8}$ de los inscritos. ¿Cuántos corredores abandonaron la carrera?

31. Berta, Alberto y Martín tienen que decorar el fondo del escenario para una actuación. Si Berta debe pintar las dos quintas partes y Alberto la tercera parte, ¿qué fracción debe pìntar Martín?

32. Pedro distribuye su tiempo diario de estudio en tres partes:

    - Dedica primero $\frac{5}{18}$ a trabajar las materias más fáciles.
    - Dedica luego $\frac{3}{5}$ a las más difíciles.
    - Dedica los 11 minutos restantes a repasar los apuntes del día.

    ¿Cuánto estudia Pedro diariamente?

Potencias y raíces cuadradas

La **potencia de una fracción** es la que resulta de elevar el numerador y el denominador al exponente dado.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{3^5}{4^5} \qquad \left(-\frac{7}{9}\right)^3=\frac{(-7)^3}{9^3}$$

33. Desarrolla como cociente de potencias y calcula:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ *c*) $\left(\frac{-1}{2}\right)^4$ *e*) $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ *g*) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

b) $\left(\frac{7}{9}\right)^3$ *d*) $\left(-\frac{5}{15}\right)^3$ *f*) $\left(\frac{4}{7}\right)^3$ *h*) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

Las propiedades de las potencias que vimos en el primer tema también se extienden a los números racionales. Repásalas y aplícalas en el siguiente ejercicio.

34. Calcula:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^6:\left(\frac{1}{5}\right)^4$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^7:\left(\frac{3}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)$

d) $\left(\frac{1}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^5:\left(\frac{1}{7}\right)^6$

e) $\left(\frac{4}{3}\right)^{10}:\left(\frac{4}{3}\right)^6:\left(\frac{4}{3}\right)^4$

f) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^3\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^4$

La **raíz de una fracción** es la que resulta de hallar la raíz del numerador y del denominador respectivamente.

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$$

35. Calcula las siguentes raíces:

a) $\sqrt{\frac{16}{36}}$ *c*) $\sqrt{\frac{1}{64}}$ *e*) $\sqrt{\frac{-16}{49}}$ *g*) $\sqrt{\frac{-36}{-121}}$ *i*) $\sqrt{\frac{64}{81}}$

b) $\sqrt{\frac{49}{25}}$ *d*) $\sqrt{\frac{225}{196}}$ *f*) $\sqrt{\frac{91}{25}}$ *h*) $\sqrt{\frac{49}{100}}$ *j*) $\sqrt{\frac{-1}{36}}$

36. Simplifica la fracción y después calcula las raíces cuadradas:

a) $\sqrt{\frac{2}{8}}$ *b*) $\sqrt{\frac{32}{50}}$ *c*) $\sqrt{\frac{343}{7}}$ *d*) $\sqrt{\frac{245}{405}}$ *e*) $\sqrt{\frac{600}{1536}}$

Operaciones combinadas

El orden de las operaciones se mantiene en todos los conjuntos numéricos.
Utilizaremos pasos intermedios siempre que sea necesario y procuraremos ser cuidadosos a la hora de operar con signos.

Jerarquía de operaciones

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

37. Opera y simplifica:

a) $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2$
b) $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{10}:\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)$
d) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{5}\right)$
e) $\frac{23}{12}+\frac{1}{5}:\left(\frac{4}{5}+2\right)^2$
f) $\frac{7}{4}:\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{8}\right)\cdot 3$

38. Opera y simplifica:

a) $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}\cdot\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\right)^2$
b) $\frac{5}{3}-\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{2}-\frac{1}{3}$
c) $\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{2}-\frac{1}{3}\right)$
d) $\frac{5}{36}-\left(\frac{7}{16}+\frac{1}{4}:\frac{3}{5}\right)$
e) $\left(\frac{2}{3}\cdot 5-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{7}{2}$
f) $\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{5}\cdot 2$

39. Opera y simplifica:

a) $\left[\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}-2\right]\cdot\frac{5}{3}$
b) $\frac{8}{3}-\left[2:\left(\frac{1}{3}-1\right)-\frac{5}{2}\right]$
c) $-3\cdot\frac{4}{15}-\left(\frac{7}{8}\cdot 5-9\right)$
d) $1-\frac{3}{2}\cdot 4-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)$
e) $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)\cdot 5-\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}$
f) $1-\left[\frac{3}{2}\cdot 5-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)\right]$

Problemas:

40. Cristina gasta un tercio de su dinero en un DVD y luego compra un libro cuyo precio son $\frac{6}{7}$ del precio del DVD.
    a) ¿Qué fracción del dinero ha gastado en el libro?
    b) ¿Cuánto dinero tenía, si ahora le quedan 24 €?
41. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ se pueden llenar con una garrafa de 30 litros?
42. Para una fiesta hemos comprado 60 latas de refresco de $\frac{1}{3}$ de litro. ¿Cuántos litros había en total?
43. Dos hermanos se han repartido las canicas de un bote. El mayor se lleva $\frac{5}{8}$ del total y el menor las 66 restantes. ¿Cuántas canicas había en el bote?
44. Un frasco de perfume tiene una capacidad de $\frac{1}{20}$ litros. ¿Cuántos frascos de perfume pueden llenarse con el contenido de $\frac{3}{4}$ litros?

45. Breixo se come $\frac{2}{7}$ de un bizcocho y para la merienda $\frac{3}{5}$ de lo que le quedaba. ¿Qué fracción se ha comido? ¿Qué fracción ha sobrado?

46. De un depósito que contenía 600 litros de agua han sacado primero $\frac{1}{6}$ del total y después $\frac{3}{4}$ del total. ¿Cuántos litros quedan?

47. Compramos un televisor por 1300 € y pagamos $\frac{1}{4}$ al contado y el resto en 6 plazos. ¿Cuál será el importe de cada plazo?

48. De un depósito que estaba lleno han sacado $\frac{2}{3}$ del total y después $\frac{1}{5}$ del total. Sabiendo que aún quedan 400 litros, ¿cuál era la capacidad del depósito?

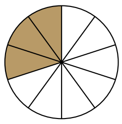
49. En una carrera de coches el trazado tiene 372 km. ¿Cuántos kilómetros faltan para meta si ya han recorrido $\frac{9}{40}$?

50. Una persona ha cosechado durante la mañana $\frac{1}{43}$ de un campo y por la tarde la mitad del resto. Si todavía le quedan 170 hectáreas, ¿cuál es la superficie total del campo?

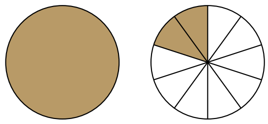
51. Un ganadero vende $\frac{3}{4}$ del número de reses que tiene. Más tarde $\frac{3}{4}$ del resto, quedando así 16 reses en la ganadería. ¿Cuántos animales tenía?

Números decimales

Para expresar cantidades más pequeñas que la unidad utilizamos los órdenes de unidades decimales.
Estos se representan a la derecha de las cifras enteras, tras un símbolo que actúa de separador (típicamente coma o punto; en el caso de estos apuntes se usará un apóstrofo).



3 décimas $\longrightarrow 0'3$



1 unidad, 2 décimas $\longrightarrow 1'2$

52. Escribe con cifras:

    a) Ocho unidades y quince centésimas
    b) Ocho unidades y ocho centésimas
    c) Una unidad y trescientas once milésimas
    d) Cinco unidades y catorce milésimas

53. Escribe como se leen:

    a) 1'2
    b) 1'06
    c) 0'000 07
    d) 12'56
    e) 5'004
    f) 5'158
    g) 2'018
    h) 3'0583

Es importante tener en cuenta que los números decimales pueden ser positivos o negativos, y todos los aspectos de los números negativos que vimos en el tema de números enteros son de obligada aplicación.

Representación y ordenación

Los números decimales también pueden representarse en la recta numérica (fraccionando el espacio entre unidades en 10, 100, etc.) y del mismo modo pueden ordenarse empleando los signos *mayor que* y *menor que*.

Para **comparar** dos números decimales, comparamos cifra a cifra (primero las partes enteras, luego las décimas, luego las centésimas, etc.) hasta que en uno de los números la cifra sea mayor que en el otro.

	Decenas	Unidades	Décimas	Centésimas	Milésimas
$25'041 \longrightarrow$	2	5	0	4	1
$25'039 \longrightarrow$	2	5	0	3	9

54. Ordena de menor a mayor:

    a) 3'12, 3'02, 3'1, 3'2
    b) -5, -5'1, -5'2, -5'15
    c) 0'1, 0, -0'1, 0'2, -0'2

55. Ordena de menor a mayor:

    a) 3'72, 3'7, 3'07, 3'27, 3'77
    b) 0'201, 0'21, 0'211, 0'121, 0'221
    c) 15'435, 15'355, 15'453, 15'534, 15'44
    d) 6'303, 6,33, 6'36, 6'3, 6'336

Operaciones con decimales

Repasaremos las operaciones con números decimales, fijándonos especialmente en los casos en los que el signo pueda suponer alguna dificultad.

Suma y resta

Para sumar o restar números decimales han de colocarse en columna **haciendo coincidir el separador decimal**.
Podemos rellenar con ceros a la derecha de la última cifra decimal si fuese conveniente.

$$
\begin{array}{r} {}^{1}\ {}^{1}\ \ \\ 4'3\,0\,5 \\ +\ 2'2\,9\,5 \\ \hline 6'6\,0\,0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} {}^{1}\ \ \ \ \\ 3'2\,0\,0 \\ +\ 2'8\,5\,6 \\ \hline 6'0\,5\,6 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 1\,2'4\,5 \\ -\ 0\,9'5\,0 \\ \hline 0\,2'9\,5 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 6'6\,{}^{1}0 \\ -\ 2'{}_{1}0\,7 \\ \hline 4'5\,3 \end{array}
$$

56. Opera:

    a) 0'5 - 0'75
    b) 0'25 - 1
    c) 0'4 + 0'8 - 1'6
    d) 1'2 - 1'5
    e) -9'08 + (-5'03)
    f) 2 - 1'95
    g) 2'7 - 0'95 - 1'04
    h) -15'32 - 3'68

57. Opera:

    a) 17'28 - 12'54- 4'665
    b) 12'4 - 18'365 + 7'62
    c) 17'28 - (12'54- 4'665)
    d) 12'4 - (18'365 + 7'62)

Multiplicación

Al multiplicar números decimales hemos de tener en cuenta que el número resultante ha de tener **tantas cifras decimales como la suma de las cifras decimales** de los números a operar.

$$
\begin{array}{r}
4'5 \\
\times\ 3'2 \\
\hline
9\,0 \\
1\,3\,5 \\
\hline
1\,4'4\,0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
2'8\,5\,6 \\
\times\ 3'2 \\
\hline
5\,7\,1\,2 \\
8\,5\,6\,8 \\
\hline
9'1\,3\,9\,2
\end{array}
$$

58. Opera:

   a) $2'07 \cdot 1'5$ c) $0'25 \cdot 1'01$ e) $(-9'08) \cdot (-5'03)$ g) $3'8 \cdot (-12)$

   b) $0'5 \cdot 0'75$ d) $15'32 \cdot (-3'68)$ f) $0'3 \cdot 0'02$ h) $(-11'7) \cdot (-0'45)$

Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, desplazamos la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros sigan a la unidad.

59. Opera:

   a) $2'07 \cdot 10$ c) $0'25 \cdot 10$ e) $(-9'08) \cdot (-10)$ g) $3'8 \cdot (-10)$

   b) $0'5 \cdot 100$ d) $15'32 \cdot 1\,000$ f) $0'3 \cdot 10\,000$ h) $(-11'7) \cdot (-100)$

División

Si el divisor es un número entero, realizamos la división como si fueran números naturales con una única diferencia: al bajar la primera cifra decimal, ponemos una coma en el cociente.

$$
\begin{array}{r|l}
\overline{3\,2}\,1\,1 & 1\,3 \\ \cline{2-2}
-\,2\,6 & 2 \\ \cline{1-1}
6 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l}
3\,2\,1'1 & 1\,3 \\ \cline{2-2}
-\,2\,6 & 2'4 \\ \cline{1-1}
6\,1 & \\
-\,5\,2 & \\ \cline{1-1}
9 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|l}
3\,2\,1'1 & 1\,3 \\ \cline{2-2}
-\,2\,6 & 2\,4'7 \\ \cline{1-1}
6\,1 & \\
-\,5\,2 & \\ \cline{1-1}
9\,1 & \\
-\,9\,1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

60. Opera hasta obtener un valor decimal exacto:

   a) $15 : 4$ b) $18'5 : 5$ c) $537'6 : 42$ d) $26'39 : 103$

Si el divisor es un número decimal, multiplicamos tanto dividendo como divisor por un múltiplo de 10 conveniente.
Obtendremos así una **división equivalente con divisor entero**, que podremos realizar de forma usual observando la correcta colocación del separador decimal.

$$3'276 : 1'05 \longrightarrow 327'6 : 105 \longrightarrow \begin{array}{r|l} 327'6 & 105 \\ \cline{2-2} 126 & 3'12 \\ 210 & \\ 0 & \end{array}$$

61. Opera hasta obtener un valor decimal exacto:

    a) $0'6 : 0'4$ *b*) $21 : 16'8$ *c*) $4'48 : 3'2$ *d*) $0'3 : 0'0025$

62. Opera hasta obtener dos cifras decimales:

    a) $7'5 : 3$ *b*) $7'7 : 6$ *c*) $6'2 : 5$
    d) $20'5 : 4$ *e*) $32 : 0'8$ *f*) $18 : 0'24$
    g) $7 : 0'05$ *h*) $6 : 0'7$ *i*) $0'72 : 0'06$
    j) $0'2 : 0'025$ *k*) $1'52 : 0'24$ *l*) $11'1 : 0'444$

PROBLEMAS:

63. De un listón de 2 metros de longitud se corta un trozo de 0'97 m. ¿Cuánto mide el trozo que queda?

64. En una carrera de 200 metros lisos, el primer clasificado invierte veintidós segundos y tres décimas y el segundo veintitrés segundos y catorce centésimas. ¿Qué tiempo le ha sacado de ventaja?

65. El perímetro de un hexágono regular es de 2'16 m. ¿Cuántos centímetros mide cada lado?

66. Tres botes de refresco iguales hacen un litro. Expresa en litros la capacidad de uno de los botes.

67. Los melones se venden a 1'25 €/kg. ¿Cuánto pesa un melón que ha costado 4'40 €?

68. En una cafetería, Elisa ha pagado por un vaso de leche y una magdalena 1'65 €, y Juan ha pagado 2'30 € por un vaso de leche y dos magdalenas.

    a) ¿Cuánto cuesta una magdalena?

    b) ¿Y un vaso de leche?

69. Hemos pagado 16'20 € por una pescadilla de 1'32 kg. ¿A cómo se vende el kilo?

70. Antonio se ha comprado un pantalón que cuesta 34'95 € y una camisa de precio 19'90 €.
    Si ha pagado con un billete de 100 €, ¿cuánto dinero tienen que devolverle?

71. Si una hora de aparcamiento cuesta 2'60 €, ¿cuanto pagaremos por una estancia de tres horas y cuarto? (OJO: No son 3'15 h...)

Potencias

Una **potencia** de exponente natural es una forma abreviada de escribir el producto de factores iguales, y cundo la base es un número decimal se rige por exactamente las mismas normas.

72. Calcula:

a) $1'25^2$ *b*) $0'1^4$ *c*) $(-5'3)^2$ *d*) $(-0'3)^3$ *e*) $12'1^2$ *f*) $(-3'2)^2$

Operaciones combinadas

El orden de las operaciones se mantiene en todos los conjuntos numéricos.
Utilizaremos pasos intermedios siempre que sea necesario y procuraremos ser cuidadosos a la hora de operar con signos.

Jerarquía de operaciones

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

73. Opera:

a) $1'6 + 3 \cdot (5'6 - 4'8)$
b) $4'3 - 0'2 \cdot (0'7 + 1'2 - 0'4)$
c) $5 - [8'2 - (3'6 + 1'9 - 2'4)]$
d) $3'2 \cdot 1'1 - (4'2 : 0'5 - 3)$
e) $-(6 - 3'15) \cdot 0'8 - 7'1 : 2'84$
f) $1'5 - 3'2 \cdot 0'1 + 4'84 : 0'2$

Problemas

74. En el depósito de frío de una granja, que estaba vacío, han vertido dos cántaras de leche, con 12'35 litros y 7'65 litros respectivamente. Después han extraído dos bidones para hacer queso, uno de 8'9 litros y otro de 5'45 litros.
¿Cuántos litros quedan en el depósito?

75. En una ferretería se vende el cable simple a 0'80 € el metro y el grueso a 2'25 € el metro. ¿Cuánto pagaremos si compramos 3'5 m del más barato y 1'9 m del más caro?

76. Se desea pintar una valla de 147'8 m de largo y 1'8 de altura. Un kilo de pintura cuesta 7'35 € y cubre 1'20 m^2 de valla.
Calcula el presupuesto para la pintura.

Notación científica

La **notación científica** es una forma de escribir los números que acomoda valores demasiado grandes ($100\,000\,000\,000$) para ser escritos de manera convencional.
Los números expresados en notación científica constan de dos factores:

- un número con una única cifra entera
- una potencia de base 10

Expresión convencional	Notación científica
$400\,000$	$4 \cdot 10^5$
$32\,000\,000$	$3'2 \cdot 10^7$

77. Escribe en notación científica:

    a) $12\,000\,000$ *b*) $365\,800\,000\,000$ *c*) $15\,320\,000\,000$ *d*) $-1\,320\,000\,000$

78. Escribe en notación decimal:

    a) $3'24 \cdot 10^6$ *b*) $-4'26 \cdot 10^8$ *c*) $5'78 \cdot 10^9$ *d*) $-2'98 \cdot 10^7$

79. En la siguiente tabla puedes ver la distancia media del Sol a cada uno de los diferentes planetas y planetas enanos en kilómetros.
    Exprésalo en metros, empleando notación científica.

Planeta	Distancia
Mercurio	57 910 000 km
Venus	108 200 000 km
La Tierra	146 600 000 km
Marte	227 940 000 km
Júpiter	778 330 000 km
Saturno	1 429 400 000 km
Urano	2 870 990 000 km
Neptuno	4 504 300 000 km
Plutón*	5 934 456 500 km

Fracciones y decimales

Todas las fracciones pueden expresarse como un número decimal.
En este curso estudiaremos números decimales racionales, pero ten en cuenta que también existen números decimales irracionales que no pueden expresarse como fracción.

Expresión decimal de una fracción

Al dividir el numerador entre el denominador de una fracción se obtiene una **expresión decimal** equivalente a la propia fracción.

$$\frac{10}{2} = 5 \qquad \frac{9}{2} = 4'5 \qquad \frac{2}{9} = 0'\widehat{2} \qquad \frac{2}{90} = 0'0\widehat{2}$$

Los números racionales pueden ser enteros, decimales exactos, decimales periódicos puros o decimales periódicos mixtos, tal y como ilustra el ejemplo anterior.

80. Escribe los siguientes racionales en forma decimal, dividiendo hasta la tercera cifra decimal, y clasifícalos cuando sea posible:

a) $\frac{26}{9}$	*c*) $\frac{48}{12}$	*e*) $\frac{44}{12}$	*g*) $\frac{49}{81}$	*i*) $\frac{925}{7}$	*k*) $\frac{47}{30}$
b) $\frac{45}{12}$	*d*) $\frac{88}{25}$	*f*) $\frac{108}{72}$	*h*) $\frac{55}{36}$	*j*) $\frac{60}{120}$	*l*) $\frac{333}{128}$

Fracción generatriz

La **fracción generatriz** de un número decimal es aquella fracción irreducible equivalente al número.
En este curso obtendremos fracciones generatrices de números decimales exactos.
Basta con escribir el número sin coma decimal y dividirlo por el múltiplo de 10 adecuado.

$$4'25 = \frac{425}{100} = \frac{17}{4}$$

81. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales exactos:

a) 3'5	*d*) 14'07	*g*) 0'001	*j*) 12'50	*m*) 2'20	*o*) 24'96
b) 6'8	*e*) 42'08	*h*) 3'025	*k*) 10'10	*n*) 15'35	*p*) 3'45
c) 3'9	*f*) 16'94	*i*) 0'025	*l*) 4'95	*ñ*) 2'25	*q*) 12'48

Aproximación y errores

Para aproximar por **truncamiento** simplemente ignoramos las cifras no significativas.

Valor exacto	Truncamiento a décimas
$2'362$	$2'3$
$2'328$	$2'3$

Valor exacto	Truncamiento a centésimas
$2'\widehat{3}$	$2'33$
$2'\widehat{6}$	$2'66$

82. Aproxima los siguientes números a las décimas, por truncamiento:

a) $2'9876$	*b*) $13'9295$	*c*) $\frac{5}{6}$	*d*) $\frac{5}{9}$	*e*) $\sqrt{7}$	*f*) π

83. Aproxima los siguientes números a las milésimas por truncamiento:

a) $2'9876$	*b*) $13'9295$	*c*) $\frac{5}{6}$	*d*) $\frac{5}{9}$	*e*) $\sqrt{7}$	*f*) π

Para aproximar por **redondeo** se observa la primera de las cifras no significativas.

- Si es menor que 5, se procede igual que por truncamiento.
- Si está entre 5 y 9, se suma 1 a la última cifra significativa.

Valor exacto	Redondeo a décimas
$2'362$	$2'4$
$2'328$	$2'3$

Valor exacto	Redondeo a centésimas
$2'\widehat{3}$	$2'33$
$2'\widehat{6}$	$2'67$

84. Aproxima los siguientes números a las décimas por redondeo:

  a) $2'9876$ b) $13'9295$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{5}{9}$ e) $\sqrt{7}$ f) π

85. Aproxima los siguientes números a las milésimas por redondeo:

  a) $2'9876$ b) $13'9295$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{5}{9}$ e) $\sqrt{7}$ f) π

Al aproximar asumimos un cierto margen de **error**.

También hay errores que no derivan del cálculo sino de la medición, pues ni siquiera las herramientas más precisas son totalmente exactas.

Error

El **error absoluto** es la desviación con respecto al valor exacto, medido en valor absoluto (es decir, sin importar si el error es por exceso o por defecto).

$$e = |\text{valor exacto} - \text{valor aproximado}|$$

Cuando esa resta involucre fracciones, deberemos emplear la fracción generatriz del valor aproximado.

86. Calcula el error cometido al aproximar a las décimas por redondeo cada uno de los siguientes números.

  a) $2'9876$ b) $13'9795$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{5}{9}$

87. Calcula el error cometido al aproximar a las milésimas por redondeo cada uno de los siguientes números.

a) $2'9876$ *b*) $13'9795$ *c*) $\dfrac{5}{6}$ *d*) $\dfrac{5}{9}$

88. Dada la operación $\left(\dfrac{1}{3}+1\right)\cdot 20+\dfrac{1}{3}$

a) Opera con fracciones, sin aproximar.

b) Aproxima las fracciones a las décimas, opera y compara el resultado obtenido con el anterior.

Álgebra

Una **expresión algebraica** es es un conjunto de cantidades numéricas y literales relacionadas entre si mediante operaciones.

Las letras que utilizamos no son más que signos para representar cantidades desconocidas, por eso las llamamos **incógnitas**.
Podemos utilizar letras del alfabeto romano, del alfabeto griego o cualquier otro símbolo que nos resulte apropiado.

¡Puedes inventar tus propios símbolos!

$\oplus$ $\bigstar$ $\bigtriangledown$ $\blacklozenge$ $\blacktriangleleft$ $\bowtie$ $\circledast$ $\clubsuit$

Con esos símbolos representamos nuestras incógnitas y expresamos las relaciones numéricas que las incluyan.

Tengo una cantidad de dinero.
Mi mejor amiga tiene un euro más que yo.

Mi dinero $\longrightarrow$ $\bigoplus$
El dinero de mi amiga $\longrightarrow$ $\bigoplus +1$

1. Escribe las expresiones algebraicas correspondiente a estas frases:

   a) Los caramelos que tiene Pilar, que son el doble que los de Carla.

   b) La edad de mi hermano, que es un año más joven que yo.

   c) La cantidad de carne que compró Blanca, que es un cuarto de kilo más que la comprada por Pedro.

   d) Tengo el 20 % de mis ahorros en una cuenta a plazo fijo.

   e) La suma de dos números consecutivos.

   f) El perímetro de un cuadrado cuyo lado mide x.

   g) El área de un cuadrado cuyo lado mide x.

   h) El área de un rectángulo cuya base mide el doble que su altura.

2. Escribe las expresiones algebraicas correspondientes a estos enunciados numéricos:

   a) El doble de un número.

   b) El triple de un número.

   c) La mitad de un número.

   d) Una unidad más que un número.

   e) Tres unidades menos que un número.

   f) La suma de dos números.

   g) La suma de los cuadrados de dos números.

   h) El cuadrado de la suma de dos números.

El producto de expresiones algebraicas puede indicar se con un punto o por simple xustaposición.

$$3a \text{ es lo mismo que } 3 \cdot a$$

Valor numérico

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado obtenido al sustituir las variables por un número determinado.

$$x^2 - x^3 \text{ para } x = -1 \quad \longrightarrow \quad (-1)^2 - (-1)^3 = 1 - (-1) = 2$$

Al sustituír una incógnita por un número negativo o una fración puede ser necesario utilizar **paréntesis** aunque no los hubiese en la expresión algebraica.

3. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $3x + 7$ para $x = 2$

   b) $x^2 - 1$ para $x = \frac{2}{3}$

   c) $t \cdot (t - 1)$ para $t = 0'5$

   d) $\dfrac{a+2}{a^2}$ para $a = -1$

   e) $x \cdot y + 3$ para $x = 2, y = 5$

   f) $x \cdot (y + 3)$ para $x = 2, y = 5$

4. Escribe la expresión algebraica correspondiente y calcula su valor numérico para $x = 6$.

   a) El doble de un número más 2.

   b) El doble de un número más 1.

   c) La mitad de un número, menos 8.

   d) La mitad de un número más 3.

   e) El cuadrado de un número, menos 4.

   f) El cuadrado de un número más 2.

   g) El doble del cuadrado de un número.

   h) Un número más la mitad de ese mismo número más su tercera parte.

   i) La tercera parte del doble de un número.

5. ¿Para qué valor de x el valor numérico de la expresión $4 \cdot x + 8$ es 0?
   ¿Y para cuál es 4?

Monomios

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por el producto de un número por una o varias variables elevadas a exponentes naturales.

- Parte literal: las incógnitas y sus exponentes
- Coeficiente: Número que multiplica la parte literal.

El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes de sus incógnitas.

6. Identifica el coeficiente, la parte literal y el grado de los siguientes monomios:

a) $7x^2$ d) xy g) $\frac{-2}{3}xy^3$
b) $2x^2y^2$ e) x^4 h) $-t$
c) $-3x^2y^5$ f) $\frac{1}{2}y$ i) 1

Operaciones con monomios

Suma y resta

Dos monomios son **semejantes** si tienen exactamente la misma parte literal (mismas incógnitas, mismos exponentes).

Solo se pueden sumar y restar aquellos monomios que sean semejantes.
Para hacerlo basta con sumar o restar los coeficientes, manteniendo la parte literal.

$$3xy + 2xy = 5xy \qquad 3x + 2y + x = 4x + 2y$$
$$7x^2z - 5x^2z = 2x^2z \qquad 2x^3 + x^2 - 2x^3 = x^2$$

7. Opera cuando sea posible:

a) $7a^3 + 8a^3$ d) $12xy - 15xy$ g) $12x^2 - \frac{-1}{2}x^2$ j) $y^2 - y$
b) $12x - 15y$ e) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2$ h) $-7xz + (-8xz)$ k) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$
c) $4b^2 + 6b^3$ f) $-9t^4 + 9t^4$ i) $4x - 4x$ l) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}xy$

8. Realiza las siguientes operaciones:

a) $13a - 5a + 17a + 4a - 20a$ c) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}x + \frac{5}{8}x$
b) $30t^3 + (-5)t^3 + 9t^3 - 17t^3 - (-8t^3)$ d) $\frac{2}{9}b^2 - \frac{5}{6}b^2 + \frac{17}{8}b^2$

9. Opera cuando sea posible:

a) $3a + 4a^2 - 4a$ c) $-c + 6 - 5c$ e) $-4e + \frac{1}{2}e + e$
b) $-2b - 4b + 6b$ d) $3d + 7d^2 - 5d$ f) $\frac{1}{5}f + \frac{2}{17} - \frac{2}{5}f$

10. Opera cuando sea posible:

a) $3a + 7b - 4a + 12b - a^2 + 1$
b) $7 + 12a - 8b - 15a + 12b$
c) $3x^2 - 3xy + y - 6x^2 + y$
d) $x^4 + 7x^3 - x^2 + 12x^3$
e) $3a^2 - 8b + 4 - 4a^2 - 7b + 2a - 6$
f) $5a + 4b + 3c + 2d + 1 - a - 2b - 3c - 4d$

Multiplicación

En los productos de monomios, multiplicamos por un lado los coeficientes y por otro las partes literales.
Cuando las incógnitas de las partes literales sean las mismas podemos aplicar lo aprendido en el tema de potencias y sumar los exponentes.

$$3a \cdot 4b = 12ab \qquad \frac{1}{3}ab \cdot \frac{3}{2}b = \frac{1}{2}ab^2$$
$$-2x \cdot 5x^2 = -10x^3 \qquad x^2 \cdot (-x^4) = -x^6$$

11. Realiza las siguientes operaciones e indica el grado del monomio resultante:

a) $10 \cdot 3a^2$
b) $2b \cdot 7b^2$
c) $-2x^2 \cdot 3x^4$
d) $x \cdot 4x^2$
e) $\frac{-3}{5}t^2 \cdot \frac{10}{9}t$
f) $2\pi r^2 \cdot 4r$
g) $4a \cdot 3b^2 \cdot 2c$
h) $-x \cdot \frac{1}{2}xy \cdot y^2$

División

En los cocientes de monomios, dividimos por un lado los coeficientes y por otro las partes literales.
Cuando las incógnitas de las partes literales sean las mismas podemos aplicar lo aprendido en el tema de potencias y restar los exponentes.

$$12ab : 3a = 4b \qquad 5x^6 \cdot (-2x^4) = -\frac{5}{2}x^2$$

12. Realiza las siguientes operaciones e indica el grado del monomio resultante:

a) $3a^4 : 10a^2$
b) $2b^2 : 8b^2$
c) $-2x^5 : 4x^4$
d) $x^2 : 4x$
e) $\frac{-3}{5}t^2 : \frac{10}{9}t$
f) $-2r^2 : 4r$
g) $4a^2b : 2a$
h) $-xy^2 : xy$

Propiedad distributiva

La propiedad distributiva de la multiplicación resulta muy útil en álgebra, pues nos permite multiplicar un monomio por varios que estén en un paréntesis.

$$\oplus \cdot (\bigstar + \triangledown) = \oplus \cdot \bigstar + \oplus \cdot \triangledown$$

13. Opera:

a) $3a \cdot (4a + 2a^2)$
b) $(-2b) \cdot (3b + 2)$
c) $5c \cdot (3a^2 - 4b)$
d) $d \cdot (d - 4)$
e) $-1 \cdot (x + y)$
f) $\frac{1}{2}x \cdot (2x - 2)$
g) $4x \cdot (3x + \frac{1}{2})$
h) $\frac{-2}{3} \cdot (x^2 - 3y)$

Ecuaciones de primer grado

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

$$3x^2 + 4x - 1 = 2x + 7$$

Llamamos **solución** de la ecuación a los valores de las incógnitas para los cuales la igualdad es cierta.

14. Expresa con una ecuación, y deduce su solución:

    a) Una longitud más tres metros mide en total 7 metros.
    b) Si a la capacidad de una botella le quitamos un litro, nos quedan 1'5 litros.
    c) El área de dos campos de fútbol es una hectárea.

15. Expresa con una ecuación:

    a) El área de un cuadrado mide 81 centímetros cuadrados.
    b) El perímetro de un rectángulo cuyo lado mayor mide 1 metro más que el menor es igual a 16 metros.
    c) El doble de un número más el triple del mismo número es igual a cinco veces dicho número.
    d) La quinta parte de un número menos la mitad de otro número es igual a 10.
    e) En un triángulo rectángulo, el cuadrado del lado opuesto (hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados de los lados contiguos (catetos).

16. Mis padres me han dado 10 €, en monedas de 1 € y de 2 €.

    a) Utiliza dos incógnitas para escribir una ecuación que relacione el número de monedas y el dinero.
    b) Halla una solución de la ecuación.
    c) Colabora con tus compañeros para hallar todas las soluciones válidas posibles.

17. Tengo 3 € en mi cartera, en monedas de 0'50 € y de 0'20 €.

   a) Utiliza dos incógnitas para escribir una ecuación.

   b) Halla todas las soluciones válidas de la ecuación.

Comprobación de soluciones

Para comprobar si un valor es solución de una ecuación, debemos hallar el **valor numérico** de ambos miembros y comprobar si son iguales.

¿Es $x = 6$ solución de $4 \cdot (x+1) = 5 \cdot (x+2)$?

$$4 \cdot (x+1) \dashrightarrow 4 \cdot (6+1) = 4 \cdot 7 = 28$$
$$5 \cdot (x+2) \dashrightarrow 5 \cdot (6+2) = 5 \cdot 8 = 40$$

No, porque no coinciden.

Esto nos permitirá saber si hemos resuelto correctamente una ecuación, y revisarla si fuese necesario.

18. Comprueba si el valor indicado es solución de la ecuación:

   a) $3x^2 - 5x + 2 = 0 \xrightarrow{?} x = 1$

   b) $2 \cdot (3x - 5) - 4x = -6 \xrightarrow{?} x = 2$

   c) $\dfrac{x-1}{3} - 2x = -7 \xrightarrow{?} x = 4$

   d) $3x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{?} x = \frac{2}{3}$

   e) $2x - 8 + 3 \cdot (3x - 1) = 0 \xrightarrow{?} x = 1$

   f) $\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{x+2}{5} = 0 \xrightarrow{?} x = 2$

   g) $\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{x+2}{5} = 0 \xrightarrow{?} x = -2$

   h) $6x^2 - x + 1 = 0 \xrightarrow{?} x = \frac{1}{3}$

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son **equivalentes** si puede transformarse una en la otra aplicando las reglas de la suma y del producto.

Regla de la suma

Si en una ecuación se suma (o se resta) el mismo número en ambos miembros se obtiene una ecuación equivalente.

$$x + 2 = 6$$
$$x = 6 - 2$$
$$\boxed{x = 4}$$

Por eso solemos decir que *si está sumando pasa al otro miembro restando* y, recíprocamente, que *si está restando pasa al otro miembro sumando*.

19. Aplica la regla de la suma para encontrar la solución de estas ecuaciones:

a) $14 + x + 10 = 35$
b) $18 + 2x - 8 = x - 25$
c) $12 - x = 12 - 2x$
d) $7 - 5x = 12 - 4x - 17$
e) $3x - 5 + 3x = 6x - 6$
f) $-3x + 7 - 10 = -4x + 5$
g) $-1 + 10x = 11x + 8$
h) $3x - 7 = 1 + 2x$
i) $-6x + 5 = -7x - 6$

Regla del producto

Si en una ecuación se multiplica (o se divide) por el mismo número (no nulo) en ambos miembros se obtiene una ecuación equivalente.

$$-3x = -15$$
$$x = \frac{-15}{-3}$$
$$\boxed{x = 5}$$

Por eso solemos decir que *si está multiplicando pasa al otro miembro dividiendo* y, recíprocamente, que *si está dividiendo pasa al otro miembro multiplicando*.

20. Aplica la regla del producto para encontrar la solución de estas ecuaciones:

a) $3x = 18$
b) $\frac{x}{2} = 8$
c) $6x = 11$
d) $4x = \frac{12}{5}$
e) $-2x = \frac{1}{3}$
f) $5 = 7x$
g) $-\frac{3x}{7} = 12$
h) $3x = \frac{3}{7}$
i) $-\frac{3x}{4} = -\frac{1}{4}$

Resolución de ecuaciones

Una **ecuación de primer grado** es aquella equivalente a la ecuación formada por un polinomio de primer grado igual a cero.

Para resolver una ecuación sencilla, seguimos los siguientes pasos:

1. Aplicamos la regla de la suma de tal modo que los términos con incógnita estén en un miembro y los términos sin incógnita en el otro.
2. Operamos y utilizamos la regla del producto para despejar la incógnita.
3. Comprobamos la solución.

$$12x + 28 + 25x - 75 = -10$$
$$12x + 25x = -10 - 28 + 75$$
$$37x = 37$$
$$x = \frac{37}{37} = \boxed{1}$$

21. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x + 4 = 49$
b) $3 + 8x = 5x$
c) $4x - 5 = 7x + 15$
d) $3x - 4 = 6x + 8$
e) $13 - 2x = -5 + 7x$
f) $3x + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - 2x$

22. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 4 = 2x + 7$
b) $22 - 6x = 5x$
c) $12x - 9 = 8x - 17$
d) $2x - 4 = 2x + 8$
e) $3 - 2x = -5 + x + 8 - 3x$
f) $4x + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

23. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 2 - 5x - 7x + 9 = 8x - 1 + 7x$
b) $7x + 7 - x = 4x + 15 + 2x - 8$
c) $4x + 9 = 5x - 3 - x + 6$
d) $7x + 12 - 3x + 4 = 12x - 15 + 8$

TIPOS DE SOLUCIONES

$x =$ un número	Una única solución
$Ox = 0$	Infinitas soluciones
$Ox =$ otro número	No hay solución

ECUACIONES CON PARÉNTESIS

Cuando la ecuación tenga paréntesis, debo operarlos (aplicando la propiedad distributiva) antes de proceder a resolverla del mismo modo que las anteriores.

$$3 \cdot (x + 1) - 4 = 2 \cdot (x - 4)$$
$$3x + 3 - 4 = 2x - 8$$
$$3x - 2x = -8 - 3 + 4$$
$$\boxed{x = -7}$$

24. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis:

a) $2 \cdot (x - 1) + 3 = 9$
b) $4 \cdot (x + 2) = 3 \cdot (x + 7)$
c) $5x - 4 \cdot (2x - 7) = 13$
d) $6 \cdot (2x - 3) = 10 \cdot (2x - 5)$
e) $3 \cdot (6x - 10) - 5 \cdot (2 - 4x) = 25x - 1$
f) $2 \cdot (7x - 1) - 3 \cdot (3x - 6) - 5 \cdot (11x + 6) = 196$

Problemas con ecuaciones

Para la correcta resolución de un problema algebraico debemos seguir unos sencillos pasos.

1. Indica los distintos datos y su relación con la incógnita.
2. Plantea la ecuación que relaciona esos datos.
3. Resuelve la ecuación.
4. Comprueba el resultado: debe ser solución de la ecuación y además un valor factible para el problema.
5. Relee el problema y contesta a la pregunta con una frase breve.

Resuelve siguiendo los pasos indicados:

25. Julio ha ido de compras. En la primera tienda ha gastado las dos terceras partes de su dinero y en la segunda tres cuartas partes de lo que le quedaba, así que ya solo tiene 10 euros.

    a) ¿Cuánto dinero tenía al principio?

    b) ¿Cuánto ha gastado en cada tienda?

    c) ¿Cuánto ha gastado en total?

26. En la frutería del barrio el kilo de fresas cuesta 30 céntimos más que el kilo de naranjas pero 20 céntimos menos que el kilo de kiwis.
    Por 2kg de fresas, 4kg de kiwis y 3kg de naranjas se han pagado 16'10 €.
    ¿Cuál es el precio de cada tipo de fruta?

27. Tres personas han trabajado en una obra, cobrando según las horas trabajadas.
    Marta ha trabajado 2 horas más que Carlos, y Brais ha trabajado el doble que los otros dos juntos.

    a) Si en total han trabajado 40 horas, ¿cuántas horas ha trabajado cada uno de ellos?

    b) Si por cada hora de trabajo cobran 20€, ¿cuánto cobrará cada uno?

28. Víctor tiene la cuarta parte de la edad que su padre y dentro de 10 años sus edades sumarán 75. ¿Cuántos años tiene cada uno?

29. En el taller de Amparo hay motos y coches, un total de 40 vehículos. Si al contar las ruedas obtenemos 94.

    a) ¿Cuántas motos hay?

    b) ¿Y coches?

30. Marisa tiene 43 años y tres hijos. El pequeño tiene 2 años menos que el mediano, que a su vez tiene 3 años menos que la mayor. Calcula sus edades sabiendo que dentro de tres años la suma de las edades de los hijos será igual a la de la madre.

31. En un concurso dan 5 puntos por cada respuesta correcta y quitan 3 puntos por cada fallo.
Si Inma ha contestado a 25 preguntas y tiene 69 puntos, ¿cuántas ha acertado?

32. En una frutería hay el doble de manzanas que de peras y el triple de uvas que de manzanas.
Si en total hay 441 piezas de fruta, calcula cuántas hay de cada clase.

33. Un granjero tenía gallinas en su corral, pero la tercera parte se escapó por una agujero de la valla y un lobo se comió dos terceras partes de las que quedaban, así que decidió cambiar las 18 gallinas que le quedaban a otro corral.
¿Cuántas gallinas tenía al principio?

34. Raquel, Ramón y Rosa están contando el dinero que tienen para ir al cine. Raquel tiene 7€ más que Ramón y Rosa tiene 5€ más que Raquel. Si en total tienen 40€, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

35. Una periodista ha escrito la crónica de un partido de baloncesto, en la que el equipo local ha sufrido una aplastante derrota. Las dos séptimas partes del artículo están dedicadas a elogiar al entrenador, las tres cuartas partes del resto a elogiar a los jugadores y las 15 líneas restantes a comentar la labor arbitral. ¿Cuántas líneas tiene el artículo?

Proporcionalidad y porcentajes

Razón y proporción

La **razón entre dos números** es el cociente entre dichos números.
Puede expresarse en forma fraccional o con ambos números separados por dos puntos.

Una **proporción** es la igualdad entre dos razones.

1. Calcula la razón entre los siguientes pares de números:

   a) 33 y 36 *b*) 24 y 42 *c*) 102 y 98 *d*) 24 y 9

2. Un equipo ha marcado 68 goles y ha encajado 44. ¿Cuál es la razón entre las dos cantidades?

3. Calcula el valor que falta en las siguientes proporciones:

   a) $\frac{4}{5} = \frac{x}{75}$ *b*) $\frac{18}{x} = \frac{27}{6}$ *c*) $\frac{2}{3} = \frac{8}{x}$ *d*) $\frac{4}{5} = \frac{x}{100}$

4. A un taller de guitarra asisten 30 estudiantes. Si por cada 8 niñas hay 7 niños, ¿cuántos niños y niñas conforman el taller?

5. Martiño tiene cinco fichas rojas por cada dos azules. Si tiene 21 fichas en total, ¿cuántas fichas tiene de cada color?

En una razón de proporcionalidad los números pueden ser decimales.

$$\frac{1'5}{2'4} = \frac{1}{1'6} = \frac{5}{8}$$

6. Calcula el valor que falta en las siguientes proporciones:

   a) $\frac{10}{4} = \frac{7}{x}$ *c*) $\frac{x}{4'2} = \frac{5'1}{8'4}$ *e*) $\frac{3'5}{1'4} = \frac{0'6}{x}$ *g*) $\frac{4'5}{x} = \frac{0'375}{0'6}$

   b) $\frac{4}{x} = \frac{x}{25}$ *d*) $\frac{0'5}{x} = \frac{2'5}{12'5}$ *f*) $\frac{1'2}{3'4} = \frac{x}{1'7}$ *h*) $\frac{x}{2'7} = \frac{1'1}{9'9}$

7. El perímetro de un rectángulo mide 64 cm, y la razón entre las medidas de sus lados es $5 : 3$. Calcula el área del rectángulo.

8. La razón entre la altura de Paco y la sombra que proyecta es de $2 : 7$.
   Si Paco mide $1'80$ metros, ¿cuánto mide su sombra?

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando la razón entre las cantidades relacionadas es constante.
O, dicho de otro modo, si una se duplica la otra también ha de duplicarse.

kg	1	2	3
€	2'45	4'90	7'35

REDUCCIÓN A LA UNIDAD

Llamamos **tasa unitaria** es una razón de proporcionalidad en la que el segundo número (es decir, el denominador de la fracción) es 1.
El **método de reducción a la unidad** se basa en la utilización de la tasa unitaria para realizar un paso intermedio que nos permita plantear el problema de forma sencilla.

kg	3	$\xrightarrow{:3}$	1	$\xrightarrow{\cdot 2}$	2
€	7'35	$\xrightarrow{:3}$	2'45	$\xrightarrow{\cdot 2}$	4'90

UTILIZA EL MÉTODO DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD:

9. Brais compró 5'5 kilos de manzanas y pagó un total de $7'15$ €. ¿Cuál es el precio por kilo?
10. Uxía trabajó 8 horas ayer y ganó un total de 86 €. ¿Cuánto es lo que gana por hora?
11. Dos kilos de naranjas cuestan 1,50 €.
    a) Halla el precio de cada kilo.
    b) ¿Cuánto costarán 5 kg? ¿Y 12 kg?
12. El precio de 12 fotocopias es de $0'60$ €. ¿Cuánto costará hacer 15 fotocopias?
13. Si una ciclista recorre 75 kilómetros en 3 horas, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 5 horas a la misma velocidad?
14. Un panadero utiliza 2 kg de levadura por cada 50 kg de harina para amasar el pan. ¿Qué cantidad de harina podrá amasar con 5 kg de levadura?
15. Un grifo arroja 120 litros de agua en seis minutos. ¿Qué cantidad de agua arrojará en veinte minutos?

Regla de tres

La **regla de tres directa** se plantea como una proporción en la que uno de los valores es desconocido, lo que da lugar a una ecuación que podemos resolver empleando la regla del producto.

Doscientos gramos de mortadela cuestan $1'75$ €, así que nos preguntamos cuánto costará medio kilo.
Hemos de utilizar las mismas unidades de medida para cada magnitud (o gramos en ambas o kilogramos en ambas, pero no mezclarlas).

Peso	Precio
200g	$1'75$ €
500g	x

$$\longrightarrow \quad \frac{200}{500} = \frac{1'75}{x} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{1'75 \cdot 500}{200} = 4'375$$

Para obtener un resultado coherente con nuestra unidad monetaria, redondearemos y contestaremos que medio kilo cuesta $4'38$ €.

UTILIZA REGLA DE TRES:

16. El precio de 18 fotocopias es de 0'36 €. ¿Cuánto costarán 100 fotocopias?
17. Una máquina llena 42 botellas de aceite en 7 minutos.
    a) ¿Cuántas botellas podrá llenar en media hora?
    b) ¿Cuánto tardará en llenar 150 botellas?
18. Una electricista cobra 510 €por 5 días de trabajo. ¿Cuánto cobrará por 7 días?
19. Si 8 kilos de manzanas valen 10'40 €, ¿cuánto costarán 13 kilos?
20. Para construir dos edificios iguales son necesarios 1 245 000 ladrillos. ¿Cuántos harían falta para construir 3 edificios?
21. 4 amigas han pagado 280 € por las entradas de acceso a un evento deportivo. ¿Cuánto tendrá que pagar una peña de 14 personas?
22. Un coche ha dado 60 vueltas a un circuito en 105 minutos. Calcula el tiempo que tardará en recorrer en el mismo circuito 40 vueltas.
23. Si 12 bolas de acero iguales tienen un peso de 7200 gramos, ¿cuánto pesarán 50 bolas iguales a las anteriores?
24. A cierta hora del día un palo de 1'5 metros de largo proyecta una sombra de 60 centímetros. ¿Cuánto mide un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 2'40 metros?
25. En una fábrica una máquina pone 15.000 tornillos en las 8 horas de jornada laboral, funcionando de forma ininterrumpida. ¿Cuántos tornillos pondrá si la encendemos solo durante 3 horas?

26. He encontrado esta receta para hacer 18 magdalenas:

- 125g huevo
- 60ml leche
- 210g harina
- 175g azúcar
- 190ml aceite
- 5g levadura química

a) ¿Qué cantidades necesitaré para hacer 27 magdalenas?

b) ¿Y si quiero hacer 72 magdalenas para una fiesta?

Porcentajes

Un porcentaje es una forma simplificada de representar una razón con denominador 100.

$$16\,\% = \frac{16}{100} = 0'16$$

Conocida la parte y la cantidad total, basta plantear la relación de proporcionalidad para calcular el porcentaje.

$$\frac{3}{5} \begin{array}{c} \xrightarrow{:5} \\ \xrightarrow{:5} \end{array} \frac{?}{1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 100} \\ \xrightarrow{\cdot 100} \end{array} \boxed{\frac{?}{100}}$$

27. Calcula los siguientes porcentajes:

a) $25\,\%$ de 180 alumnos

b) $12\,\%$ de $125\,000$ euros

c) $18\,\%$ de $4\,000\,000$ de personas

d) $21\,\%$ de 48 euros

e) $95\,\%$ de 720 litros

f) $50\,\%$ de $\frac{1}{2}$ tonelada

28. Expresa en forma de porcentaje:

a) 23 de cada 50 *b*) 15 de cada 75 *c*) 7 de cada 20 *d*) 2 de cada 18

29. Escribe las siguientes razones como porcentajes:

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $\frac{9}{10}$

d) $\frac{5}{2}$

e) $\frac{1}{3}$

f) $\frac{3}{8}$

g) $\frac{1}{4}$

h) $\frac{5}{4}$

i) $\frac{4}{3}$

j) $\frac{5}{3}$

30. Comprueba si es cierto.

a) El 24 % de 45 es lo mismo que el 45 % de 24.

b) El 27 % de 30 es lo mismo que el 9 % de 90.

c) El 35 % de 12 es lo mismo que el 28 % de 15.

31. De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 600. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?

32. El 75 % de los 348 alumnos del instituto han aprobado todas las asignaturas. ¿Cuántos alumnos han suspendido alguna?

33. En un hotel están alojados 320 turistas extranjeros. De ellos, 40 son alemanes, 120 franceses, 100 ingleses y el resto portugueses. ¿Qué porcentaje de turistas hay de cada una de esas nacionalidades?

34. Han hecho una encuesta a 98 dentistas y 90 han recomendado utilizar un dentífrico con al menos 1 450 ppm de flúor. Exprésalo como un porcentaje entero, redondeando si fuese necesario.

35. El 67 % de los asistentes a un partido son del equipo local. Si asistieron 15 000 personas, ¿cuántos asistentes no eran del equipo local?

Conocida la parte y el porcentaje, también podemos plantear la relación de proporcionalidad para calcular el total.

$$\frac{20}{100} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{:20} \\ \xrightarrow{:20} \end{matrix} \quad \frac{1}{?} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\cdot 7} \\ \xrightarrow{\cdot 7} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 7 \\ \boxed{?} \end{matrix}$$

36. El 30 % de los miembros de un club deportivo practica tiro con arco. Si 27 personas lo practican, ¿cuántos miembros tiene el club?

37. Un embalse está lleno hasta el 82 % de su capacidad. Si aún admite 72 hm^3 de agua, ¿cuál es su capacidad?

Aumento y disminución porcentuales

Por lo tanto, cuando trabajamos con un **aumento porcentual** podemos operar un único factor que equivale al 100 % original más el porcentaje añadido:

$$100\,\% + 16\,\% = 1 + 0'16 = 1'16$$
$$35€ \cdot 1'16 = 40'60€$$

Del mismo modo, cuando trabajamos con una **disminución porcentual** (descuento) podemos operar un único factor que equivale al 100 % original menos el porcentaje añadido:

$$100\,\% - 10\,\% = 1 - 0'1 = 0'9$$
$$40'60€ \cdot 0'9 = 36'54€$$

38. El precio de un ordenador es de 1200 € sin IVA. ¿Cuánto hay que pagar por él si el IVA es del 16 %?

39. Al comprar un monitor que cuesta 450 € nos hacen un descuento del 8 %. ¿Cuánto tenemos que pagar?

40. He pagado 34 € por una sudadera que estaba rebajada un 15 %. ¿Cuánto costaba la sudadera?

41. Al adquirir un vehículo cuyo precio es de 8800 €, nos hacen un descuento del 7'5 %. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

42. En una tienda han comprado un artículo a 80 € la unidad. Si se vende con una ganancia del 15 % sobre el precio de costo, ¿cuál es el precio de venta?

43. Una camiseta costaba 34 € y en temporada de rebajas se vende a $27'20$ €, ¿qué porcentaje de descuento se ha aplicado sobre el precio anterior?

Una gran ventaja de utilizar una razón para los aumentos y disminuciones porcentuales, es que nos permite realizar el razonamiento inverso.

44. Calcula los precios antes del descuento o recargo:

    a) Con un descuento del 25 %, el precio queda en 12 €

    b) Con un descuento del 20 %, el precio queda en 70 €

    c) Con un recargo del 12 %, el precio queda en 150 €

45. He pagado una factura de la luz de 48€. Sé que el IVA que se le ha añadido al precio es del 21 %, así que ¿cuánto dinero he pagado en concepto de impuestos?

Geometría plana

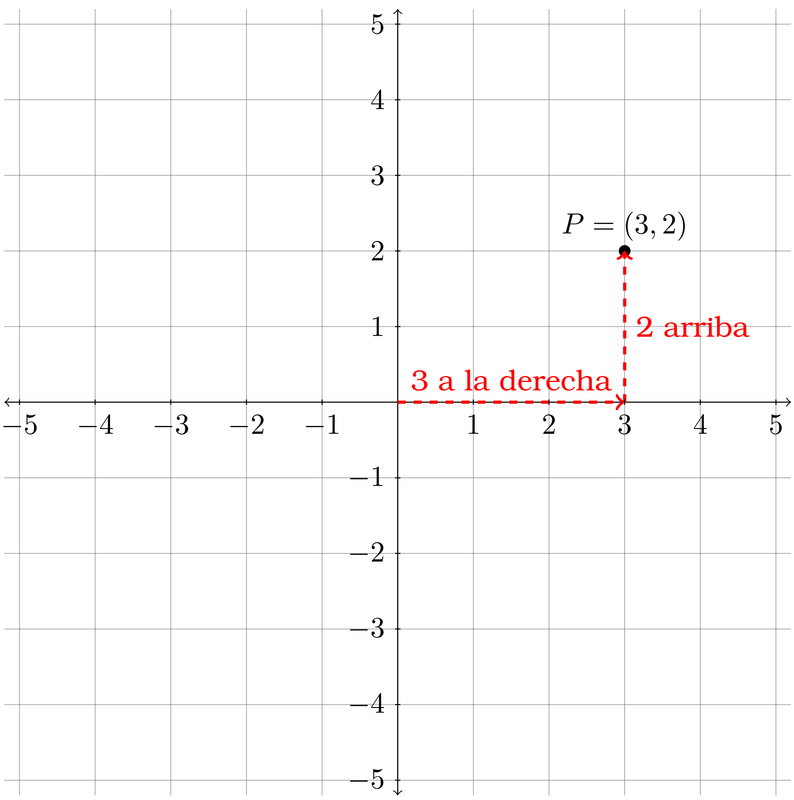
> La Geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal.
>
> — Henri Poincaré

Coordenadas en el plano

El **punto** describe una posición en el espacio, pero carece de dimensiones.
Se le denominará con una letra mayúscula: A, B, P, Q, etc.

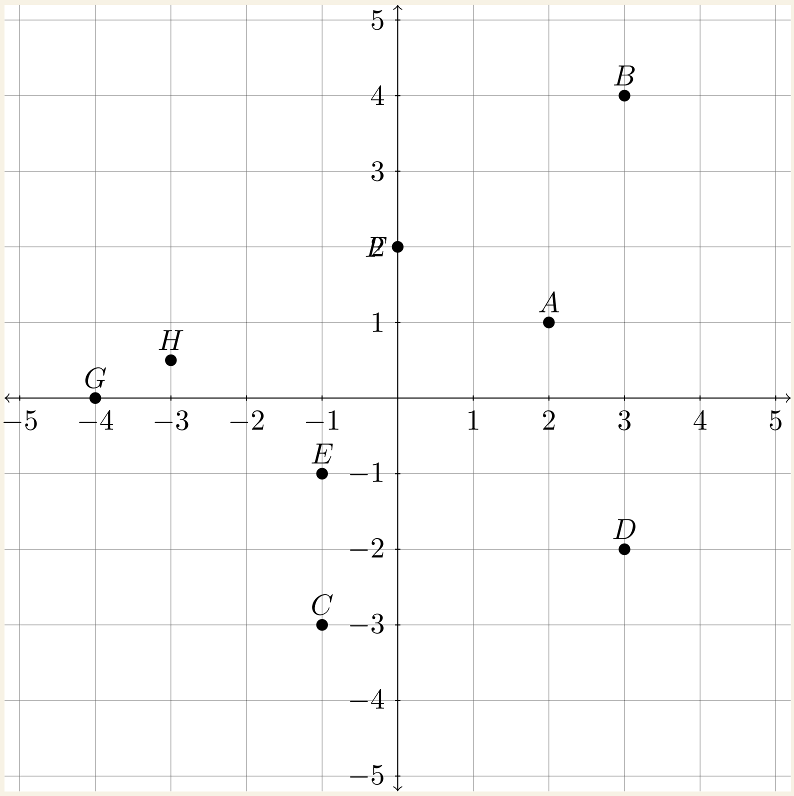
Para representar puntos en el plano utilizamos dos rectas perpendiculares graduadas llamadas **ejes de coordenadas** o **ejes cartesianos**.
Utilizándolas como referencia, cada punto tiene dos coordenadas del tipo (x, y).

- El punto de corte de ambos ejes se llama **origen**, y sus coordenadas son $(0, 0)$.
- El eje horizontal se llama eje X o **eje de abscisas**.
  A la derecha del origen la coordenada x es positiva, y al izquierda es negativa.
- El eje vertical se llama eje Y o **eje de ordenadas**.
  Por encima del origen la coordenada y es positiva, y por debajo es negativa.



El plano se divide en cuatro cuadrantes, que se ordenan desde el superior derecha siguiendo un giro en el sentido de las agujas del reloj.

1. Escribe las coordenadas de los puntos representados:



2. Representa los siguientes puntos en el eje cartesiano:

   a) $A = (4, 1)$
   b) $B = (2, 7)$
   c) $C = (3, -1)$
   d) $D = (-4, 5)$
   e) $E = (0, 6)$
   f) $F = (-2, -3)$
   g) $G = (6, 2)$
   h) $H = (3, 0)$

3. Representa en un plano cartesiano el punto $P = (4, 3)$.
   Representa también otros cuatro puntos que equidisten de P (es decir, que estén todos a la misma distancia de P).

Elementos geométricos básicos

- La **recta** es una línea que se extiende indefinidamente en una misma dirección. Por lo tanto tiene una sola dimensión, y contiene un número infinito de puntos.
  Se le denominará con una letra minúscula: r, s, t, etc...

- Se llama **semirrecta** a cada una de las dos partes en que queda dividida una recta al ser cortada por cualquiera de sus puntos.

- Se llama **segmento de recta** a un trozo de recta comprendido entre dos de sus puntos, a los que llamamos **extremos** del segmento.
  Se le denominará haciendo referencia a dichos extremos: $\overline{AB}$, $\overline{PQ}$, etc.

4. Dibuja los siguientes elementos geométricos:

   a) La recta que pasa por los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (3, -1)$.

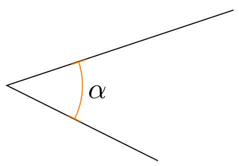
   b) La semirrecta de extremo $P = (-3, -1)$ que pasa por el punto $Q = (2, 4)$.

   c) La recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $C = (1, 1)$.

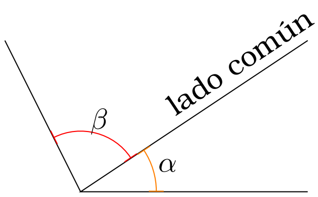
   d) El segmento de extremos $R = (-1, 0)$ y $S = (0, -2)$.

Ángulos

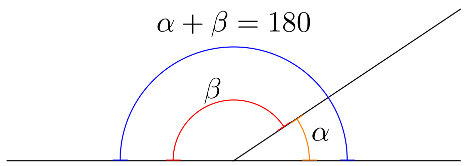
Un par de semirrectas con origen común delimitan dos ángulos, uno interno y otro externo.
Las semirrectas reciben el nombre de **lados** del ángulo y el extremo se llama **vértice**.



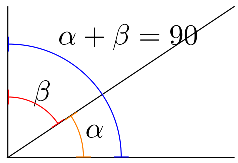
Dos ángulos son **consecutivos** si tienen el mismo vértice y un lado común.



Dos ángulos son **suplementarios** si su suma es un ángulo llano (180º).
Si son suplementarios y consecutivos les llamaremos **adyacentes**.



Dos ángulos son **complementarios** si su suma es un ángulo recto (90º).
Si son complementarios y sus lados son semirrectas opuestas les llamaremos **opuestos por el vértice**.



5. Representa gráficamente:

   a) El ángulo de extremo el origen de coordenadas cuyos lados pasan por los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (-1, 2)$.

   b) Un ángulo adyacente a él.

6. Representa gráficamente:

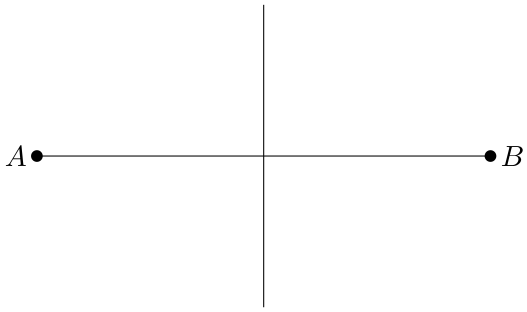
   a) El ángulo de extremo $A = (1, 1)$ cuyos lados pasan por los puntos $B = (2, 2)$ y $C = (2, 1)$.

   b) Un ángulo complementario a él.

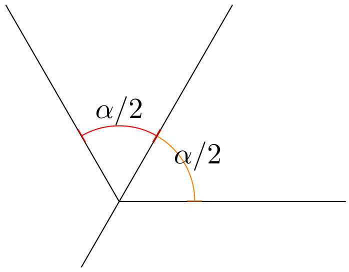
Lugares geométricos en el plano

Un lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos que cumplen una determinada condición. En este curso estudiaremos dos lugares geométricos en el plano:

La **mediatriz de un segmento** es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.
Siempre resulta una recta perpendicular al segmento.



La **bisectriz** es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo.
En ocasiones llamaremos bisectriz a la semirrecta interior al ángulo, en lugar de a la recta completa.



Ejercicios con Geogebra

7. Dibuja dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ formando un ángulo. Traza sus mediatrices y llama P al punto en que se cortan.
   Razona por qué P está a la misma distancia de A, B y C.

8. Dibuja una línea recta y señala en ella tres puntos A, B y C. Traza las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. ¿Cómo son entre sí?

Problemas

9. Dos remolcadores tiran de un gran barco petrolero con igual fuerza. Para evitar colisionar entre ellos se separan 45°.
   Haz un croquis de la situación y averigua la dirección que llevará el petrolero.

10. Después de una merienda en la que han participado tres amigos, ha sobrado media pizza. Juan ha cortado un trozo de 30°, pero Pedro y Luis quieren repartir lo que queda en sectores iguales.
    Representa la media pizza y cómo se reparte entre los amigos.

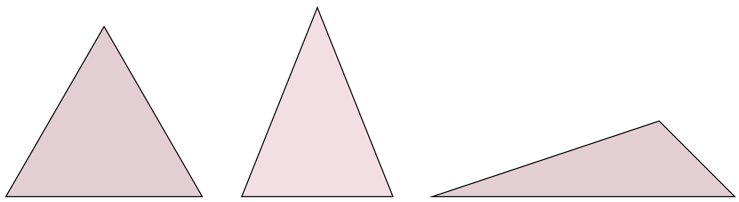
Clasificación de figuras geométricas

Un **polígono** es una figura geométrica limitada por una serie de segmentos a los que llamamos **lados** del polígono.
El punto común de dos de los lados se llama **vértice**.

Triángulos

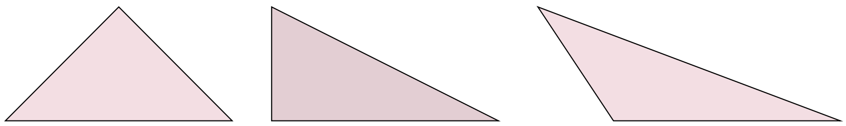
Los triángulos pueden clasificarse según sus lados:

- Equilátero: triángulo cuyos lados son todos iguales.
- Isósceles: triángulo con dos lados iguales entre si y otro distinto.
- Escaleno: triángulo con todos los lados distintos.



Los triángulos también pueden clasificarse según sus ángulos:

- Acutángulo: triángulo cuyos lados son todos agudos (es decir, menores de 90º).
- Rectángulo: triángulo que tiene un ángulo rectángulo (es decir, de 90º).
- Obtusángulo: triángulo que tiene un ángulo obtuso (es decir, de más de 90º).



11. Dibuja un triángulo equilátero. ¿Es acutángulo, rectángulo u obtusángulo?
12. ¿Puede un triángulo rectángulo ser equilátero? ¿E isósceles? ¿Y escaleno?
13. ¿Puede un triángulo obtusángulo ser equilátero? ¿E isósceles? ¿Y escaleno?

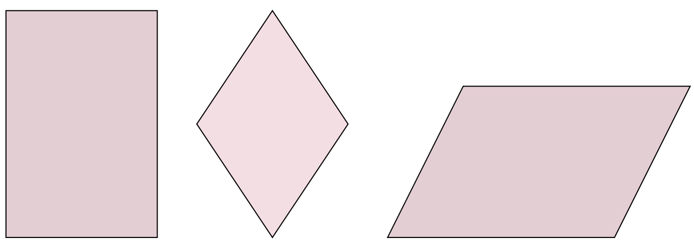
Cualquier figura poligonal puede descomponerse en triángulos, por lo que el estudio de esta figura es fundamental para poder trabajar con los demás polígonos.

Cuadriláteros

Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados, que pueden clasificarse en:

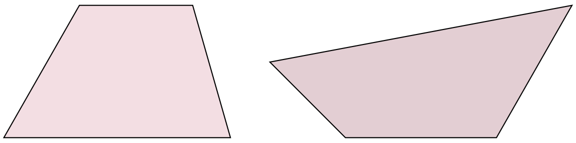
Paralelogramos, es decir, con los lados paralelos dos a dos.

- Rectángulos: tienen los cuatro ángulos rectos.
- Rombos: tienen los cuatro lados iguales.
- Romboides: Tienen los ángulos y los lados iguales dos a dos.



No paralelogramos:

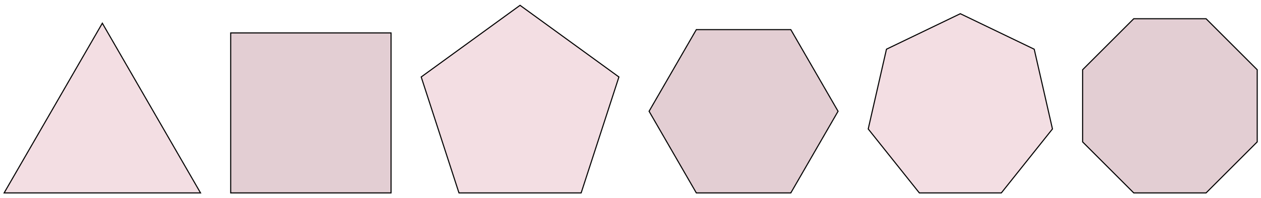
- Trapecios: Solo dos lados paralelos entre sí.
- Trapezoide: Ningún lado es paralelo a otro.



14. ¿En qué categoría clasificarías un cuadrado?

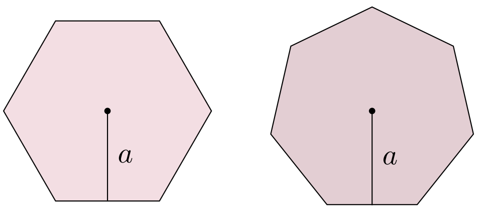
Polígonos regulares

Un polígono regular es aquel que tiene sus lados iguales y sus ángulos iguales.



15. ¿Cuál es el triángulo regular? ¿Y el cuadrilátero regular?

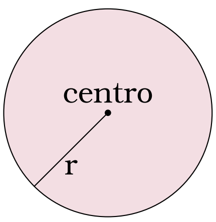
Para el estudio de polígonos regulares de 5 o más lados, necesitaremos conocer un segmento llamado **apotema**, que tiene de extremos el centro de la figura y el punto central de uno de sus lados.



16. *a*) Representa la apotema en un triángulo equilátero, en un cuadrado, en un pentágono regular y en un octógono regular.

    b) ¿Cuántas apotemas podrías dibujar en cada una de esas figuras?

Figuras circulares

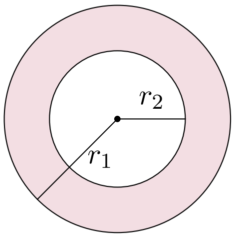


La **circunferencia** es una curva cerrada cuyos puntos equidistan de otro llamado centro. Esa distancia se llama **radio**.

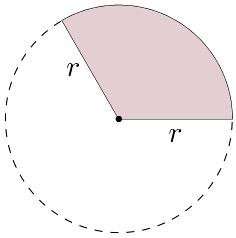
La figura geométrica delimitada por una circunferencia se llama **círculo**.

Estudiaremos además otras figuras circulares más complejas:

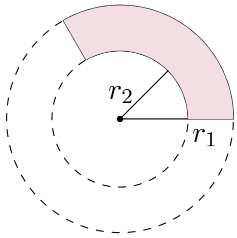
La **corona circular** es una figura encerrada entre dos circunferencias concéntricas.



El **sector circular** es una figura encerrada entre dos radios y una cuerda circular.



El **trapecio circular** es la figura equivalente a un sector de una corona circular.



17. Utiliza compás para dibujar las siguientes figuras:

    a) Una corona circular de radios 1 cm y 3 cm.

    b) Una corona circular de radios 2 cm y 3 cm.

    c) Un sector circular de radio 3 cm y ángulo 180º.

    d) Un sector circular de radio 3 cm y ángulo 90º.

    e) Un sector circular de radio 3 cm y ángulo 45º.

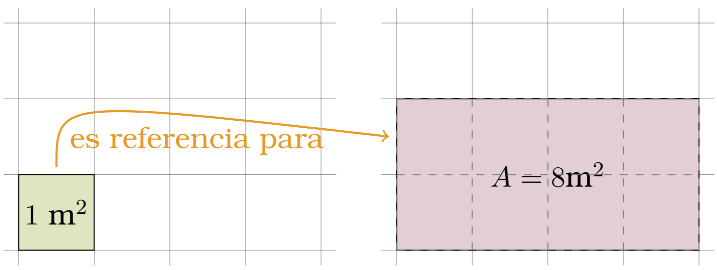
    f) Una corona circular de radios 2cm y 3 cm y ángulo 270º.

Perímetro y área

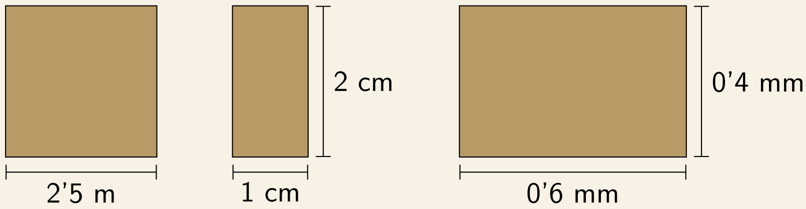
El **perímetro de un polígono** es la medida del contorno que rodea a la figura. Se calcula sumando todos los lados de la figura, y se expresa en unidades de longitud (metro, centímetro, kilómetro, etc.).

El **área de un polígono** es la medida de la extensión que ocupa la figura. Se calcula tomando como referencia una figura cuadrada de lado 1 unidad, y se expresa en cuadrados de unidades de longitud (m^2, cm^2, km^2, etc.)

La figura básica en el cálculo de áreas es el cuadrado. El área de un cuadrado de lado la unidad es una unidad al cuadrado.
El área de un rectángulo se obtiene por composición de múltiples cuadrados de lado unitario, por lo que puede calcularse multiplicando base por altura.



18. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:



19. Calcula el perímetro y el área de un cuadrado cuyo lado mide 5 centímetros.

20. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo cuya base mide 1’5 metros y cuya altura mide el triple que la base.

21. Halla el área de un cuadrado cuyo perímetro es 20 centímetros.

22. Halla el perímetro de un cuadrado cuya área es 16 metros cuadrados.

23. Halla el área de un rectángulo cuyo perímetro es 36 cm y cuya base es 10 cm.

Unidades de medida de superficie

A veces, cambiar de unidades de superficie nos parece un tanto complejo pues no tenemos claro por qué hemos de utilizar un coeficiente u otro. ¿10? ¿100? ¿1000?
Para intentar entenderlo haremos unos sencillos ejercicios de áreas.

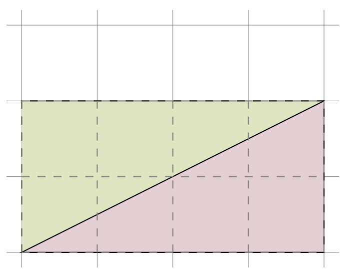
24. *a*) Expresa en m^2 el área de un cuadrado cuyo lado mide 1 km (es decir, 1000 m).
    b) Expresa en m^2 el área de un cuadrado cuyo lado mide 1 hm (es decir, 100 m).
    c) Expresa en m^2 el área de un cuadrado cuyo lado mide 1 cm (es decir, 0’01 m).
    d) Expresa en m^2 el área de un cuadrado cuyo lado mide 1 mm (es decir, 0’001 m).

25. Halla la relación entre las siguientes unidades, utilizando el mismo razonamiento que en el ejercicio anterior:

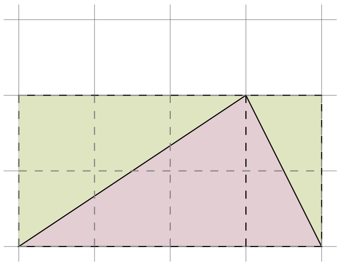
    a) km^2 y m^2 *c*) cm^2 y mm^2 *e*) km^2 y hm^2 *g*) km^2 y cm^2
    b) m^2 y cm^2 *d*) m^2 y mm^2 *f*) km^2 y dm^2 *h*) km^2 y mm^2

Área del triángulo

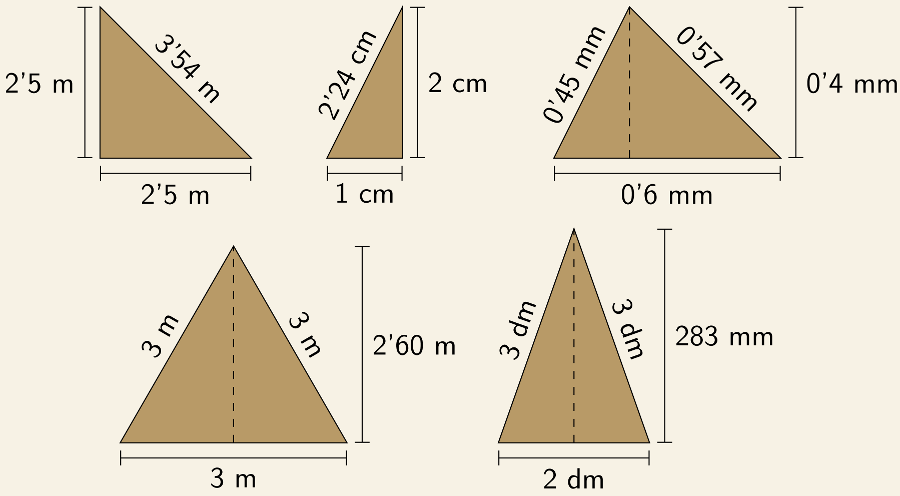
Un triángulo ocupa la mitad de superficie que un rectángulo con la misma base y altura. Este hecho es muy evidente cuando se trata de un triángulo rectángulo.



Cuando hablamos de otros triángulos la observación no es directa, pero si los dividimos en dos partes trazando su altura podemos ver que también es la mitad del rectángulo correspondiente.



26. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:



27. Calcula el perímetro de un triángulo equilátero cuyo lado mide 7 decímetros.

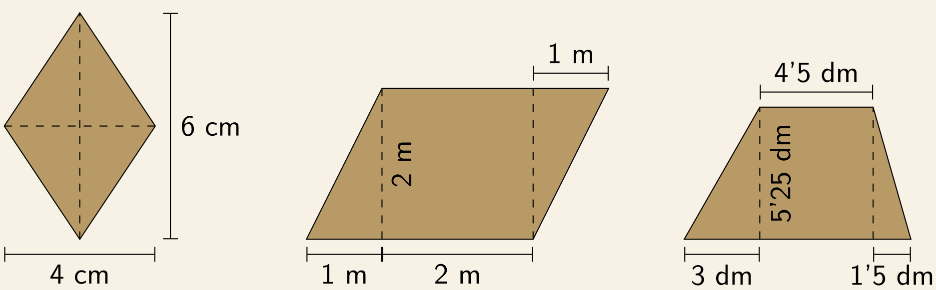
28. Halla el área de un triángulo rectángulo cuya base mide 12 milímetros y cuya altura mide la tercera parte que la base.

Área de cuadriláteros

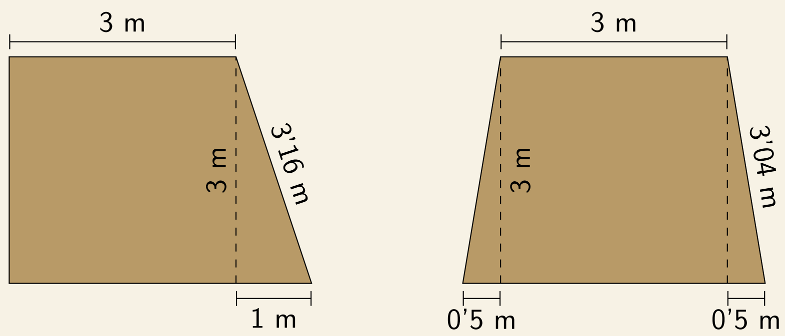
Conocido el modo en que se calculan el área de un rectángulo y el área de un triángulo, ya podemos hallar la de cualquier otra figura poligonal descomponiéndola en rectángulos y triángulos convenientes.

Basta sumar las áreas de los distintos trozos. **¡Y no hace falta aprenderse ninguna fórmula!**

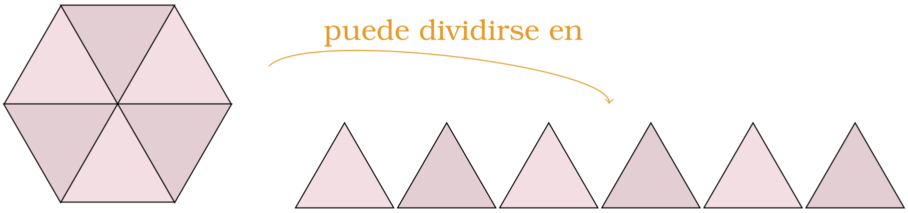
29. Calcula el área de las siguientes figuras:



30. Calcula el perímetro y el área de estos dos trapecios y di que observas:



Área de polígonos regulares



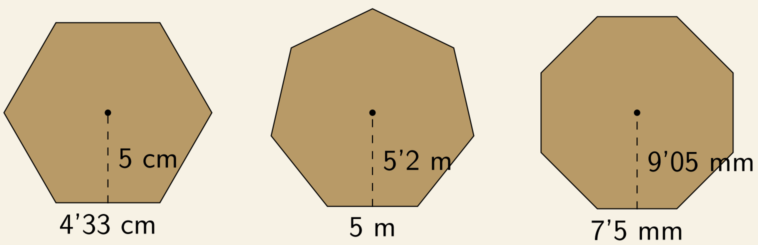
Los polígonos regulares pueden dividirse en tantos triángulos iguales como lados tienen. Cada uno de esos triángulos tiene como base uno de los lados del polígono y como altura la apotema, de modo que su área es:

$$A_T = \frac{\text{lado} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Y por lo tanto el área total del polígono es:

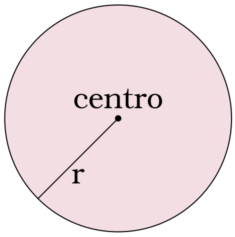
$$A = \text{n}^{\text{o}}\ \text{lados} \cdot \frac{\text{lado} \cdot \text{apotema}}{2}$$

31. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:



32. Halla el lado de un pentágono regular de 61'5 cm^2 de área y 4'1 cm de apotema.

33. Averigua la apotema de un hexágono regular de área 93'5 cm^2 y lado 6 cm.



El **perímetro de un círculo**, es decir, la longitud de la circunferencia, viene dada en función de su radio por la expresión $2\pi r$.

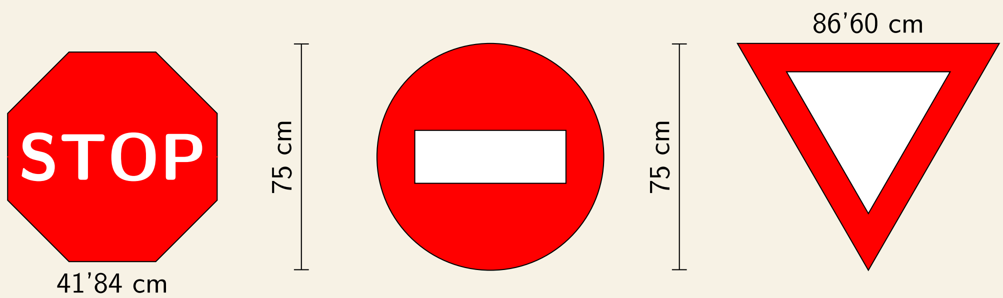
El **área de un círculo** también viene dada en función de su radio, por la expresión πr^2.

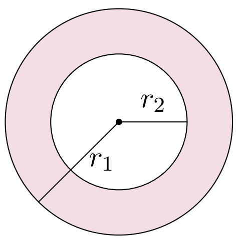
π es un número irracional, es decir, tiene infinitas cifras decimales no periódicas.
Por motivos prácticos lo aproximaremos a las centésimas: $\pi \approx 3'14$.

34. Halla el perímetro y el área de un círculo cuyo radio mide 2 metros.

35. Halla el perímetro y el área de un círculo cuyo diámetro mide 2 metros.

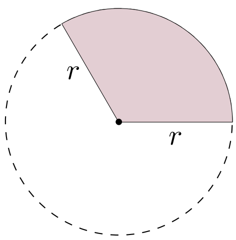
36. Compara la superficie de distintas señales de tráfico, todas de la misma altura, para saber cuánto aluminio se necesita para su fabricación:





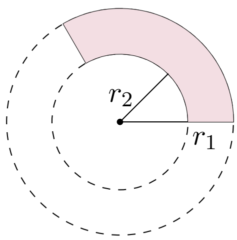
El **área de una corona circular** es la diferencia del área del círculo grande menos el área del círculo pequeño.

$$A = A_{\text{grande}} - A_{\text{pequeño}}$$



El **área del sector circular** es una porción (¡recuerda la razón de proporción!) del círculo completo, que tiene un ángulo total de 360º.

$$A = \frac{\text{ángulo}}{360} \cdot A_{\text{círculo}}$$



El **área del trapecio circular** se calcula empleando primero el razonamiento de la corona y a continuación el del sector.

37. Halla el área de una corona circular cuyos radios miden 3 y 5 metros.

38. *a*) Halla el área de un semicírculo de radio 4 metros.

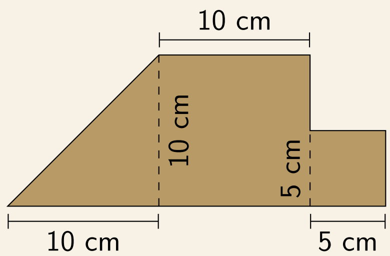
    b) ¿Cómo calcularías su perímetro?

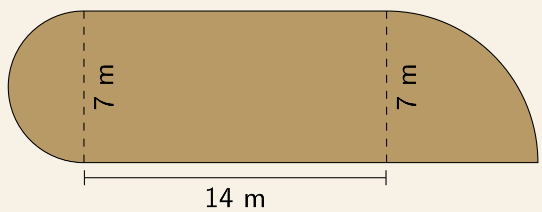
39. Halla el área de un cuarto de corona circular cuyos radios miden 1 y 3 metros.

Figuras compuestas

Como el estudio de rectángulos y triángulos es sencillo, para hallar el área de otras figuras poligonales es conveniente descomponerlas en esas figuras. Si la figura tiene alguna parte circular, lógicamente esa se descompondrá aparte.

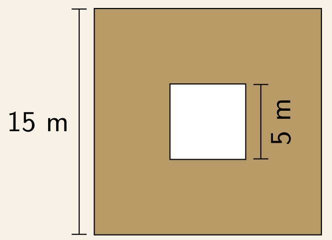
40. Calcula el área de las siguientes figuras:

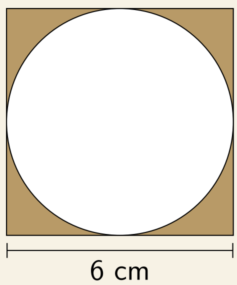


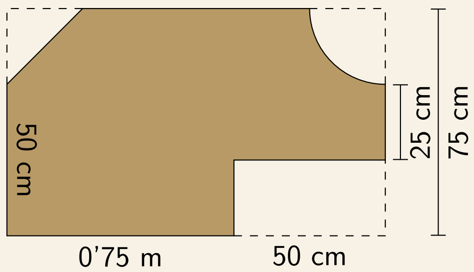


En ocasiones las figuras tienen huecos, bien sean interiores o estén justo en un borde. En ese caso podemos restarle a una figura grande el área del borde.

41. Calcula el área de las siguientes figuras:



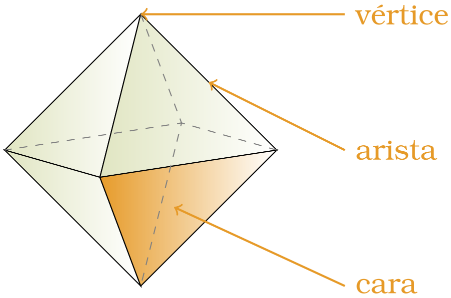




Cuerpos geométricos

Poliedros

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por 4 o más polígonos.



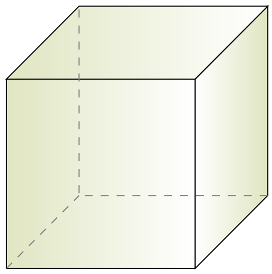
- Llamamos **caras** a cada uno de los polígonos que limitan al poliedro.
- Llamamos **aristas** a los lados de dichos polígonos. Cada arista es común a dos caras.
- Llamamos **vértices** a los puntos extremos de los lados. En cada vértice concurren varias aristas.

El **área de un poliedro** es la suma de las áreas de sus caras.
Para calcularlo de forma sencilla consideraremos su desarrollo plano.

El **volumen de un poliedro** es el espacio que ocupa.
Para calcularlo necesitamos conocer el área de la base y la altura del poliedro.

Hexaedros

El **hexaedro** o **cubo** es un poliedro regular formado por 6 caras laterales cuadradas iguales.



1. ¿Cuántas aristas tiene un cubo?
2. ¿Cuántos vértices tiene un cubo?
3. Da un ejemplo de objeto cotidiano que tenga forma de cubo.

El área del hexaedro es la suma del área de los seis cuadrados.

El volumen de un hexaedro se calcula elevando la longitud de la arista al cubo.

$$V = a^3$$

4. Halla el área y el volumen de los hexaedros cuyas aristas midan:

a) 5 cm	*c*) 1 dm	*e*) 6 mm	*g*) 10 cm
b) 3 m	*d*) 2 cm	*f*) 25 mm	*h*) 1'1 dm

5. *a*) Halla la longitud de la arista de un cubo cuya área <u>total</u> es 12 cm^2.
   b) Calcula su volumen.

Unidades de medida de volumen

A veces, cambiar de unidades de volumen nos parece un tanto complejo pues no tenemos claro por qué hemos de utilizar un coeficiente u otro. ¿10? ¿100? ¿1000?
Para intentar entenderlo haremos unos sencillos ejercicios.

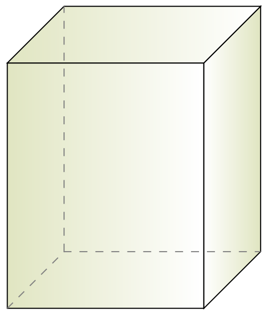
6. *a*) Expresa en m^3 el volumen de un cubo cuyo lado mide 1 km (es decir, 1000 m).
   b) Expresa en m^3 el volumen de un cubo cuyo lado mide 1 hm (es decir, 100 m).
   c) Expresa en m^3 el volumen de un cubo cuyo lado mide 1 cm (es decir, 0'01 m).
   d) Expresa en m^3 el volumen de un cubo cuyo lado mide 1 mm (es decir, 0'001 m).
7. Halla la relación entre las siguientes unidades, utilizando el mismo razonamiento que en el ejercicio anterior:

   a) km^3 y m^3 *b*) m^3 y cm^3 *c*) cm^3 y mm^3 *d*) m^3 y mm^3
8. Teniendo en cuenta que un litro equivale a un decímetro cúbico ($1\ \text{l} = 1\ \text{m}\ ^3$) halla la relación entre las siguientes unidades de volumen:

   a) m^3 y l   *b*) km^3 y l   *c*) l y cm^3 *d*) l y mm^3
9. *a*) Halla la longitud de la arista de un cubo cuyo volumen es 8 litros.
   b) Calcula su área.

Ortoedros

Un **ortoedro** es un poliedro formado por 6 caras laterales rectangulares, que son iguales y paralelas dos a dos.



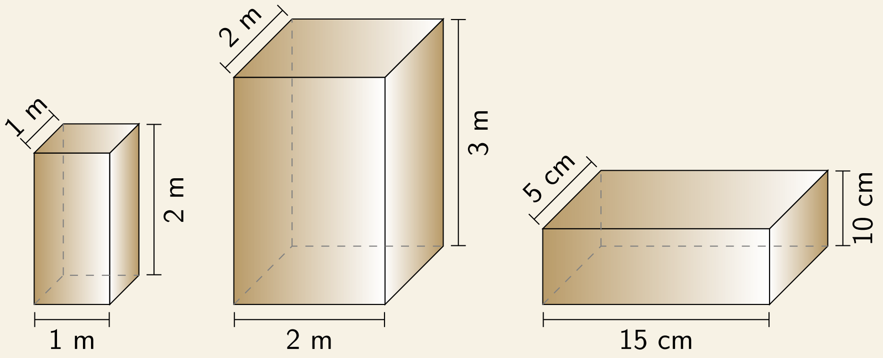
10. ¿Cuántas aristas tiene un ortoedro?
11. ¿Cuántos vértices tiene un ortoedro?
12. Da un ejemplo de objeto cotidiano que tenga forma de ortoedro.
13. ¿Es correcto afirmar que todos los hexaedros son ortoedros?

El área del ortoedro es la suma del área de los seis rectángulos, que recordemos son iguales dos a dos.

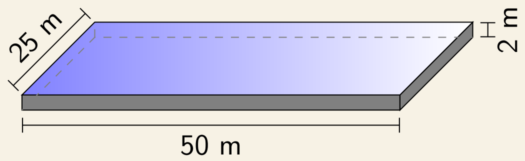
El volumen de un hexaedro se calcula multiplicando el área de la base (un rectángulo) por la altura.

$$V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura}$$

14. Calcula el área y el volumen de los siguientes ortoedros:

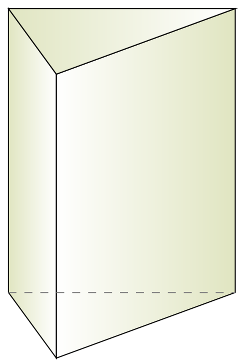


15. Las dimensiones de una piscina olímpica son 50 m de largo, 25 m de ancho y 2 m de profundidad. ¿Cuántos litros de agua necesitaremos para llenarla?



Prismas

Un **prisma** es un poliedro formado por dos bases poligonales iguales unidas mediante caras laterales que son paralelogramos. Los hexaedros y los ortoedros son casos particulares de prismas.



16. ¿Cuántas aristas tiene un prisma de base triangular? ¿Y uno de base rectangular? ¿Y otro de base hexagonal?

17. ¿Cuántos vértices tiene un prisma de base triangular? ¿Y uno de base rectangular? ¿Y otro de base hexagonal?

18. Da un ejemplo de objeto cotidiano que tenga forma de prisma.

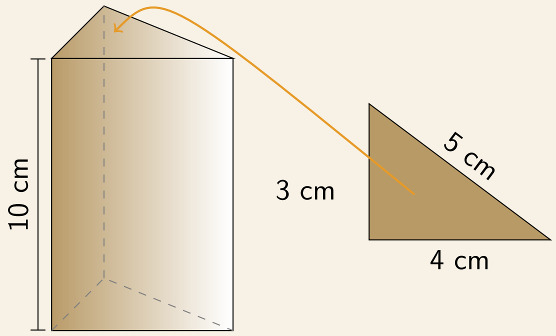
19. Observa el aula. ¿Es un prisma?

El área de un prisma es la suma del área de sus bases y caras laterales.

El volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

$$V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura}$$

20. Calcula el área y el volumen del siguiente prisma triangular:



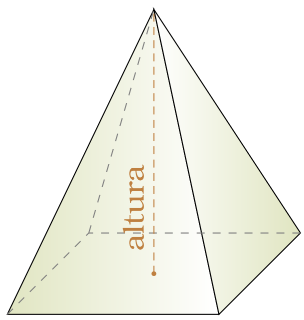
21. Esboza un dibujo de un prisma de 10 cm de altura y cuya base es un rombo de lado 15 cm, diagonal mayor 24 cm y diagonal menor 18 cm. Calcula su área y su volumen.

22. Calcula el volumen de un prisma de 10 cm de altura y cuya base es un polígono irregular de área 25 cm^2.

23. Un tetrabrick de leche mide 7 cm de ancho, 7 cm de fondo y 20 cm de alto. ¿Qué volumen tiene su interior? Exprésalo en mililitros.

Pirámides

Una **pirámide** es un poliedro formado por una base poligonal y caras laterales triangulares que confluyen a un punto común llamado vértice.
Un caso particular de pirámide es el **tetraedro**, un poliedro regular formado por 4 triángulos equiláteros.



24. ¿Cuántas aristas tiene una pirámide de base triangular? ¿Y uno de base rectangular? ¿Y otro de base hexagonal?

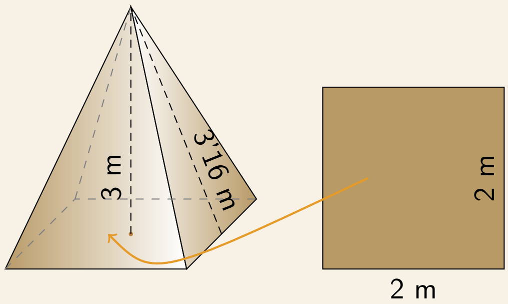
25. ¿Cuántos vértices tiene una pirámide de base triangular? ¿Y uno de base rectangular? ¿Y otro de base hexagonal?

El área de una pirámide es la suma del área de su base y sus caras laterales.

El volumen de una pirámide es la tercera parte del producto del área de la base y la altura.

$$V = \frac{A_{\text{base}} \cdot \text{altura}}{3}$$

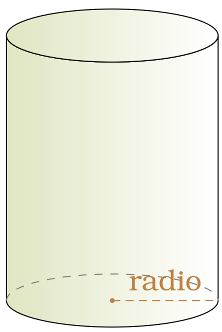
26. Calcula el área y el volumen de la siguiente pirámide:



CUERPOS REDONDOS

Los cuerpos que vamos a estudiar a continuación se llaman **sólidos de revolución**, es decir, son figuras no poliédricas que se obtienen a partir de una figura plana que gira sobre un eje.

CILINDROS



Un **cilindro** es una figura formada por dos bases circulares unidas entre sí por una superficie curva.

Dado que las bases son círculos, para hallar el área de del cilindro necesitamos recordar el área de un círculo:

$$A_{\text{base}} = \pi r^2$$

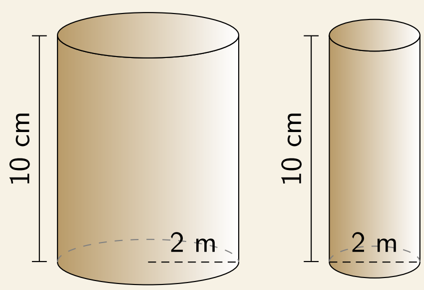
En el desarrollo plano del cilindro vemos que la superficie que une ambas bases equivale a un rectángulo cuya longitud es la misma que la circunferencia ($2\pi r$) y cuya altura es la altura del cilindro (h).

$$A_{\text{lateral}} = 2\pi r \cdot \text{altura}$$

El volumen de un cilindro se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

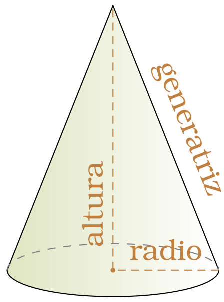
$$V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura}$$

27. Calcula el área y el volumen de los siguientes cilindros:



Conos

Un **cono** es una figura formada por una base circular y una superficie curva que la une con su vértice.



Dado que la base es un círculo, para hallar el área de del cono necesitamos recordar el área de un círculo:

$$A_{\text{base}} = \pi r^2$$

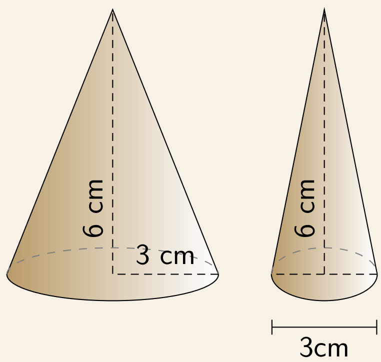
En el desarrollo plano del cono vemos que el lateral equivale a un trozo de círculo, cuyo arco coincide con la longitud de la circunferencia de la base, por eso su área se puede expresar como:

$$A_{\text{lateral}} = \pi r \cdot \text{generatriz}$$

El volumen de un cono es la tercera parte del producto del área de la base y la altura.

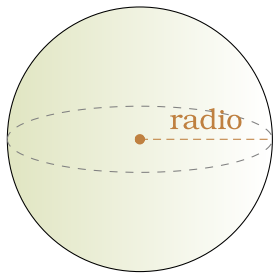
$$V = \frac{A_{\text{base}} \cdot \text{altura}}{3}$$

28. Calcula el volumen de los siguientes conos:



Esferas

Una **esfera** es una superficie curva cuyos puntos equidistan de otro llamado centro. El área de la esfera se calcula mediante la fórmula:



$$A = 4\pi r^2$$

El volumen de la esfera se calcula mediante la fórmula:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

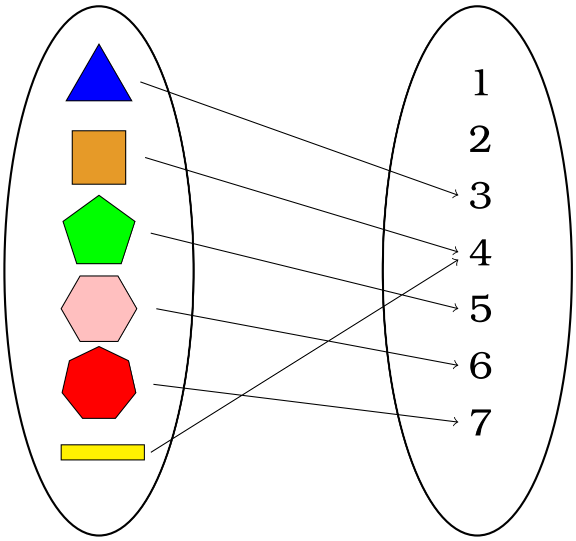
29. Calcula el área y el volumen de una esfera de radio 2 metros.

30. Calcula el área y el volumen de una esfera de diámetro 2 metros.

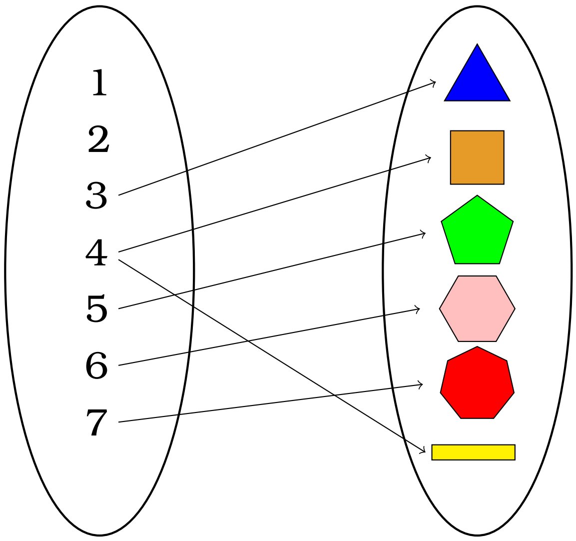
Gráficas y funciones

Correspondencia y función

Una **correspondencia** es cualquier relación entre los elementos de dos conjuntos.
Una **función** es una correspondencia tal que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un único valor del conjunto final.



La correspondencia entre figuras geométricas y su número de lados es una función, porque de cada figura sale una única flecha.



En cambio, la correspondencia entre números y las figuras con esa cantidad de lados NO es correspondencia.

1. Hemos preguntado a una serie de personas su color favorito:
   El de Manuel es el azul, el de Teresa el verde, el de Cristóbal el blanco, el de Estefanía el rojo, el de Juan el amarillo y el de Francisco el azul.
   La correspondencia entre el nombre y el color, ¿es función? Razona tu respuesta.

2. La correspondencia entre el número de DNI y la letra del mismo es una función, pero la correspondencia entre la letra del DNI y el número no lo es. ¿Por qué?

3. Los alumnos de una clase aportan varios datos personales para una estadística, y se relacionan los siguientes datos:

   a) El número de orden de clase con el número de hermanos.

   b) El DNI con el primer apellido.

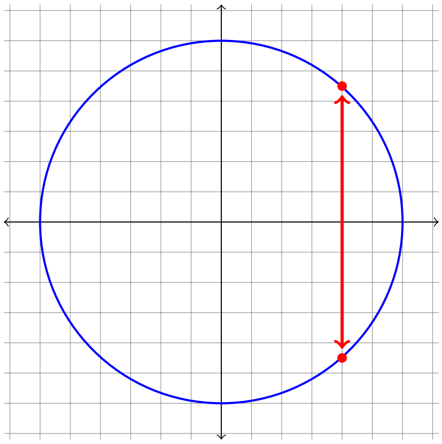
   c) El primer apellido con el número de orden de clase.

   d) El número de hermanos con el DNI.

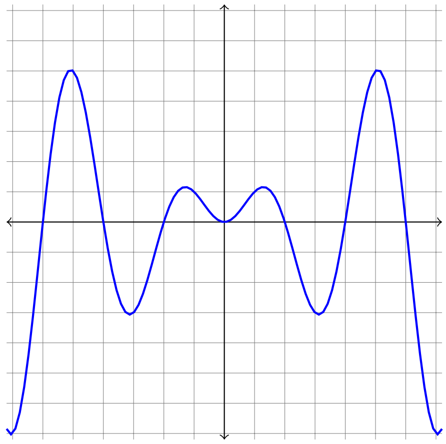
   ¿Alguna de esas correspondencias es una función?

Las **funciones numéricas** que estudiaremos en este tema relacionan dos magnitudes, por eso pueden representarse como parejas de números (x, y), es decir, como puntos en un plano cartesiano.

En este caso, para ser función debe asegurarse que para cada valor de la coordenada x existe un único valor de la coordenada y, o lo que es lo mismo, que **para cada** x **existe un único punto** en la gráfica.

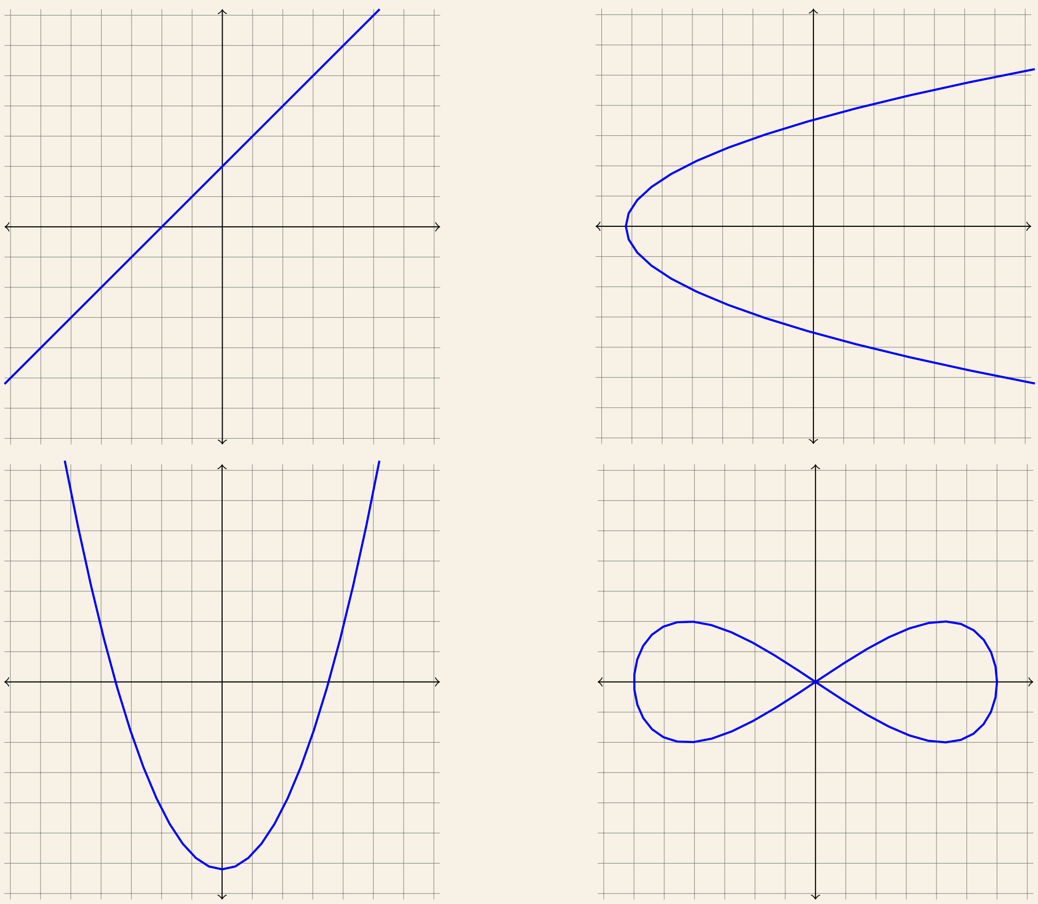


Si hay dos puntos con el mismo valor de x (es decir, están en la misma recta vertical) entonces NO es función.



Aún así, una función puede tener formas bastante complicadas y llegar a estar en ocasiones a la misma altura.

4. Indica si las siguientes gráficas corresponden a una función:



FÓRMULAS, TABLAS Y GRÁFICAS

Las funciones expresan la relación entre dos magnitudes.
Esa relación puede describirse algebraicamente (con una fórmula), a través de una serie de datos numéricos (con una tabla de datos) o bien utilizando un representación visual de los mismos (con una gráfica).

Tomemos por ejemplo la siguiente expresión:

Cada kilo de manzanas cuesta 1’90 €.

Para poder hallar la fórmula de la función debemos tener claro cuáles son las dos magnitudes involucradas (en este caso, peso y precio) y relacionarlas mediante una expresión algebraica:

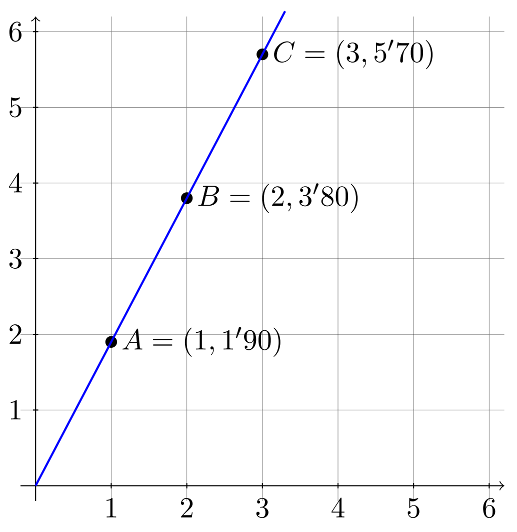
$$\begin{array}{lcl} \text{peso} & \longrightarrow & x \\ \text{precio} & \longrightarrow & y \end{array} \longrightarrow \boxed{y = 1'90 \cdot x}$$

A partir de esta función podemos rellenar una tabla de valores, sustituyendo valores de x en la fórmula para obtener valores de y:

$$\begin{array}{l} x = 1 \longrightarrow y = 1'90 \cdot 1 = 1'90 \\ x = 2 \longrightarrow y = 1'90 \cdot 2 = 3'80 \\ x = 2 \longrightarrow y = 1'90 \cdot 3 = 5'70 \end{array} \longrightarrow$$

x (kg)	1	2	3
y (€)	$1'90$	$3'80$	$5'70$

Los pares (x, y) de la tabla de valores se pueden representar en un plano, y al unirlos de la forma apropiada nos dará una gráfica que describe nuestra función:



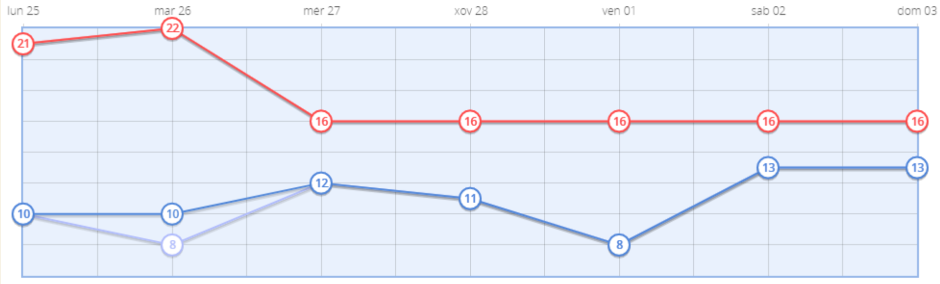
5. Dos magnitudes están relacionadas mediante la fórmula $y = 3x - 4$.

   a) Construye la tabla de valores correspondiente.

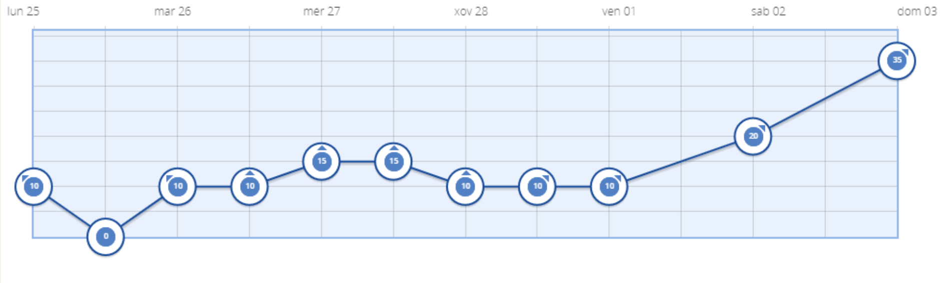
   b) Representa la gráfica en un eje cartesiano.

6. Construye la tabla de valores correspondiente a las siguiente gráficas, extraídas de la web de AEMET:

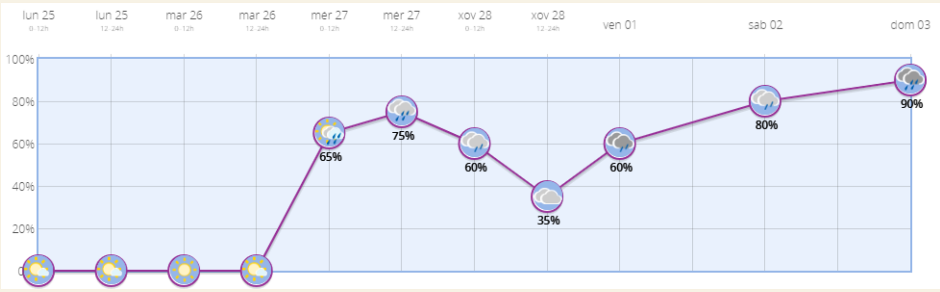
   a) La gráfica roja representa temperaturas máximas, la gráfica azul representa temperaturas mínimas:

   b) Gráfica que representa la velocidad del viento:

   c) Gráfica que representa la probabilidad de precipitaciones:

7. Construye la tabla de valores y representa la gráfica de las siguientes funciones:

   a) $y = x$
   b) $y = -x$
   c) $y = x + 1$
   d) $y = x - 1$
   e) $y = 2x + 3$
   f) $y = 3x + 2$
   g) $y = -2x + 3$
   h) $y = 3x - 2$

8. La base de un rectángulo mide el doble que la altura.

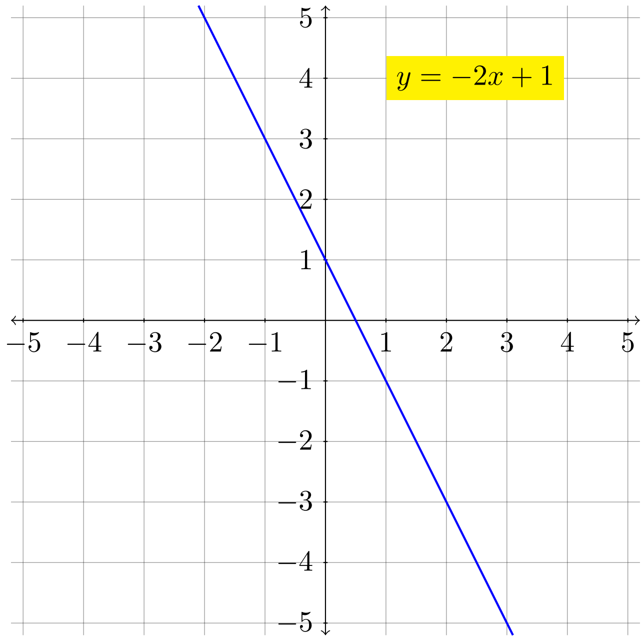
   a) Llamando x a la altura, expresa algebraicamente la base.
   b) Llamando y al perímetro del rectángulo, escribe la función que relaciona y con x.
   c) Representa en unos ejes cartesianos la gráfica que relaciona el perímetro con la altura.

9. La base de un rectángulo mide 1 cm más que la altura.

   a) Llamando x a la altura, expresa algebraicamente la base.
   b) Llamando y al área del rectángulo, escribe la función que relaciona y con x.
   c) Construye una tabla de valores para los siguientes valores de x: -4, -3,-2, -1, 0, 1, 2, 3.
   d) Representa en unos ejes cartesianos la gráfica que relaciona el área con la altura.

FUNCIÓN LINEAL

Una **función lineal** es una función de la forma $y = mx + n$ donde m y n son dos números conocidos.
Le llamamos lineal porque su gráfica se corresponde con una línea recta.



En este curso **no** estudiaremos las rectas verticales, cuya ecuación es de la forma $x = x_0$, porque no son la gráfica de ninguna función.

10. Construye la tabla de valores y representa la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = x + 3$	*c*) $y = 3x$	*e*) $y = -2$	*g*) $y = -x + 4$
b) $y = x - 3$	*d*) $y = -3x$	*f*) $y = 4x - 1$	*h*) $y = 1 - x$

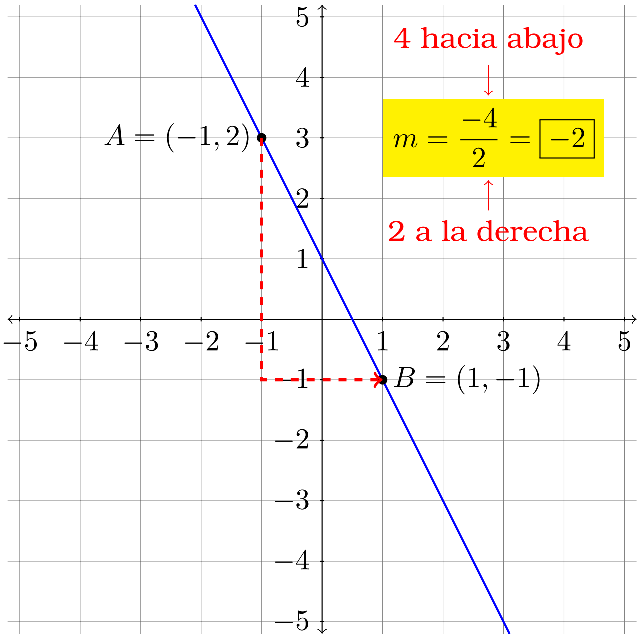
Todas las funciones lineales pueden expresarse con una fórmula como la siguiente, simplemente variando los valores de los coeficientes m y n.

$$y = m \cdot x + n$$

Pendiente y ordenada de la recta

La **pendiente** representa la inclinación de la recta y corresponde al valor m.

Para calcularla necesitaremos dos puntos de la recta, y observar el modo cuánto nos trasladamos hacia arriba por cada punto que nos trasladamos hacia la derecha.

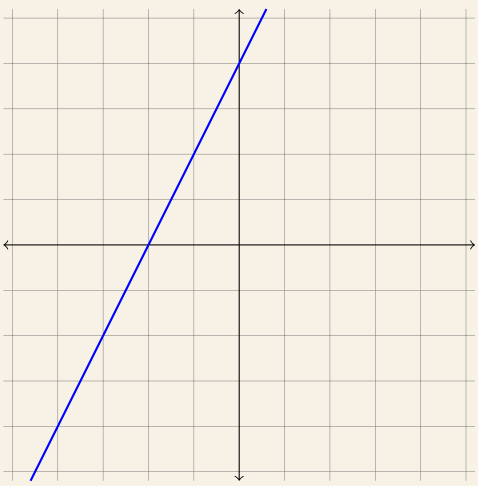


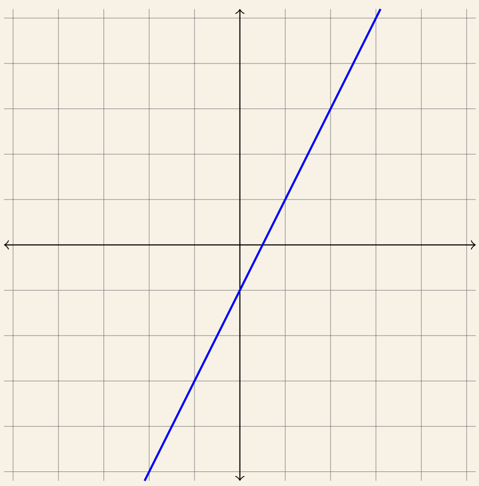
- Si la pendiente es positiva ($m > 0$) la función lineal es creciente.
- Si la pendiente es cero ($m = 0$) la función lineal es constante.
- Si la pendiente es negativa ($m < 0$) la función lineal es decreciente.

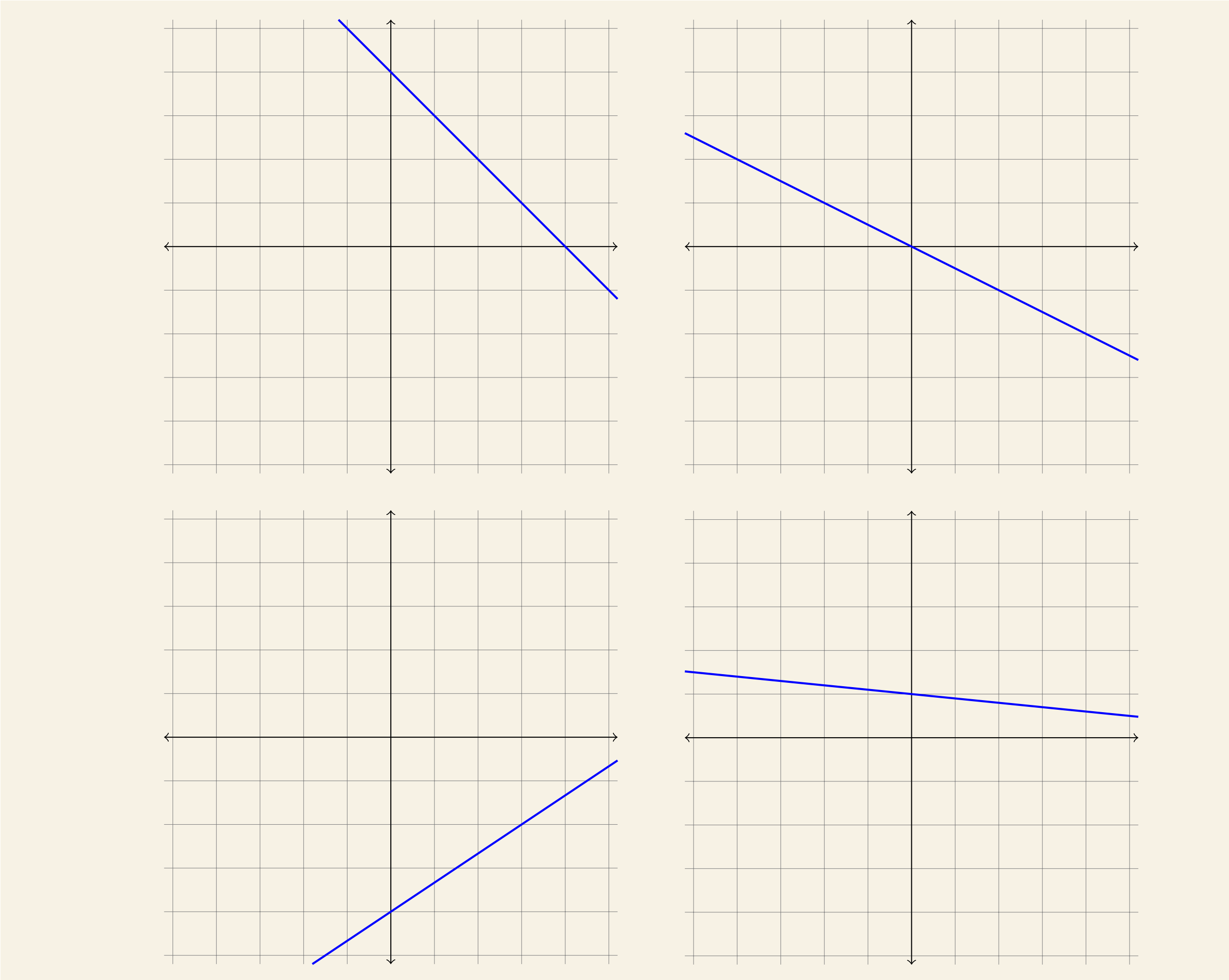
11. Indica si las siguientes funciones son crecientes, decrecientes o constantes:

a) $y = x + 3$	c) $y = 3x$	e) $y = -2$	g) $y = -x + 4$
b) $y = x - 3$	d) $y = -3x$	f) $y = 4x - 1$	h) $y = 1 - x$

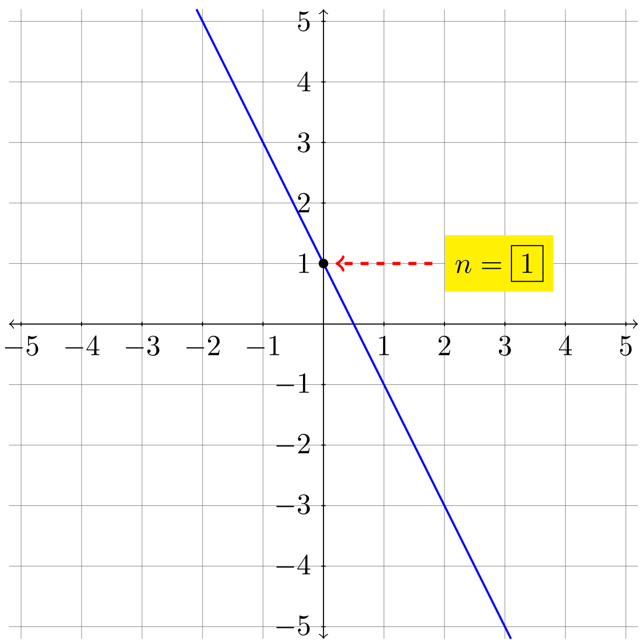
12. Observa las siguientes gráficas y deduce cuál es su pendiente:







El **término independiente** (también llamado **ordenada respecto al origen**) representa la altura a la que se encuentra la recta y corresponde al valor n.
Para hallarlo solo necesitaremos observar el punto de la recta que corta al eje vertical.



13. Halla la expresión algebraica ($y = mx + n$) de las funciones lineales del ejercicio anterior, en el cual ya habías calculado la pendiente.

14. Halla la expresión algebraica ($y = mx + n$) de las funciones lineales que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, utilizando la fórmula de obtención de la pendiente:

    a) $A = (0, 1)$, $B = (2, 3)$
    b) $C = (3, 4)$, $D = (2, 3)$
    c) $P = (-5, 3)$, $Q = (-3, 3)$
    d) $R = (1, 7)$, $S = (-1, 3)$
    e) $F = (3, 1)$, $G = (2, -1)$
    f) $X = (0, 0)$, $Y = (-5, -3)$

Estadística

La estadística nos facilita herramientas para realizar suposiciones fundamentadas sobre un grupo grande de individuos observando solo unos pocos.

- Llamamos **población** al conjunto de *todos* los individuos sobre los que se realiza el estudio estadístico. Para conocer las características de la población completa es necesario realizar un **censo**.
- Llamamos **muestra** a un subconjunto de la población en el que se recogen los datos del estudio, a partir de los cuales se pretende deducir características de toda la población.

1. Indica cúal es la población y cuál la muestra:

   a) Se va a realizar un estudio estadístico para decidir si conviene construír un nuevo polideportivo en una ciudad de 426 873 habitantes. Como preguntar a todas las personas es muy costoso, solo se preguntará a 1 258 habitantes de diferentes barrios.

   b) En un gimnasio deciden preguntar a sus 200 socios sus propuestas para actividades.

   c) Para hacer un estudio sobre los gustos musicales de los alumnos de 12 años de una ciudad, se ha escogido a 125 niños de esa edad.

2. En un estudio sobre la duración de las bombillas que fabrica una empresa, ¿crees conveniente estudiar toda la población? ¿Por qué?

Tipos de variables

La variable estadística es la característica estudiada.

- Variable **cualitativa** es la que expresa una cualidad, que no se puede cuantificar.
- Variable **cuantitativa** es la que se expresa numéricamente.

3. Indica cuáles de las siguientes variables son cuantitativas y cuales son cualitativas:

   a) Comida favorita.

   b) Profesión que te gusta.

   c) Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada.

   d) Número de alumnos de tu instituto.

   e) El color de los ojos de tus compañeros de clase.

   f) Cociente intelectual de los miembros de tu familia.

4. Da tres ejemplos de variables cualitativas y tres de variables cuantitativas.

Las variables cuantitativas, a su vez, se pueden clasificar en dos tipos:

- **discreta** si solo puede tomar valores aislados.
  Por ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ...

- **continua** si puede tomar valores dentro de un intervalo.
  Por ejemplo: todos los números decimales entre 0 y 1.

Una variable continua no puede ser medida con exactitud pues el valor observado depende de la precisión de los instrumentos de medición.
Ese hecho no debe llevarnos a confundirla con una variable discreta.

5. Indica cuáles de las siguientes variables cuantitativas son discretas y cuales son continuas:

   a) Número de manzanas vendidas cada día en una frutería.

   b) Temperaturas registradas cada hora en un observatorio.

   c) Período de duración de un automóvil.

   d) El diámetro de las ruedas de varios coches.

   e) Número de hijos de 50 familias.

   f) Censo anual de los españoles.

6. Da tres ejemplos de variables cuantitativas discretas y tres de variables cuantitativas continuas.

TABLAS DE FRECUENCIAS

En un estudio estadístico, tras recoger los datos se cuentan y se agrupan.
En una tabla de frecuencias se representan *ordenados* los valores que toma la variable estadística (x_i) con las distintas frecuencias asociadas:

- **frecuencia absoluta** (f_i): número de veces que aparece x_i en el recuento.

- **frecuencia relativa** (h_i): proporción de veces que aparece x_i en el recuento.
  Puede expresarse como fracción $\dfrac{f_i}{n}$, donde n es el total de datos, o bien como porcentaje.

- **frecuencia absoluta acumulada** (F_i): es la suma de las frecuencias absolutas de valores menores o iguales que x_i.

- **frecuencia relativa acumulada** (H_i): es la suma de las frecuencias relativas de valores menores o iguales que x_i.
  Puede expresarse como fracción o bien como porcentaje.

Preguntamos a una serie de personas de cuántos automóviles dispone su familia:

1 0 1 1 2 2 1 1 2 1 1 1 3 0 2 2 1 1 2 2

Y creamos una tabla de frecuencias:

recuento de casos

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
0	2	$\frac{2}{20} = 0'1 = 10\,\%$	2	$\frac{2}{20} = 10\,\%$
1	10	$\frac{10}{20} = 0'5 = 50\,\%$	$2 + 10 = 12$	$\frac{12}{20} = 60\,\%$
2	7	$\frac{7}{20} = 0'35 = 35\,\%$	$12 + 7 = 19$	$\frac{19}{20} = 95\,\%$
3	1	$\frac{1}{20} = 0'05 = 5\,\%$	$19 + 1 = 20$	$\frac{20}{20} = 100\,\%$
Total	20	$1 = 100\,\%$		

comprobamos los totales

vamos añadiendo valores de la columna f_i

7. Durante el mes de junio, en una ciudad se han registrado las siguientes temperaturas máximas. Elabora con ellas una tabla de frecuencias.

32	31	28	29	33	32	31	30	31	31
27	28	29	30	32	31	31	30	30	29
29	30	30	31	30	31	34	33	33	29

8. Se le pidió a un grupo de personas que indiquen su color favorito. Elabora con ellos una tabla de frecuencias.

negro	azul	amarillo	rojo	azul	azul	rojo	negro	amarillo	rojo
rojo	amarillo	amarillo	azul	rojo	negro	azul	rojo	negro	amarillo

9. Un dentista observa el número de caries en 100 niños y resume la información en la siguiente tabla. Complétala con los datos que faltan.

Nº caries	f_i	h_i
0	25	0.25
1	20	0.2
2		
3	15	0.15
4		0.05

10. En mi pueblo viven 1 100 familias. El 40 % de las familias tiene un solo hijo, el 35 % ninguno, el 11 % dos hijos y el resto más de dos.

    a) Calcula cuántas familias tienen ninguno, uno, dos o más hijos.

    b) Elabora una tabla de frecuencias con los datos obtenidos, y comprueba que los porcentajes coinciden con los del enunciado.

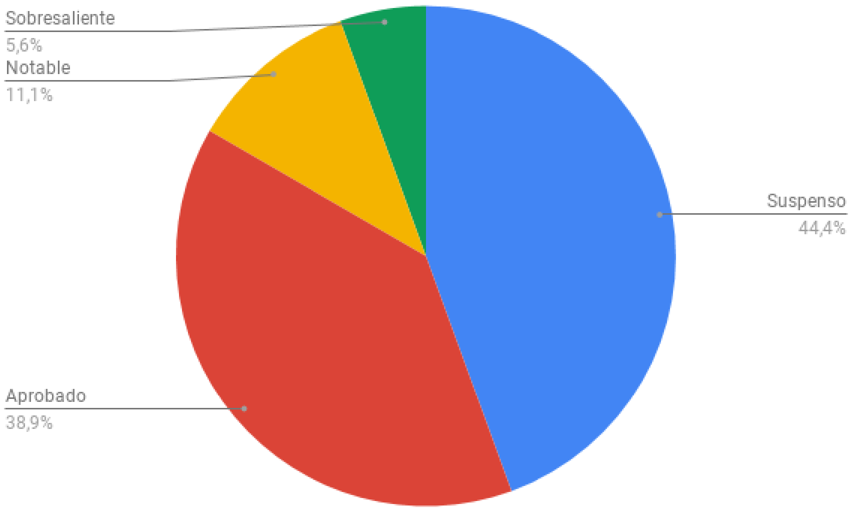
11. Hemos preguntado a un grupo de personas cuántas horas practicaban deporte a la semana. Elabora una tabla de frecuencias.

2	1	4	2	3	2	1	0	1	3
7	2	9	0	2	1	3	3	3	2
2	3	3	3	3	3	4	3	3	2

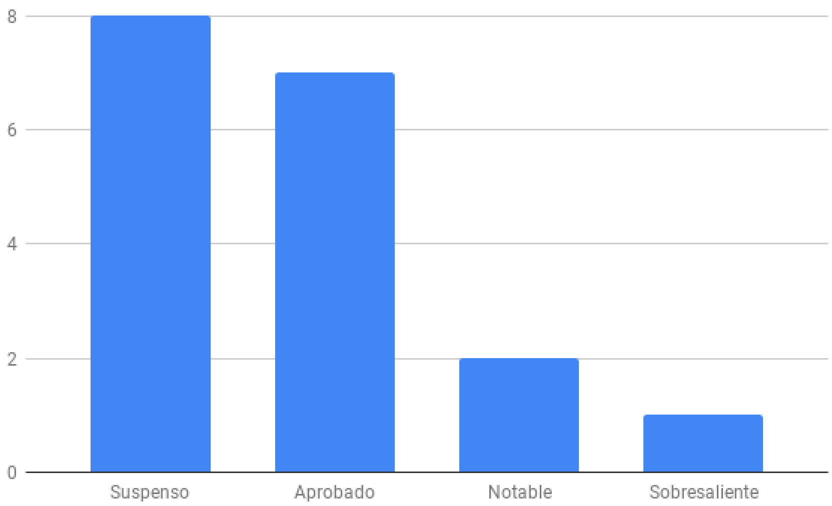
Gráficos estadísticos

Para presentar de modo visual los datos estadístico podemos apoyarnos en distintos tipos de gráficos:

- Para representar variables cualitativas frecuentemente se utiliza un **gráficos de sectores circulares**, en el que a cada valor se le asigna un sector de tamaño proporcional a su frecuencia.



- Para representar variables cualitativas y cuantitativas discretas se puede utilizar un **diagrama de barras** en el que a cada valor se le asigna una barra de tamaño proporcional a su frecuencia.



12. Crea gráficos estadísticos adecuados para las tablas de frecuencias de los ejercicios del apartado anterior.

Parámetros de posición

Los parámetros de posición nos permiten obtener información simplificada de una variable estadística.

Moda

La **moda** (M) es el valor más frecuente de la variable.

Ten en cuenta que algunas variables pueden tener más de una moda.

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

La moda de estos datos es $M = 5$, porque es el valor que más veces se repite.

Media

La **media aritmética simple** ($\overline{x}$) es el resultado de sumar todos los valores posibles y dividirlo entre el número de datos.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

En total tenemos 10 datos, así que los sumamos todos y dividimos entre 10.

$$\overline{x} = \frac{4 + 4 + 3'5 + 5 + 4'5 + 3 + 5 + 6 + 3'5 + 5}{10} = 4'35$$

Existen otro tipo de medias, como por ejemplo la **media ponderada** que se utiliza para calcular las cualificaciones del alumnado en una materia.

Mediana

La **mediana** (Me) es el valor central de la variable, obtenida tras ordenar todos los valores de menor a mayor.

- Si los datos son impares es sencillo, pues al ordenarlos de menor a mayor es evidente cuál es el valor central.
- Si los datos son pares habrá dos valores centrales, así que hallamos la media aritmética simple de ambos.

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

Antes de nada, tenemos que ordenar los datos de menor a mayor.

3 3'5 3'5 4 **4 4'5** 5 5 5 6

Como en el centro hay dos números, les hacemos la media aritmética:

$$\overline{Me} = \frac{4 + 4'5}{2} = 4'25$$

13. Las alturas de los miembros de la familia son: 1'72, 1'85, 1'65, 1'65 y 1'58.
    Calcula la moda, la media y la mediana.
14. Mis notas de clase son: 4, 4'5, 5, 4, 5'5, 4, 6, 4, 5 y 6'5.
    Calcula la moda, la media y la mediana.
15. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la moda, la media y la mediana.

PROBABILIDAD

Si al realizar un experimento conocemos de antemano el resultado, decimos que es un **experimento determinista**.

En cambio, en un **experimento aleatorio** no podemos predecir el resultado que se obtendrá al realizarlo, es decir, depende del azar. Para estudiarlos necesitaremos el **cálculo de probabilidades**.

1. Indica si estos experimentos son aleatorios.

   a) Lanzar una moneda y anotar el resultado.

   b) Determinar la hora a la que termina la clase.

   c) Medir la longitud de una circunferencia de la que conocemos el radio.

   d) Lanzar un dardo a una diana y observar en qué número cae.

   e) Abrir un libro y anotar el número de página.

   f) Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo del que conocemos sus catetos.

A cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio se le llama **suceso elemental**.

2. Indica cuántos sucesos elementales hay en los siguientes experimentos aleatorios:

   a) Lanzar una moneda.

   b) Landar un dado.

   c) Sacar una carta de una baraja española, que tiene cartas del 1 al 7 y tres figuras en cada uno de los 4 palos.

   d) Sacar una carta de una baraja española, que tiene cartas del 1 al 12 en cada uno de los 4 palos.

   e) Sacar una carta de la baraja francesa, que tiene cartas del 1 al 10 y tres figuras en cada uno de los 4 palos, más dos comodines.

El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los sucesos elementales.
Lo representaremos con la letra E.

3. Escribe el espacio muestras del los siguientes experimentos aleatorios:

   a) Lanzar una moneda.

   b) Landar un dado.

   c) Lanzar dos monedas.

   d) Lanzar dos dados.

Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral, es decir, un conjunto formado por sucesos elementales.

Un suceso puede estar formado por un solo suceso elemental, o por varios. Incluso todos. ¡O ninguno!

4. Describe los siguientes sucesos del experimento lanzar dos monedas:

   a) No sale ninguna cara.
   b) Sale una cara.
   c) Sale al menos una cara.
   d) Sale al menos una cruz.

5. Describe los siguientes sucesos del experimento lanzar dos dados:

   a) Suman 2.
   b) Suman 4.
   c) Suman 6.
   d) Suman 10.
   e) Suman 12.
   f) Suman 15.

Probabilidad de un suceso

La **probabilidad** de un suceso es la mayor o menor certeza de que llegue a ocurrir.
Se expresa como un número comprendido entre 0 (0 %, un suceso imposible) y 1 (100 %, un suceso seguro).

No confundas los términos posible/imposible con probable/improbable.

6. Imagina que ahora, repentinamente, ocurriesen los siguientes hechos.
   ¿Son posibles o imposibles? ¿Probables o improbables?

   a) Alguien peta en nuestra puerta.
   b) El Rey Felipe VI peta en nuestra puerta.
   c) El Rey Felipe IV peta en nuestra puerta.
   d) La profesora empieza a cantar una copla.
   e) La profesora se convierte en un reptil de 4 m de altura.
   f) El cristal de la ventana se rompe.
   g) La pared se rompe bajos los puños de Hulk.

Regla de Laplace

La probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de resultados favorables al suceso y el número total de resultados posibles.

Regla de Laplace

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables al suceso A}}{\text{nº de casos posibles}}$$

Si queremos calcular la probabilidad de sumar 8 puntos al lanzar dos dados, debemos conocer el número de elementos del espacio muestral y contar la cantidad de sucesos que suman 8:

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

$$P(\text{sumar 8 puntos}) = \frac{5}{36} \approx 13'89\,\%$$

En cambio, si queremos calcular la probabilidad de que sumen *al menos* 8 puntos:

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

$$P(\text{sumar al menos 8 puntos}) = \frac{15}{36} \approx 41'67\,\%$$

7. Si tiramos una moneda:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar cara?

   b) ¿Y de sacar cruz?

8. Lanzamos dos dados y sumamos los puntos obtenidos, como en el ejemplo. Calcula la probabilidad de que sumen:

   a) Dos puntos.

   b) Más de dos puntos.

   c) Siete puntos.

   d) Distinto de siete puntos.

   e) Más de 12 puntos.

   f) Menos de 12 puntos.

9. En una baraja española de 40 cartas:

   a) ¿Qué probabilidad hay de sacar el rey de copas?

   b) ¿Y de sacar un rey, del palo que sea?

   c) ¿Y de sacar una carta cualquiera de copas?

10. Para conseguir dinero para un viaje de fin de curso se ha organizado un sorteo. Se venderán 200 papeletas y solo habrá un número ganador.

    a) Si compro todas las papeletas, ¿qué probabilidad tengo de ganar el sorteo?

    b) ¿Y si no compro ninguna?

    c) ¿Qué probabilidad tengo si compro simplemente una?

    d) ¿Y si compro 100 papeletas?

11. Tengo una caja de chinchetas de colores. Hay 12 de color azul, 15 de color verde, 8 de color rojo y 10 de color amarillo. Calcula las probabilidades de que una chincheta extraída al azar sea:

    a) De color rojo.

    b) De color blanco.

    c) De color verde o azul.

    d) No amarillo.

12. Considera el experimento que consiste en sacar una bola de una bolsa que contiene 5 bolas azules, 7 rojas y 3 verdes. Calcula la probabilidad de estos sucesos:

    a) Sacar una bola verde.

    b) Sacar una bola verde o roja.

    c) Sacar una bola que no sea verde.

    d) Sacar una bola negra.