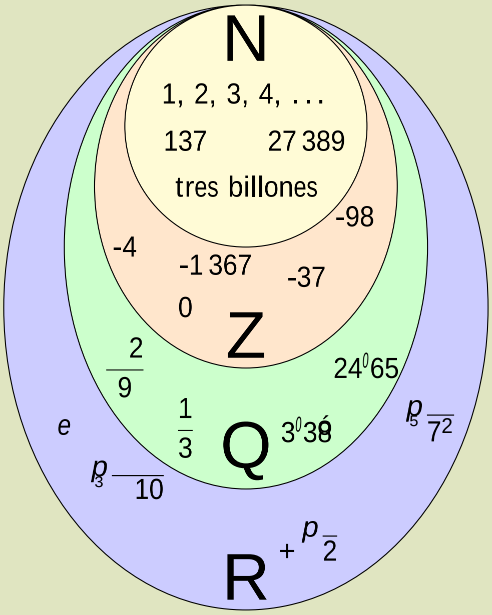
MATEMÁTICAS

2

Índice

REPASO

Conjuntos numéricos



Estamos ya familiarizados con distintos números, y a lo largo de este curso seguiremos trabajando con ellos y profundizando en nuestros conocimientos.

Antes de empezar con el contenido de este curso haremos un breve respaso de los conceptos de **divisibilidad** de **números naturales** (N) trabajados el curso pasado, ya que es una herramienta que necesitamos manejar con soltura.

En el primer tema empezaremos operando con **números enteros** (Z), recordando como afecta el signo a las distintas operaciones.

En el segundo tema introduciremos finalmente los **números racionales** (Q), tanto en forma fraccional como en forma decimal.

Y finalmente aproximaremos **números reales** (R) por decimales más manejables.

Divisibilidad de números naturales

Llamamos **múltiplo** de un número a aquel que obtenemos de multiplicarlo por otro.
Los múltiplos son, por lo tanto, *números más grandes*.

Llamamos **divisor** de un número a aquel que puede dividirlo exactamente.
Los divisores son, por lo tanto, *números más pequeños*.

Múltiplo y divisor son dos términos relacionados: Si 18 es múltiplo de 6, entonces 6 es divisor de 18.
¡Por eso es importante no confundirlos!

Números primos

Llamamos **número primo** a aquel que solo puede dividirse entre 1 y entre si mismo.

Criba de Eratóstenes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Criterios de divisibilidad

Número	Criterio
2	Es un número par.
3	La suma de sus cifras es múltiplo de 3.
5	Su última cifra es 5 o 0.
11	La diferencia entre la suma de las cifras en posición par y la de las cifras en posición impar es 0 o múltiplo de 11.

Descomposición en factores primos

Para factorizar un número debemos dividirlo sucesivamente entre todos los números primos que sea posible.

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$\boxed{240 = 2^3\ 3\ 5}$

2250	2
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

$\boxed{2250 = 2\ 3^2\ 5^3}$

7007	7
1001	7
143	11
13	13
1	

$\boxed{7007 = 7^2\ 11\ 13}$

Máximo común divisor

El **m.c.d.** es el mayor de todos los divisores comunes de dos o más números.
Se halla tomando solo los factores comunes, elevados al menor exponente.

Mínimo común múltiplo

El **m.c.m.** es el menor de todos los múltiplos comunes de dos o más números.
Se halla tomando todos los factores (comunes y no comunes), elevados al mayor exponente.

- Utilizamos el m.c.d. cuando buscamos un número que tiene algo en común con todos los datos, pero es *menor* que ellos.
- Utilizamos el m.c.m. cuando buscamos un número que tiene algo en común con todos los datos, pero es *mayor* que ellos.

Números enteros

$Z = f \quad 3; \quad 2; \quad 1;0;1;2;3:::g$

Valor absoluto y opuesto

El **valor absoluto** de un número entero es el mismo número sin signo.
El **opuesto** de un número entero es el mismo número pero cambiando de signo.

1. Halla el valor absoluto y el opuesto de los siguientes números:

   a) 4
   b) -4
   c) 5
   d) -7
   e) 2
   f) 12
   g) -3
   h) -12
   i) 0
   j) 125
   k) 15
   l) -217

Operaciones con números enteros

Suma

Para **sumar dos enteros negativos**, sumamos su valor absoluto y al resultado le ponemos signo negativo.

-4	-7	-9	-16
-2	-4	-6	-27
-6	-11	-15	-43

2. Suma tú ahora los siguientes números negativos:

   a) (4) + (8)
   b) (3) + (2)
   c) (5) + (2)
   d) (4) + (1)
   e) (6) + (8)
   f) (5) + (9)
   g) (3) + (8)
   h) (4) + (6)
   i) (9) + (2)
   j) (12) + (3)
   k) (9) + (18)
   l) (15) + (9)
   m) (3) + (14)
   n) (15) + (2)
   ñ) (7) + (16)
   o) (1) + (19)
   p) (18) + (4)
   q) (11) + (5)
   r) (19) + (17)
   s) (18) + (12)
   t) (14) + (11)
   u) (15) + (16)
   v) (17) + (11)
   w) (12) + (11)
   x) (32) + (27)
   y) (54) + (49)
   z) (26) + (51)

Para **sumar dos enteros de distinto signo**, restamos su valor absoluto y al resultado le ponemos el signo del mayor en absoluto.

¿4+(-2)?	¿(-4)+7?	¿6+(-9)?	¿27+(-16)?
4	7	-9	27
-2	-4	6	-16
2	3	-3	9

3. Suma tú ahora los siguientes números enteros:

a) (7) + 5
b) 8 + (2)
c) (4) + 3
d) 3 + (8)
e) (5) + 9
f) 7 + (6)
g) 8 + (5)
h) (1) + 3
i) (5) + 5
j) 4 + (8)
k) (11) + 5
l) 15 + (2)
m) (3) + 14
n) 7 + (16)
ñ) 9 + (4)
o) 16 + (8)
p) (15) + 12
q) 17 + (19)
r) (18) + 10
s) (21) + 15
t) 13 + (28)
u) (32) + 7
v) 25 + (42)
w) (31) + 50
x) 51 + (22)
y) (19) + 34
z) 42 + (25)

En el caso de **sumas combinadas** podemos sumar por un lado los números positivos y por otro los negativos, realizando finalmente una única suma de enteros de distintos signo.

4. Opera:

a) 3 + (2) + 7
b) 4 + (5) + (8)
c) 2 + (1) + 8
d) (3) + (5) + (4)
e) 15 + (25) + 7
f) (21) + 11 + (5)
g) (11) + 7 + 26
h) 14 + (25) + 29
i) 7 + (28) + (13)
j) (15) + 6 + 9
k) 12 + (15) + 7
l) (13) + 7 + 8
m) 12 + (5) + (6) + 1
n) 27 + (19) + 23 + (11)
ñ) 32 + (16) + 26 + (28)
o) (21) + 26 + 12 + (13)
p) 44 + (22) + (23) + 6
q) 19 + (9) + 28 + (8)
r) 123 + (65) + (56) + 10
s) 1000 + (500) + (200)
t) 200 + (32) + (58) + (5)
u) (15) + (95) + 10 + (25)
v) (10) + (50) + 10 + (50)
w) (33) + (55) + 44 + (121)
x) (25) + 15 + (95) + 70
y) (49) + 64 + (81) + 100
z) (100) + 200 + (300) + 400

Para **restar números enteros** se le suma al primero el opuesto del segundo.

$$4 + (\ 3) = 4 \quad 3 = 1 \qquad 12 \quad (\ 5) = 12 + 5 = 17$$
$$7 + (\ 5) = \quad 7 \quad 5 = \quad 12 \qquad 5 \quad (\ 8) = \quad 5 + 8 = 3$$

La resta no verifica las propiedades conmutativa ni asociativa.

5. Reescribe tú ahora las siguientes restas y opera:

a) 7 (6)
b) 8 (5)
c) (1) 3
d) (5) 5
e) (3) (2)
f) (4) (6)
g) (4) (1)
h) (6) (8)
i) 4 (8)
j) (11) 5
k) 15 (2)
l) (3) 14
m) (5) (2)
n) (5) (9)
ñ) 7 (16)
o) 9 (4)
p) (4) (8)
q) (9) (2)
r) (21) 15
s) 13 (28)
t) (3) (8)
u) (32) 7
v) 25 (42)
w) (31) 50
x) 51 (22)
y) (19) 34
z) 42 (25)

Para operar **sumas y restas combinadas** podemos reescribir las operaciones convenientemente para eliminar los paréntesis.

$$(\ 4) \quad 3 + 2 = (\ 4) + (\ 3) + 2 = \quad 5$$
$$7 \quad (\ 2) \quad 5 = 7 + 2 + (\ 5) = 4$$
$$(\ 11) + (\ 1) \quad (\ 16) = (\ 11) + (\ 1) + 16 = 4$$
$$21 \quad 10 + (\ 1) \quad 7 = 21 + (\ 10) + (\ 1) + (\ 7) = 3$$

6. Reescribe y opera:

a) 6 + (4) + 3
b) 7 2 (4)
c) 1 + (5) (1)
d) 2 7 (5)
e) (4) (6) + 1
f) (1) 9 + (5)
g) 3 12 + (5)
h) (3) 8 (17)
i) 19 (2) + (15)
j) (13) (17) + (4)
k) (21) (15) + 8
l) (7) (5) + 7 2
m) 5 9 + (3) 12
n) (1) 7 + (15) 4

7. Reescribe y opera:

a) (19) 21 (30) + 8
b) (16) + 13 25 + (11)
c) 12 + (4) 7 1
d) (7) 8 5 + 19
e) 4 9 (3) + 12
f) 1 (7) + 16 10
g) (16) 14 + 25 (4)
h) (15) + 7 (1) + (8)
i) 12 18 + (3) 26
j) (31) + 12 (8) 9
k) (12) + (11) + 38 (7)
l) 15 + (20) 25 + (30)
m) (100) (50) + (20) (10)

Multiplicación y división

Para **multiplicar** dos números enteros se multiplican sus valores absolutos.
Análogamente, para **dividir** dos números enteros se dividen sus valores absolutos.

- Si ambos tienen el mismo signo, el resultado es positivo.
- Si tienen signos diferentes, el resultado es negativo.

8. Opera:

a) 12 (4)
b) (9) 5
c) (7) (12)
d) (25) (27)
e) 39 : (3)
f) (121) : 11
g) (60) : (5)
h) 78 : 13
i) 7 (5) (2)
j) (4) (3) (8)
k) (5) 11 3
l) (10) 3 (1) 10
m) (60) : (2) : 5
n) (45) : (3) : (5)
ñ) (121) : 11 2
o) (4) (6) : (4)
p) (18) (10) : 4 : (3)
q) 1008 : (14) : (6) (5)

Operaciones combinadas

Las operaciones deben realizarse en el orden correcto.
Utilizaremos pasos intermedios siempre que sea necesario y procuraremos ser cuidadosos a la hora de operar con signos.

Jerarquía de operaciones

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

9. Opera:

a) 120   (16   5)   [38   (6)]

b) 5 (2)   3 (1)   5 2 + 7

c) 16   [5   (9)] : (7) + 7 [5   3 (2)]

d) 24 : (2)   3 4   6 : 2   (3) (2)

e) 40 : (2) 5   6 + 6 [101 + 53 (2)]

f) (4) 3 : 2   3 23 + 5 (3)   20

g) (5 10) (5+10) 12 : [16 15 : (1) 29]

h) 3   (5 2) + 12 : (3)   4 (6   4)

i) 3^2 (4   3 2) + 6 + 2 (24 : 4)

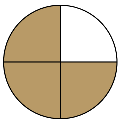
j) [48   5 (9) : 3]   6 + 4 [19   3 (7)]

k) 2   [2   (4)   12 : (3)]   (5^2 3   1)

l) 4   [2   (3   4 3)] + [4   (24 : 4)$]^2$ 4

NÚMEROS RACIONALES

Los **números racionales** son aquellos que se pueden expresar como un cociente de 2 números enteros, que representan el número de partes que se toman del total.



$$\frac{3}{4} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{ numerador} \\ \rightarrow \text{ denominador} \end{array}$$

El número que se escribe en la parte superior se llama **numerador** y el que se escribe en la inferior **denominador**.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \right\}_{a,b \in \mathbb{Z}}$$

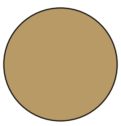
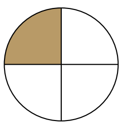
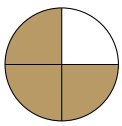
Al conjunto de esos números racionales se le llama Q porque es la inicial de la palabra *quotient* (cociente).

1. Interpreta como una fracción e indica cuál es el numerador y cuál el denominador.
   a) La pizza que hemos comprado venía cortada en ocho trozos. Nos hemos comido siete.
   b) La mitad del alumnado del instituto son chicas.
   c) 9 de cada 40 alumnos repiten 2º de la ESO.
   d) Para aprobar un examen necesitas contestar correctamente 5 de los 10 puntos.

2. Representa en tu cuadernos las siguientes figuras geométricas y colorea la fracción indicada:
   a) $\frac{1}{2}$ de un triángulo equilátero
   b) $\frac{1}{4}$ de un cuadrado
   c) $\frac{3}{8}$ de un círculo
   d) $\frac{5}{16}$ de un octógono regular

3. Calcula el valor numérico de:
   a) $\frac{3}{4}$ de 100 €
   b) $\frac{7}{10}$ de 80 alumnos
   c) $\frac{9}{11}$ de 143 personas
   d) $\frac{4}{5}$ de 365 días

Cuando una fracción se presenta como **operador** sobre otro número, dicho número ha de multiplicarse por el numerador y dividirse entre en denominador.

 $= 200\ m^2 \rightarrow$  $= \frac{200}{4} = 50\ m^2 \rightarrow$  $= 3 \cdot 50 = 150\ m^2$

4. Calcula el valor numérico, atendiendo a las unidades:
   a) $\frac{3}{4}$ de 100 €
   b) $\frac{7}{10}$ de 80 alumnos
   c) $\frac{9}{11}$ de 143 personas
   d) $\frac{4}{5}$ de 365 días

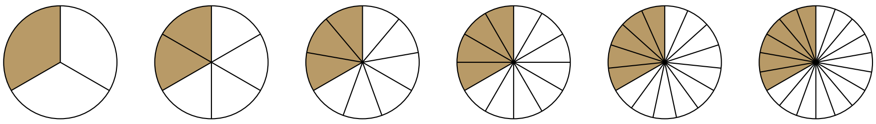
5. En mi clase somos 24. Las chicas representan $\frac{5}{8}$ del total.
   ¿Cuántas chicas hay? ¿Y cuántos chicos?

6. En un campamento hay 280 campistas, de los que $\frac{3}{7}$ son españoles. ¿Cuántos extranjeros hay?

7. Según una encuesta, de cada 100 personas con empleo solo 4 trabajan en domingo, y del resto las dos terceras partes tampoco trabajan en sábado.
   ¿Qué fracción de las personas empleadas no trabaja ni sábado ni domingo?

Fracciones equivalentes

Llamamos **fracciones equivalentes** a aquellas que representan el mismo número.



Un método para obtener fracciones equivalentes consiste en multiplicar (o dividir) numerador y denominador por el mismo número.

8. Escribe dos fracciones equivalentes a cada una de las siguientes:

   a) $\frac{3}{5}$ *b*) $\frac{8}{10}$ *c*) $\frac{7}{4}$ *d*) $\frac{2}{9}$

9. Comprueba si las siguientes fracciones son equivalentes:

   a) $\frac{2}{9}$ y $\frac{18}{81}$ *b*) $\frac{16}{25}$ y $\frac{20}{30}$ *c*) $\frac{12}{25}$ y $\frac{60}{75}$ *d*) $\frac{36}{60}$ y $\frac{21}{35}$

10. Dos atletas han recorrido $\frac{3}{12}$ y $\frac{8}{32}$ de una carrera, respectivamente. ¿Cuál es el que va delante?

Una fracción es **irreducible** cuando el numerador y el denominador son primos entre sí (es decir, su único divisor común es 1) y por lo tanto no puede simplificarse más.

11. Simplifica las siguientes fracciones:

   a) $\frac{36}{100}$ *e*) $\frac{55}{121}$ *i*) $\frac{42}{77}$ *m*) $\frac{20}{45}$
   b) $\frac{34}{51}$ *f*) $\frac{32}{128}$ *j*) $\frac{45}{27}$ *n*) $\frac{120}{104}$
   c) $\frac{81}{120}$ *g*) $\frac{84}{21}$ *k*) $\frac{48}{84}$ *ñ*) $\frac{68}{80}$
   d) $\frac{54}{80}$ *h*) $\frac{17}{68}$ *l*) $\frac{72}{32}$ *o*) $\frac{1800}{32000}$

Signo de una fracción

Los números racionales pueden ser positivos o negativos.

Recordemos que no son pares de números, sino cocientes de esos pares de números.
De dividir 1 entre 3 resulta lo mismo que de dividir 1 entre 3, que en ambos casos es el número negativo que corresponde a ese cociente.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

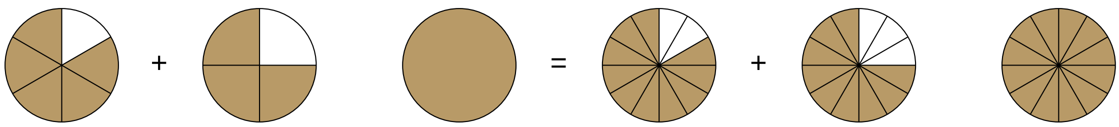
12. Simplifica las siguientes fracciones:

 a) $\frac{12}{100}$ *b*) $\frac{17}{34}$ *c*) $\frac{84}{21}$ *d*) $\frac{32}{128}$ *e*) $\frac{20}{45}$ *f*) $\frac{120}{104}$

Operaciones con fracciones

Suma y resta

Solo es posible sumar o restar aquellas fracciones que tienen el mismo denominador.
Si no lo tuviesen, procederíamos hallando fracciones equivalentes a ellas que tengan un denominador común.



$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} \quad 1 = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} \quad \frac{12}{12} = \frac{7}{12}$$

13. Opera y simplifica:

 a) $\frac{3}{12} + \frac{10}{8}$ *d*) $\frac{11}{5} \quad \frac{2}{3}$ *g*) $\frac{7}{66} \quad \frac{6}{55}$

 b) $\frac{7}{10} \quad \frac{3}{4}$ *e*) $\frac{19}{42} \quad \frac{11}{28}$ *h*) $\frac{2}{3} \quad 2 + \frac{7}{8}$

 c) $\frac{5}{12} + \frac{17}{18}$ *f*) $\frac{11}{12} + \frac{6}{25}$ *i*) $\frac{1}{6} \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

14. Opera y simplifica:

 a) $\frac{10}{11} \quad \frac{4}{7} + \frac{3}{5}$ *d*) $\frac{4}{15} + \frac{3}{5} \quad \frac{7}{3}$ *g*) $\frac{1}{6} \quad \frac{8}{3} + \frac{3}{20}$

 b) $\frac{13}{12} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{5}{24}$ *e*) $\frac{4}{7} + \frac{2}{3} \quad 5$ *h*) $1 \quad \frac{15}{24} + \frac{50}{6}$

 c) $\frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{8}$ *f*) $\frac{5}{27} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{5}{3}$ *i*) $\frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{4}{6}$

15. Opera y simplifica:

a) $\frac{42}{18} + \frac{35}{20} \quad \frac{17}{42}$

b) $\frac{5}{5} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{5} \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{7}{6}$

e) $\frac{3}{5} \quad 7 \quad \frac{9}{10} + \frac{5}{12}$

f) $\frac{7}{8} \quad \frac{6}{7} + \frac{1}{14}$

g) $1 \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

h) $\frac{13}{17} + \frac{3}{15} \quad 9 + \frac{8}{20}$

i) $23 + \frac{7}{40} \quad \frac{10}{7} \quad 14$

Multiplicación y división

El **producto** de fracciones se obtiene multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{2}{7} \quad \frac{3}{4} = \frac{2 \quad 3}{7 \quad 4} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

El **cociente** de dos fracciones es igual al producto de la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{5}{6} : \frac{9}{8} = \frac{5 \quad 8}{6 \quad 9} = \frac{40}{54} = \frac{20}{27}$$

Simplifica siempre que sea posible, los cálculos serán más fáciles.
Fíjate en si puedes simplificar un producto *antes* de operar.

16. Opera y simplifica:

a) $\frac{1}{5} \quad \frac{4}{7}$

b) $\frac{21}{8} \quad \frac{8}{7}$

c) $\frac{12}{15} \quad \frac{25}{36}$

d) $\frac{15}{20} \quad \frac{16}{75}$

e) $\frac{16}{5} \quad \frac{3}{90} \quad \frac{5}{11}$

f) $\frac{13}{42} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{24}{10}$

g) $\frac{3}{4} \quad \frac{11}{18} \quad 2$

h) $\frac{20}{9} \quad 5 \quad \frac{9}{11}$

17. Opera y simplifica:

a) $\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$

b) $\frac{1}{15} : \frac{6}{10}$

c) $\frac{12}{5} : \frac{4}{25}$

d) $\frac{7}{2} : 4$

e) $8 : \frac{7}{6}$

f) $\frac{16}{5} : 24$

g) $\frac{8}{12} : \frac{4}{24}$

h) $\frac{5}{6} : 15$

18. Opera y simplifica:

a) $\frac{3}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{6}{7}$

b) $(\ \ 4) \quad \frac{6}{15} \quad \frac{9}{12}$

c) $\frac{12}{40} \quad (\ \ 5) \quad \frac{35}{14}$

d) $(\ \ 15) : \frac{5}{6} \quad \frac{9}{8}$

e) $\frac{9}{2} \quad \frac{7}{10} : \frac{21}{10}$

f) $\frac{8}{6} \quad \frac{17}{21} \quad \frac{1}{5}$

g) $\frac{40}{5} \quad \frac{10}{11} \quad \frac{2}{9}$

h) $\frac{(\ \ 20)}{(\ \ 72)} \quad \frac{7}{9}$

19. Expresa como una única fracción:

a) La mitad de la mitad.

b) La mitad de un cuarto.

c) Un quinto de un tercio.

Operaciones combinadas

El orden de las operaciones se mantiene en todos los conjuntos numéricos.
Utilizaremos pasos intermedios siempre que sea necesario y procuraremos ser cuidadosos a la hora de operar con signos.

Jerarquía de operaciones

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

20. Opera y simplifica:

a) $\frac{1}{5} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} \quad \frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{10} : \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{5}$

d) $\frac{2}{3} \quad \frac{1}{2} \; : \quad \frac{1}{6} \quad \frac{2}{5}$

e) $\frac{23}{12} + \frac{1}{5} : \quad \frac{4}{5} + 2$

f) $\frac{7}{4} : \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{8} \quad 3$

21. Opera y simplifica:

a) $\frac{5}{6} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{9}{4} \quad \frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{1}{3}$

c) $\frac{5}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{1}{3}$

d) $\frac{5}{36} \quad \frac{7}{16} + \frac{1}{4} : \frac{3}{5}$

e) $\frac{2}{3} \quad 5 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{7}{2}$

f) $\frac{5}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{4}{5} \quad 2$

22. Opera y simplifica:

a) $\frac{7}{3} \quad \frac{4}{5} \quad 2 \quad \frac{5}{3}$

b) $\frac{8}{3} \quad 2 : \quad \frac{1}{3} \quad 1 \quad \frac{5}{2}$

c) $3 \quad \frac{4}{15} \quad \frac{7}{8} \quad 5 \quad 9$

d) $1 \quad \frac{3}{2} \quad 4 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{10}$

e) $\frac{3}{2} \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \quad 5 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{6}{5}$

f) $1 \quad \frac{3}{2} \quad 5 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$

Problemas:

23. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ se pueden llenar con una garrafa de 30 litros?

24. Para una fiesta hemos comprado 60 latas de refresco de $\frac{1}{3}$ de litro. ¿Cuántos litros había en total?

25. Dos hermanos se han repartido las canicas de un bote. El mayor se lleva $\frac{5}{8}$ del total y el menor las 66 restantes. ¿Cuántas canicas había en el bote?

26. Un frasco de perfume tiene una capacidad de $\frac{1}{20}$ litros. ¿Cuántos frascos de perfume pueden llenarse con el contenido de $\frac{3}{4}$ litros?

27. Breixo se come $\frac{2}{7}$ de un bizcocho y para la merienda $\frac{3}{5}$ de lo que le quedaba. ¿Qué fracción se ha comido? ¿Qué fracción ha sobrado?

28. De un depósito que contenía 600 litros de agua han sacado primero $\frac{1}{6}$ del total y después $\frac{3}{4}$ del total. ¿Cuántos litros quedan?

29. Compramos un televisor por 1300 e y pagamos $\frac{1}{4}$ al contado y el resto en 6 plazos. ¿Cuál será el importe de cada plazo?

30. De un depósito que estaba lleno han sacado $\frac{2}{3}$ del total y después $\frac{1}{5}$ del total. Sabiendo que aún quedan 400 litros, ¿cuál era la capacidad del depósito?

31. En una carrera de coches el trazado tiene 372 km. ¿Cuántos kilómetros faltan para meta si ya han recorrido $\frac{9}{40}$?

32. Una persona ha cosechado durante la mañana $\frac{1}{43}$ de un campo y por la tarde la mitad del resto. Si todavía le quedan 170 hectáreas, ¿cuál es la superficie total del campo?

33. Un ganadero vende $\frac{3}{4}$ del número de reses que tiene. Más tarde $\frac{3}{4}$ del resto, quedando así 16 reses en la ganadería. ¿Cuántos animales tenía?

Expresión decimal y fraccional

Todas las fracciones pueden expresarse como un número decimal.
En este curso estudiaremos números decimales racionales, pero ten en cuenta que también existen números decimales irracionales que no pueden expresarse como fracción.

Expresión decimal de una fracción

Al dividir el numerador entre el denominador de una fracción se obtiene una **expresión decimal** equivalente a la propia fracción.

$\frac{10}{2} = 5$ $\quad$ $\frac{9}{2} = 4'5$ $\quad$ $\frac{2}{9} = 0'\widehat{2}$ $\quad$ $\frac{2}{90} = 0'0\widehat{2}$

Los números racionales pueden ser enteros, decimales exactos, decimales periódicos puros o decimales periódicos mixtos, tal y como ilustra el ejemplo anterior.
Pero ten en cuenta que también existen números decimales irracionales.

34. Escribe los siguientes racionales en forma decimal, dividiendo hasta la tercera cifra decimal, y clasifícalos cuando sea posible:

a) $\frac{26}{9}$	*d*) $\frac{48}{12}$	*g*) $\frac{67}{30}$	*j*) $\frac{91}{18}$	*m*) $\frac{61}{33}$
b) $\frac{45}{12}$	*e*) $\frac{88}{25}$	*h*) $\frac{108}{72}$	*k*) $\frac{925}{7}$	*n*) $\frac{47}{30}$
c) $\frac{1}{45}$	*f*) $\frac{44}{12}$	*i*) $\frac{136}{225}$	*l*) $\frac{60}{120}$	*ñ*) $\frac{333}{128}$

Fracción generatriz

La **fracción generatriz** de un número decimal es aquella fracción <u>irreducible</u> equivalente al número.

De un decimal exacto

Basta con escribir el número sin coma decimal y dividirlo por el múltiplo de 10 adecuado.

$$4'25 = \frac{425}{100} = \frac{17}{4}$$

35. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales exactos:

a) $3'5$	*c*) $3'9$	*e*) $42'08$	*g*) $0'001$	*i*) $0'025$	*k*) $10'10$
b) $6'8$	*d*) $14'07$	*f*) $16'94$	*h*) $3'025$	*j*) $12'50$	*l*) $4'95$

De un decimal periódico

Debemos multiplicar nuestro número por dos múltiplos de 10 que nos permitan obtener sendos resultados con idénticos decimales y proceder a restarlos entre si.
De este modo se simplifica la parte periódica y se puede despejar de forma sencilla.

Veámoslo con un decimal periódico puro como $x = 2'\overline{35}$:

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 235'353535\ldots \\ x & = & 2'353535\ldots \\ \hline 99x & = & 233 \end{array}$$

Por lo tanto $x = 2'\overline{35} = \frac{233}{99}$.

36. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos puros:

a) $3'\overline{5}$	*c*) $3'\overline{9}$	*e*) $42'\overline{08}$	*g*) $0'\overline{001}$	*i*) $0'\overline{025}$	*k*) $10'\overline{10}$
b) $6'\overline{8}$	*d*) $14'\overline{07}$	*f*) $16'\overline{94}$	*h*) $3'\overline{025}$	*j*) $12'\overline{50}$	*l*) $4'\overline{9}$

Veámoslo también con un decimal periódico mixto como $x = 2'3\overset{\frown}{5}$:

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 235'555555\ldots \\ 10x & = & 23'555555\ldots \\ \hline 90x & = & 212 \end{array}$$

Por lo tanto $x = 2'3\overset{\frown}{5} = \dfrac{212}{90} = \dfrac{106}{45}$.

37. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos:

a) $0'3\overset{\frown}{5}$	*c*) $0'3\overset{\frown}{9}$	*e*) $42'0\overset{\frown}{8}$	*g*) $0'00\overset{\frown}{1}$	*i*) $3'0\overset{\frown}{25}$	*k*) $1'2\overset{\frown}{5}$
b) $0'6\overset{\frown}{8}$	*d*) $14'0\overset{\frown}{7}$	*f*) $16'9\overset{\frown}{4}$	*h*) $0'0\overset{\frown}{01}$	*j*) $3'02\overset{\frown}{5}$	*l*) $1'2\overset{\frown}{50}$

La fracción generatriz de un número periódico es equivalente a:

$$\frac{\text{todas las cifras del número - las cifras no periódicas}}{\text{tantos 9 como cifras periódicas, tantos 0 como cifras decimales no periódicas}}$$

$$33'4\overset{\frown}{92} = \frac{33492 - 334}{990} = \frac{16579}{495}$$

38. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales, aplicando directamente la fórmula:

a) $1'6$	*d*) $2'35$	*g*) $10'\overset{\frown}{42}$	*j*) $24'\overset{\frown}{6}$	*m*) $3'\overset{\frown}{2}$	*o*) $5'3\overset{\frown}{5}$
b) $7'67$	*e*) $10'225$	*h*) $4'\overset{\frown}{9}$	*k*) $2'0\overset{\frown}{25}$	*n*) $3'\overset{\frown}{20}$	*p*) $0'1\overset{\frown}{9}$
c) $4'25$	*f*) $7'\overset{\frown}{6}$	*i*) $15'\overset{\frown}{15}$	*l*) $15'1\overset{\frown}{3}$	*ñ*) $12'1\overset{\frown}{7}$	*q*) $3'0\overset{\frown}{01}$

39. Realiza las operaciones siguientes expresando los números en forma de fracción:

a) $7'2\overset{\frown}{3} + 0'\overset{\frown}{6}$ *b*) $4'\overset{\frown}{72} : 0'\overset{\frown}{22}$ *c*) $2'\overset{\frown}{15} - 2'\overset{\frown}{1}$ *d*) $0'75 + 0'\overset{\frown}{25} - 1'\overset{\frown}{6}$

APROXIMACIÓN Y ERRORES

Las **cifras significativas** de una medida son las que aportan alguna información.

- Aproximación por **truncamiento**: Se ignoran las cifras no significativas.
- Aproximación por **redondeo**: Se observa la primera cifra no significativa.

  Si es menor que 5, se actúa igual que por truncamiento.

  Si está entre 5 y 9, se suma 1 a la última cifra significativa.

Valor exacto	Truncamiento a centésimas
$2'362$	$2'36$
$2'368$	$2'36$
$2'\widehat{3}$	$2'33$
$2'\widehat{6}$	$2'66$

Valor exacto	Redondeo a centésimas
$2'362$	$2'36$
$2'368$	$2'37$
$2'\widehat{3}$	$2'33$
$2'\widehat{6}$	$2'67$

40. Aproxima los siguientes números a las unidades de millar, por truncamiento y por redondeo:

    a) 3 125 345 *b*) 1 198 542 *c*) 15 738 928 *d*) 695 258

41. Aproxima los siguientes números a las décimas, por truncamiento y por redondeo:

    a) $2'9876$ *b*) $13'9295$ *c*) $12'\widehat{4}$ *d*) $7'2\widehat{6}$ *e*) $4'4\widehat{15}$ *f*) $6'\widehat{3}$

42. Aproxima los siguientes números a las milésimas por truncamiento y por redondeo:

    a) $2'9876$ *b*) $13'9295$ *c*) $12'\widehat{4}$ *d*) $7'2\widehat{6}$ *e*) $4'4\widehat{15}$ *f*) $6'\widehat{3}$

43. Aproxima los siguientes números a las décimas, por truncamiento y por redondeo:

    a) $\frac{40}{3}$ *b*) $\frac{7}{18}$ *c*) $\frac{5}{6}$ *d*) $\frac{5}{9}$ *e*) $\sqrt{7}$ *f*)

Al aproximar asumimos un cierto margen de **error**.
También hay errores que no derivan del cálculo sino de la medición, pues ni siquiera las herramientas más precisas son totalmente exactas.

Error absoluto

El **error absoluto** es la desviación con respecto al valor exacto, medido en valor absoluto (es decir, sin importar si el error es por exceso o por defecto).

$$e_a = |\text{valor exacto} - \text{valor aproximado}|$$

Cuando esa resta involucre fracciones, deberemos emplear la fracción generatriz del valor aproximado.

44. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las unidades de millar por truncamiento cada uno de los siguientes números.

    a) 4 345 734 *b*) 8 945 354 *c*) 22 873 996 *d*) 423 298

45. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las unidades de millar por redondeo cada uno de los siguientes números.

a) 4 345 734 *b*) 8 945 354 *c*) 22 873 996 *d*) 423 298

46. **Razona** cuál de los dos métodos de aproximación te parece más útil.

47. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las décimas por redondeo cada uno de los siguientes números.

a) $4'345$ *b*) $27'5695$ *c*) $\frac{5}{6}$ *d*) $\frac{5}{9}$ *e*) $\frac{1}{30}$

48. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las milésimas por redondeo cada uno de los siguientes números, utilizando fracciones generatrices cuando sea conveniente.

a) $4'3\overline{2}$ *b*) $27'5\overline{6}$ *c*) $12'0\overline{2}$ *d*) $21'33\overline{4}$ *e*) $1'1\overline{6}$

Error relativo

No es lo mismo cometer un error 1 kg cuando pesas la harina de una tarta que cuando pesas un camión.
Por eso necesitamos una medida relativa que nos indique un error porcentual.

$$e_r = \frac{e_a}{\text{valor exacto}}$$

49. Calcula el error relativo cometido al redondear a las unidades de millar cada uno de los siguientes números.

a) 12 125 265 *b*) 3 729 613 *c*) 51 644 795 *d*) 234 512

50. Calcula el error relativo cometido al redondear a las décimas cada uno de los siguientes números.

a) $7'9834$ *b*) $25'4219$ *c*) $\frac{7}{6}$ *d*) $\frac{8}{9}$ *e*) $\frac{16}{3}$

51. Calcula el error relativo cometido al redondear a las milésimas cada uno de los siguientes números, utilizando fracciones generatrices cuando sea conveniente.

a) $3'\overline{6}$ *b*) $15'8\overline{4}$ *c*) $7'5\overline{4}$ *d*) $9'4\overline{5}$ *e*) $1'21\overline{5}$

52. *a*) Busca el número de habitantes de tu localidad.
b) Redondea el valor hallado a las unidades de millar y exprésalo en una frase de forma aproximada.
c) Calcula el error absoluto y el error relativo cometidos.

53. *a*) Busca el número de habitantes de Madrid.

b) Redondea el valor hallado a las unidades de millar y exprésalo en una frase de forma aproximada.

c) Calcula el error absoluto y el error relativo cometidos.

Potencias y raíces

Potencias

Una **potencia** de exponente natural es una forma abreviada de escribir el producto de factores iguales.
Ese factor se llama **base** y el número de veces que la base se multiplica por si misma se llama **exponente** .

$$7^5 = 7\ \ 7\ \ 7\ \ 7\ \ 7$$
$$(\ \ 10)^3 = (\ \ 10)\ \ (\ \ 10)\ \ (\ \ 10)$$

1. Expresa los siguientes productos como potencias, indica cuál es la base y cuál el exponente:

   a) $5\ \ 5\ \ 5\ \ 5\ \ 5$

   b) $7\ \ 7\ \ 7\ \ 7\ \ 7\ \ 7\ \ 7$

   c) $(\ \ 3)\ \ (\ \ 3)\ \ (\ \ 3)\ \ (\ \ 3)$

   d) $\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}$

Llamamos **cuadrados perfectos** a aquellos valores que corresponden a una potencia de base natural y exponente 2.

Algunos cuadrados perfectos:

$1 = 1^2$	$36 = 6^2$	$121 = 11^2$	$256 = 16^2$	$100 = 10^2$	$3600 = 60^2$
$4 = 2^2$	$49 = 7^2$	$144 = 12^2$	$289 = 17^2$	$400 = 20^2$	$4900 = 70^2$
$9 = 3^2$	$64 = 8^2$	$169 = 13^2$	$324 = 18^2$	$900 = 30^2$	$6400 = 80^2$
$16 = 4^2$	$81 = 9^2$	$196 = 14^2$	$361 = 19^2$	$1600 = 40^2$	$8100 = 90^2$
$25 = 5^2$	$100 = 10^2$	$225 = 15^2$	$400 = 20^2$	$2500 = 50^2$	$10000 = 100^2$

Potencias de base entera

Cuando la potencia tiene base positiva, el resultado es siempre positivo.
Cuando la potencia tiene base negativa:

- si el exponente es par, el resultado es positivo.
- si el exponente es impar, el resultado es negativo.

Fíjate muy bien siempre en los signos negativos.
No es lo mismo que el signo forme parte de la base de la potencia que que esté fuera de ella.

$$(\ \ 3)^2 = (\ \ 3)\ \ (\ \ 3) = 9$$
$$3^2 = \ \ 3\ \ 3 = 9$$

2. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) 7^3	*d*) 10^8	*g*) 5^4	*j*) 3^5	*m*) 2^6	*o*) 16^2
b) $(\ \ 7)^3$	*e*) $(\ \ 11)^2$	*h*) $\ \ 8^3$	*k*) $(\ \ 5)^4$	*n*) $(\ \ 2)^6$	*p*) $(\ \ 1)^{99}$
c) $\ \ 4^4$	*f*) $\ \ 6^2$	*i*) $(\ \ 3)^8$	*l*) $\ \ 13^4$	*ñ*) $\ \ 2^6$	*q*) $\ \ 1^9 9$

3. Escribe las cinco primeras potencias de base 10.

4. Si un número acaba en 1, ¿en qué cifra acaba su cuadrado? ¿Y si acaba en 2? Encuentra todos los valores que puede tener la última cifra de un cuadrado perfecto.

5. Al calcular una potencia de exponente 4 obtenemos como resultado 256. ¿Cuál es el valor de la base?

6. Hemos colgado un video en Youtube que se ha convertido en viral y el número de visitas se duplica cada hora.

   a) Si en el momento de colgarlo tiene solo 1 visita, expresa con una potencia las visitas que tendrá tras un día entero.

   b) Usa tu calculadora para obtener el número de visitas.

Operaciones con potencias de la misma base

Para **multiplicar** potencias de la misma base basta con sumar sus exponentes.

$$7^2 \ \ 7^3 = (7 \ \ 7) \ \ (7 \ \ 7 \ \ 7) = 7^5$$

7. Escribe como una única potencia:

a) $3^{12} \ \ 3^7$	*c*) $12^{15} \ \ 12^3$	*e*) $5^3 \ \ 5^5$	*g*) $(\ \ 6)^9 \ \ (\ \ 6)^{12}$
b) $(\ \ 7)^6 \ \ (\ \ 7)^2$	*d*) $(\ \ 10)^5 \ \ (\ \ 10)^2$	*f*) $(\ \ 9)^5 \ \ (\ \ 9)^{32}$	*h*) $15^{28} \ \ 15^5$

Para **dividir** potencias de la misma base basta con restar sus exponentes.

$$3^9 : 3^4 = \frac{3 \ \ 3 \ \ 3 \ \ 3 \ \ 3 \ \ 3 \ \ 3 \ \ 3 \ \ 3}{3 \ \ 3 \ \ 3 \ \ 3} = 3^5$$

8. Escribe como una única potencia:

a) $3^8 : 3^4$	*c*) $12^{15} : 12^9$	*e*) $(\ \ 5)^7 : (\ \ 5)^5$	*g*) $10^8 : 10^5$
b) $(\ \ 7)^6 : (\ \ 7)$	*d*) $10^5 : 10^4$	*f*) $(\ \ 6)^{15} : (\ \ 6)^{12}$	*h*) $(\ \ 4)^{30} : (\ \ 4)^{16}$

Para calcular la **potencia de una potencia** basta con multiplicar sus exponentes.

$$(10^5)^3 = 10^5 \ \ 10^5 \ \ 10^5 = 10^{15}$$

9. Escribe como una única potencia:

a) $(3^{12})^2$ c) $(12^3)^9$ e) $(2^6)^2$ g) $(9^3)^2$

b) $((\;\;5)^7)^3$ d) $(\;\;2^4)^3$ f) $\;\;(10^6)^2$ h) $(6^5)^3$

10. Escribe como una única potencia:

a) $3^2\;\;3^5\;\;3^4$ d) $(\;\;10)^5\;\;(\;\;10)^2 : (\;\;10)^4$ g) $6^9\;\;(6^{15} : 6^{12})^2$

b) $7^6 : 7^2 : 7$ e) $(5^2)^3 : 5^5$ h) $(10^8 : 10^5)^3\;\;10^7$

c) $12^{15}\;\;12^3 : 12^9$ f) $9^5\;\;(9^2\;\;9^3)^2$ i) $(4^5\;\;4^6)^2 : (4^2\;\;4^4)^3$

No hay ninguna regla para la suma ni para la resta de potencias.

Operaciones con potencias del mismo exponente

La **potencia de un producto** es igual al producto de potencias.

$$(12\;\;5)^3 = 12^3\;\;5^3$$

La **potencia de un cociente** es igual al cociente de potencias.

$$(15 : 3)^4 = 15^4 : 3^4$$

11. Escribe como una única potencia:

a) $7^4\;\;2^4\;\;3^4$ d) $(\;\;15)^3 : 5^3$ g) $8^4\;\;3^4 : 6^4$

b) $2^2\;\;3^2\;\;(\;\;1)^2$ e) $9^7\;\;8^7 : 6^7$ h) $9^6 : (\;\;15)^6\;\;25^6$

c) $4^6\;\;6^6 : 8^6$ f) $(\;\;20)^5 : 10^5\;\;(\;\;1)^5$ i) $36^{\;\;4}\;\;(\;\;2)^{\;\;4} : 24^{\;\;4}$

12. Factoriza los números compuestos y escribe como una única potencia:

a) $9^8 : 3^9$ c) $(8^3)^2\;\;16^2$ e) $25^4 : 125\;\;5^6$

b) $8^3\;\;2^5$ d) $3^5\;\;9^6 : 27^2$ f) $(\;\;4)^7 : (\;\;2)^5$

Potencias de exponente entero

Toda potencia de **exponente 0** procede de una división de potencias iguales, por eso siempre tiene valor 1.

$$12^{0} = \frac{12^{5}}{12^{5}} = 1$$

Toda potencia de **exponente negativo** es igual a la inversa de la potencia con exponente positivo.

$$\frac{1}{3^{2}} = \frac{3^{0}}{3^{2}} = 3^{\ 2}$$

13. Calcula:

    a) $4^{\ 3}$ c) $17^{\ 1}$ e) $2^{\ 6}$ g) $15^{\ 2}$ i) $3^{\ 4}$ k) $2^{\ 8}$

    b) $9^{\ 2}$ d) $(\ 3)^{\ 2}$ f) $(\ 1)^{\ 19}$ h) $(\ 2)^{\ 8}$ j) $1^{\ 13}$ l) $(\ 4)^{\ 3}$

14. Calcula:

    a) $10^{\ 1}$ b) $10^{\ 2}$ c) $10^{\ 3}$ d) $10^{\ 6}$ e) 10^{0} f) $10^{\ 12}$

15. Expresa como una única potencia:

    a) $7^{\ 3}\ \ 7^{0}\ \ 7^{5}$

    b) $5^{\ 6} : 5^{\ 4}$

    c) $12^{\ 7} : 12^{5}\ \ 12^{20}$

    d) $\frac{1}{7^{2}}\ \ 7^{5} : 7^{\ 6}$

    e) $3^{9}\ \ 3^{\ 7} : (3^{2}\ \ 3^{\ 3})^{2}$

    f) $2^{\ 6} : 2^{\ 10}\ \ 2$

    g) $(4^{3} : 4^{\ 3})^{\ 4}\ \ (4^{\ 3}\ \ 4^{\ 1})^{5}$

    h) $(6^{4}\ \ 6^{\ 1})^{\ 2}\ \ (6^{2})^{3} : 6$

    i) $((\ 3)^{4}\ \ (\ 3)^{2})^{3} : (3^{4}\ \ 3)^{3}$

16. Expresa como una única potencia y calcula:

    a) $\frac{(3^{3})^{\ 2}\ \ 3^{8}\ \ 3}{(3^{4}\ \ 3^{\ 2})^{2}}$ b) $\frac{2^{3}\ \ 2^{\ 5}\ \ 2^{4}}{2^{0}\ \ 2^{\ 2}}$ c) $\frac{(5^{\ 2})^{\ 3}\ \ 5^{5}\ \ 5^{\ 10}}{((5^{2})^{\ 1})^{3}\ \ 5^{4}}$

Potencias de base racional

La **potencia de una fracción** es la que resulta de elevar el numerador y el denominador al exponente dado.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{5} = \frac{3^{5}}{4^{5}} \qquad \left(\frac{\ 7}{9}\right)^{3} = \frac{(\ 7)^{3}}{9^{3}}$$

17. Desarrolla como cociente de potencias y calcula:

    a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2}$ b) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3}$ c) $\left(\frac{\ 1}{2}\right)^{4}$ d) $\left(\frac{\ 5}{15}\right)^{3}$

Recuerda que una potencia de **exponente negativo** es igual a la inversa de la potencia con exponente en valor absoluto.

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{-4} = \left(\frac{10}{3}\right)^{4}$$

18. Desarrolla como cociente de potencias y calcula:

a) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ d) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$

19. Calcula:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \left(\frac{2}{3}\right)^{-0} \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-6} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-7} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} \left(\frac{3}{4}\right)^{-20}$

d) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} \left(\frac{1}{7}\right)^{-5} : \left(\frac{1}{7}\right)^{-6}$

e) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-6} : \left(\frac{4}{3}\right)^{-10} \left(\frac{4}{3}\right)^{-}$

f) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{3} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\right]^{4}$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

La **notación científica** es una forma de escribir los números que acomoda valores demasiado grandes (100 000 000 000) o pequeños (0'000 000 000 01) para ser escritos de manera convencional.
Los números expresados en notación científica constan de dos factores:

- un número con una única cifra entera
- una potencia de base 10

Expresión convencional	Notación científica
400 000	$4 \cdot 10^{5}$
32 000 000	$3'2 \cdot 10^{7}$
0'000 5	$5 \cdot 10^{-4}$
0'000 000 027	$2'7 \cdot 10^{-8}$

20. Escribe en notación científica:

a) 12 000 000 c) 0'000 000 37 e) 15 320 000 000 g) 0'000 004 236

b) 365 800 000 000 d) 0'004 075 f) 1'320 000 000 h) 0'000 000 017

21. Escribe en notación decimal:

a) $3'24 \cdot 10^{6}$ b) $4'26 \cdot 10^{8}$ c) $5'78 \cdot 10^{-8}$ d) $2'98 \cdot 10^{-7}$

22. Busca las siguientes magnitudes y constantes en internet y exprésalas en las unidades indicadas utilizando notación científica. Puedes redondear a tres cifras decimales.

   a) La masa de un electrón, en gramos.

   b) La masa del planeta Tierra, en kilogramos.

   c) La masa de la Luna, en kilogramos.

   d) El radio del planeta Tierra, en metros.

   e) La distancia entre el Sol y la Tierra, en kilómetros.

   f) La constante de Avogadro, en moles.

   g) La velocidad de la luz en el vacío, en metros/segundo.

   h) El tamaño de un virus, en milímetros.

   i) La constante de Plank, en kg $\ m^2 = s$.

23. Utiliza la calculadora para operar en notación científica:

   a) $3 \ \ 10^{21} + 1'2 \ \ 10^{20}$

   b) $2'25 \ \ 10 \ \ ^{15} \quad 3'17 \ \ 10 \ \ ^{13}$

   c) $(1'435 \ \ 10^{17}) \ \ (7'286 \ \ 10 \ \ ^{15})$

   d) $(5'25 \ \ 10^{12}) : (2'5 \ \ 10^{9})$

Raíces

La raíz cuadrada es la operación inversa a la potencia de exponente 2.
La raíz cúbica es la operación inversa a la potencia de exponente 3.
La raíz cuarta es la operación inversa a la potencia de exponente 4.
Y así sucesivamente.

> No existen raíces cuadradas reales de **números negativos**.
> Pero sí hay calcular raíces reales cúbicas, quintas y de cualquier otro índice impar.

Las raíces de índice par, cuando existen, tienen dos soluciones opuestas: una positiva y otras negativa.

$$5^2 = 25 \quad ! \quad \sqrt{25} = \quad 5$$

24. Indica qué números se han elevado al cuadrado para obtener los siguientes números:

a) 4	*e*) 64	*i*) 169	*m*) 900
b) 9	*f*) 81	*j*) 196	*n*) 12 100
c) 25	*g*) 100	*k*) 225	*ñ*) 490 000
d) 49	*h*) 121	*l*) 400	*o*) 1 000 000

25. Calcula las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{49}$	*d*) $\sqrt{2\,500}$	*g*) $\sqrt{12\,100}$	*j*) $\sqrt{0}$
b) $\sqrt{225}$	*e*) $\sqrt{8\,100}$	*h*) $\sqrt{22\,500}$	*k*) $\sqrt{\;49}$
c) $\sqrt{400}$	*f*) $\sqrt{10\,000}$	*i*) $\sqrt{16\,000\,000}$	*l*) $\sqrt{\;121}$

26. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{1}$ *b*) $\sqrt[3]{\;1}$ *c*) $\sqrt[4]{16}$ *d*) $\sqrt[4]{\;16}$ *e*) $\sqrt[5]{32}$ *f*) $\sqrt[5]{\;32}$

27. Los participantes del campeonato de taekwondo se han colocado sobre la superficie del pabellón formando un cuadrado.

    a) Estimamos que hay entre 40 y 90 participantes. ¿Cuántos podrían ser con exactitud? (Observa que hay varias respuestas posibles.)

    b) Cuando han vuelto a casa iban por parejas y no sobraba ninguno. Ahora sí podemos saber sin duda el número de participantes. ¿Cuántos eran?

28. El número 3481 es un cuadrado perfecto.

    a) Repasa las posibles terminaciones de cuadrados perfectos. ¿En qué cifra puede acabar la raíz de un cuadrado perfecto que acaba en 1?

    b) Halla la raíz cuadrada de 3481.

Cálculo de raíces cuadradas por tanteo

Para calcular la raíz cuadrada de números que no son cuadrados perfectos podemos realizar una **estimación**, acotándola entre dos valores enteros. El menor de dichos valores corresponderá a la parte entera de la raíz buscada.
Llamamos **resto** a la diferencia entre el número del cual buscamos la raíz y el cuadrado de su parte entera.

$\sqrt{200}$ POR TANTEO:

$$14^2 = 196 < 200 < 224 = 15^2$$
$$14 < \sqrt{200} < 15$$

Por lo tanto $\sqrt{200}$ es 14 «y pico».

$$200 = 14^2 + 4 \quad \rightarrow \quad \boxed{r = 4}$$

29. Halla el número cuya raíz tiene:

a) parte entera 19 y resto 7.

b) parte entera 11 y resto 10.

c) parte entera 221 y resto 4.

d) parte entera 99 y resto 10.

30. Calcula las siguientes raíces por tanteo y halla el resto:

a) $\sqrt{50}$	*d*) $\sqrt{144}$	*g*) $\sqrt{841}$	*j*) $\sqrt{4\,500}$	*m*) $\sqrt{9\,000}$
b) $\sqrt{75}$	*e*) $\sqrt{240}$	*h*) $\sqrt{888}$	*k*) $\sqrt{4\,958}$	*n*) $\sqrt{23\,954}$
c) $\sqrt{100}$	*f*) $\sqrt{250}$	*i*) $\sqrt{909}$	*l*) $\sqrt{8\,000}$	*ñ*) $\sqrt{688\,221}$

$\sqrt{3}$ CON UNA CIFRA DECIMAL:

$$1'7^2 = 2'89 < \phantom{\sqrt{}}3 < 3'24 = 1'8^2$$
$$1'7 < \sqrt{3} < 1'8$$

Por lo tanto $\sqrt{3}$ es 1'7 «y pico».

31. Calcula las siguientes raíces por tanteo, aproximando a las décimas:

a) 2	*d*) 7	*g*) 11	*j*) 20	*m*) 23
b) 5	*e*) 8	*h*) 12	*k*) 21	*n*) 24
c) 6	*f*) 10	*i*) 19	*l*) 22	*ñ*) 24'5

Raíces cuadradas de números racionales

La **raíz de una fracción** es la que resulta de hallar la raíz del numerador y del denominador respectivamente.

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

32. Calcula las siguentes raíces, cuando sea posible:

a) $\sqrt{\frac{16}{36}}$	*c*) $\sqrt{\frac{1}{64}}$	*e*) $\sqrt{\frac{16}{49}}$	*g*) $\sqrt{\frac{36}{121}}$	*i*) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$
b) $\sqrt{\frac{49}{25}}$	*d*) $\sqrt{\frac{225}{196}}$	*f*) $\sqrt{\frac{81}{25}}$	*h*) $\sqrt{\frac{49}{100}}$	*j*) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

33. Simplifica y después calcula las raíces cuadradas:

a) $\sqrt{\frac{2}{8}}$	*b*) $\sqrt{\frac{32}{50}}$	*c*) $\sqrt{\frac{343}{7}}$	*d*) $\sqrt{\frac{245}{405}}$	*e*) $\sqrt{\frac{600}{1536}}$

Para calcular la raíz exacta de un número decimal, utilizaremos su fracción generatriz.

$$\sqrt{0{,}04}=\sqrt{\frac{4}{100}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}=0{,}2$$

34. Emplea la fracción generatriz para calcular la raíz cuadrada exacta:

a) $\sqrt{0{,}01}$ *c*) $\sqrt{0{,}0009}$ *e*) $\sqrt{1{,}21}$ *g*) $\sqrt{2{,}\hat{7}}$

b) $\sqrt{0{,}0001}$ *d*) $\sqrt{0{,}000025}$ *f*) $\sqrt{0{,}\hat{4}}$ *h*) $\sqrt{0{,}02\hat{7}}$

OPERACIONES COMBINADAS

El orden de las operaciones se mantiene en todos los conjuntos numéricos.
Utilizaremos pasos intermedios siempre que sea necesario y procuraremos ser cuidadosos a la hora de operar con signos.

JERARQUÍA DE OPERACIONES

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

35. Calcula:

a) $\sqrt{4^2+3^2}-2\cdot(3^2-2^2)$

b) $2\cdot\sqrt{9}-8\cdot\left(\frac{3^2}{2}\right)^3$

c) $\left(3-\sqrt{5^2-4^2}\right)^{100}$

d) $\dfrac{\left[2-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\right]^{2}}{\sqrt{2^2\cdot 3^6}}$

e) $\sqrt{\frac{3}{12}}:3-2\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)^{2}$

Proporcionalidad

Razón y proporción

La **razón entre dos números** es el cociente entre dichos números.
Puede expresarse en forma fraccional o con ambos números separados por dos puntos.

Una **proporción** es la igualdad entre dos razones.

En una razón de proporcionalidad los números pueden ser decimales.

$$\frac{1'5}{2'4} = \frac{1}{1'6} = \frac{5}{8}$$

1. Calcula la razón entre los siguientes pares de números:

   a) 33 y 36 *b*) 24 y 42 *c*) 102 y 98 *d*) 24 y 9

2. Calcula el valor que falta en las siguientes proporciones:

   a) $\frac{4}{5} = \frac{x}{75}$ *b*) $\frac{10}{4} = \frac{7}{x}$ *c*) $\frac{18}{x} = \frac{27}{6}$ *d*) $\frac{4}{x} = \frac{x}{25}$

3. Un equipo ha marcado 68 goles y ha encajado 44. ¿Cuál es la razón entre las dos cantidades?

4. La razón entre la altura de Paco y la sombra que proyecta es de 2 : 7.
   Si Paco mide $1'80m$, ¿cuánto mide su sombra?

5. El perímetro de un rectángulo mide 128 cm, y la razón entre las medidas de sus lados es 5 : 3. Calcula el área del rectángulo.

6. Martiño tiene cinco fichas rojas por cada dos azules. Si tiene 21 fichas en total, ¿cuántas fichas tiene de cada color?

7. A un taller de guitarra asisten 30 estudiantes. Si por cada 8 niñas hay 7 niños, ¿cuántos niños y niñas conforman el taller?

8. Si hay 33 vehículos entre motos y coches, y la razón entre ellos es 4 : 7, ¿cuántos coches hay? ¿Y cuántas motos?

PORCENTAJES

Un porcentaje es una forma simplificada de representar una fracción con denominador 100.

$$16\,\% = \frac{16}{100} = 0'16$$

9. De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 600. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?

10. De los 300 inscritos para una prueba deportiva, el 27 % no se ha presentado. ¿Cuántos han competido?

11. En una clase de 25, el 44 % participa en un concurso de fotografía. ¿Cuántos alumnos son?

12. Hay 15 plazas para participar en una actividad deportiva, pero ya están ocupadas el 80 %. ¿Cuántas plazas quedan libres?

13. El 75 % de los 348 alumnos del instituto han aprobado todas las asignaturas. ¿Cuántos alumnos han suspendido alguna?

14. En un hotel están alojados 320 turistas extranjeros. De ellos, 40 son alemanes, 120 franceses, 100 ingleses y el resto portugueses. ¿Qué porcentaje de turistas hay de cada una de esas nacionalidades?

15. El 67 % de los asistentes a un partido son del equipo local. Si asistieron 15 000 personas, ¿cuántos asistentes no eran del equipo local?

16. Han hecho una encuesta a 98 dentistas y 90 han recomendado utilizar un dentífrico con al menos 1 450 ppm de flúor. Exprésalo como un porcentaje entero, redondeando si fuese necesario.

Cuando trabajamos con un **aumento porcentual** podemos operar un único factor que equivale al 100 % original más el porcentaje añadido:

$$100\,\% + 16\,\% = 1 + 0'16 = 1'16$$
$$50 \text{ e } \quad 1'16 = 58 \text{ e}$$

Del mismo modo, cuando trabajamos con un **descuento porcentual** podemos operar un único factor que equivale al 100 % original menos el porcentaje añadido:

$$100\,\% \quad 16\,\% = 1 \quad 0'16 = 0'84$$
$$50 \text{ e } \quad 0'84 = 42 \text{ e}$$

17. El precio de un ordenador es de 1200 e antes de impuestos. A la hora de comprarlo debo abonar también el 16 % de IVA, ¿cuál es el precio?

18. Al comprar un monitor que cuesta 450 e nos hacen un descuento del 8 %. ¿Cuánto pagaremos?

19. He pagado 34 e por una sudadera que estaba rebajada un 15 %. ¿Cuánto costaba la sudadera?

20. Al adquirir un vehículo cuyo precio es de 8800 e, nos hacen un descuento del 7.5 %. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

21. En una tienda han comprado un artículo a 80 e la unidad. Si se vende con una ganancia del 15 % sobre el precio de costo, ¿cuál es el precio de venta?

22. Una camiseta costaba 34 e y en temporada de rebajas se vende a 27^{0}20 e, ¿qué porcentaje de descuento se ha aplicado sobre el precio anterior?

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando la razón entre las cantidades relacionadas es constante.
O, dicho de otro modo, si una se duplica la otra también ha de duplicarse.

kg	1	2	3
e	2'45	4'90	7'35

REDUCCIÓN A LA UNIDAD

Llamamos **tasa unitaria** es una razón de proporcionalidad en la que el segundo número (es decir, el denominador de la fracción) es 1.
El **método de reducción a la unidad** se basa en la utilización de la tasa unitaria para realizar un paso intermedio que nos permita plantear el problema de forma sencilla.

kg	3	$\xrightarrow{:3}$	1	$\xrightarrow{\cdot 2}$	2
e	7'35	$\xrightarrow{:3}$	2'45	$\xrightarrow{\cdot 2}$	4'90

UTILIZA EL MÉTODO DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD:

23. Brais compró 5'5 kilos de manzanas y pagó un total de 7^{0}15 e.

    a) ¿Cuál es el precio por kilo?
    b) ¿Cuánto hubiese pagado por 6 kilos?

24. Uxía trabajó 8 horas ayer y ganó un total de 86 e.

    a) ¿Cuánto gana por hora?
    b) ¿Cuánto cobrará mañana por 5 horas?

25. Dos kilos de naranjas cuestan 1,50 e.

    a) Halla el precio de cada kilo.
    b) ¿Cuánto costarán 5 kg? ¿Y 12 kg?

26. El precio de 12 fotocopias es de 0^{0}60 e. ¿Cuánto costará hacer 15 fotocopias?

27. Si un ciclista recorre 75 kilómetros en 3 horas, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 5 horas a la misma velocidad?

28. Un panadero utiliza 2 kg de levadura por cada 50 kg de harina para amasar el pan. ¿Qué cantidad de harina podrá amasar con 5 kg de levadura?

29. Un grifo arroja 120 litros de agua en seis minutos. ¿Qué cantidad de agua arrojará en veinte minutos?

30. Antonio, Alba y Alberto son tres camareros que siempre se reparten las propinas del mes en función de las horas diarias que trabaja cada uno. Antonio trabaja 8 horas al día y este mes le han correspondido 124 e. Si Alba trabaja 6 horas al día y Alberto 4 horas al día, ¿cuánto les corresponde a ellos? ¿A cuánto han ascendido las propinas este mes?

Regla de tres

La **regla de tres directa** se plantea como una proporción en la que uno de los valores es desconocido. Ese valor desconocido se obtendrá multiplicando en cruz y despejando.

Doscientos gramos de mortadela cuestan $1^0 75$ e, así que nos preguntamos cuánto costará medio kilo.
Hemos de utilizar las mismas unidades de medida para cada magnitud (o gramos en ambas o kilogramos en ambas, pero no mezclarlas).

Peso	Precio
200g	$1^0 75$ e
500g	x

$$! \quad \frac{200}{500} = \frac{1^0 75}{x} \quad ! \quad x = \frac{1^0 75 \;\; 500}{200} = 4^0 375$$

Para obtener un resultado coherente con nuestra unidad monetaria, redondearemos y contestaremos que medio kilo cuesta $4^0 38$ e.

UTILIZA REGLA DE TRES:

31. El precio de 18 fotocopias es de 0'36 e. ¿Cuánto costarán 100 fotocopias?

32. Una máquina llena 42 botellas de aceite en 7 minutos.

    a) ¿Cuántas botellas podrá llenar en media hora?

    b) ¿Cuánto tardará en llenar 150 botellas?

33. Un electricista cobra 510 epor 5 días de trabajo. ¿Cuánto cobrará por 7 días?

34. Si 8 kilos de manzanas valen 10'40 e, ¿cuánto costarán 13 kilos?

35. Para construir dos edificios iguales son necesarios 1 245 000 ladrillos. ¿Cuántos harían falta para construir 3 edificios?

36. 4 amigos han pagado 280 e por las entradas de acceso a un evento deportivo. ¿Cuánto tendrá que pagar una peña de 14 personas?

37. Un coche ha dado 60 vueltas a un circuito en 105 minutos. Calcula el tiempo que tardará en recorrer en el mismo circuito 40 vueltas.

38. Si 12 bolas de acero iguales tienen un peso de 7200 gramos, ¿cuánto pesarán 50 bolas iguales a las anteriores?

39. A cierta hora del día un palo de 1'5 metros de largo proyecta una sombra de 60 centímetros. ¿Cuánto mide un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 2'40 metros?

40. En una fábrica una máquina pone 15.000 tornillos en las 8 horas de jornada laboral, funcionando de forma ininterrumpida. ¿Cuántos tornillos pondrá si la detenemos tras solo 3 horas?

41. He encontrado esta receta para hacer 18 magdalenas:

    - 125g huevo
    - 175g azúcar
    - 60ml leche
    - 190ml aceite
    - 210g harina
    - 5g levadura química

    a) ¿Qué cantidades necesitaré para hacer 27 magdalenas?

    b) ¿Y si quiero hacer 72 magdalenas para una fiesta?

Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al crecer una la otra disminuye en la misma proporción.
O, dicho de otro modo, si una se duplica la otra ha de dividirse entre dos.

Cuantos más trabajadores, menos horas lleva una tarea.

trabajadores	1	2	3
horas	6	3	2

Reducción a la unidad

Para aplicar el **método de reducción a la unidad** en un problema de proporcionalidad inversa debemos operar con una magnitud a la inversa que con la otra.
Es decir, si en una magnitud se multiplica por un número en la otra se ha de dividir por el mismo número.

Si 6 fotocopiadoras tardan 6 horas en realizar un gran número de copias, ¿cuánto tiempo tardarían 4 fotocopiadoras en realizar el mismo trabajo?

fotocopiadoras	6	$\xrightarrow{:6}$	1	$\xrightarrow{4}$	4
horas	6	$\xrightarrow{6}$	36	$\xrightarrow{:4}$	9

Es decir, 4 fotocopiadoras tardarían 9 horas.

UTILIZA EL MÉTODO DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD:

42. En una granja, 20 patos tardan 10 días en comer el alimento que hay guardado. ¿Cuánto tiempo tardarán 40 patos en terminar el alimento?
43. Un camión que lleva una velocidad de 90 km/h, tarda 4 horas en cubrir la distancia que separa dos ciudades. ¿Cuánto tardará a una velocidad de 80 km/h?
44. 3 pintores tardan 10 días en pintar una casa. ¿Cuánto tardarán 5 pintores en hacer el mismo trabajo?
45. 18 amigos han pagado 6 e cada uno para comprar un regalo a una compañera, pero finalmente más gente se ha animado a participar en el regalo y son 24 personas en lugar de 18. ¿Cuánto ha de pagar cada uno?
46. Al repartir una cantidad de euros entre 7 personas cada una recibe 12 e. ¿Cuánto recibirían si el reparto se hiciera entre 6 personas?
47. 14 personas recogen las aceitunas de un olivar en 848 horas. ¿Cuánto tardarían 8 personas?
48. Después de una fuerte tormenta, dos bombas han tardado 6 horas en desaguar un garaje que se había anegado. ¿Cuántas horas se hubiera tardado utilizando sólo 3 bombas?

REGLA DE TRES INVERSA

También se puede emplear una regla de tres para resolver problemas de proporcionalidad inversa, pero debemos plantear la proporción empleando una fracción inversa.

Si 6 fotocopiadoras tardan 6 horas en realizar un gran número de copias,¿cuánto tiempo tardarían 4 fotocopiadoras en realizar el mismo trabajo?

Fotocopiadoras	Horas
6	6
4	x

$$\rightarrow \quad \frac{6}{4} = \frac{x}{6} \quad \rightarrow \quad x = \frac{6 \;\, 6}{4} = 9$$

Es decir, 4 fotocopiadoras tardarían 9 horas.

49. Dos desagües iguales vacían una balsa de agua en 4 horas y cuarto. ¿En cuánto tiempo se vaciaría si abriésemos tres desagües?

50. Un coche tarda en llegar a su destino 8 horas y 30 minutos si circula a una velocidad media de 120 km/h. Si un día de lluvia el recorrido se hace más lentamente y tarda 10 horas, ¿a qué velocidad media ha circulado?

51. Para construir una casa en ocho meses han sido necesarios seis albañiles. ¿Cuántos habrían sido necesarios para construir la casa en tan sólo tres meses?

52. En una granja avícola hay 300 gallinas que se comen un camión de grano en 20 días. Si se compran 100 gallinas más, ¿en cuánto tiempo comerán la misma cantidad de grano?

53. Dos ruedas están unidas por una correa transmisora. La primera tiene un radio de 25 cm y la segunda de 75 cm. Cuando la primera ha dado 300 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado la segunda?

54. Una piscina portátil ha tardado en llenarse seis horas utilizando cuatro grifos iguales. ¿Cuántos grifos, iguales a los anteriores, serían necesarios para llenarla en 3 horas?

Proporcionalidad compuesta

Un problema puede incluír distintas relaciones de proporcionalidad, siendo todas ellas directas, todas inversas o algunas directas y otras inversas.
Es lo que llamamos **proporcionalidad compuesta**.

Existe fórmulas que permiten resolver problemas de proporcionalidad compuesta directamente, en general, resulta complejo plantearlas.
En su lugar, intentaremos razonar magnitud a magnitud empleando reducción a la unidad o regla de tres según sea nuestra preferencia.

55. Una fábrica de automóviles, trabajando 12 horas diarias, ha necesitado 10 días para fabricar 600 coches. ¿Cuántos días necesitará para fabricar 200 coches si trabaja 8 horas diarias?

56. Seis personas pueden alojarse en un hotel durante 12 días por 792 e. ¿Cuánto costará el hotel de 15 personas durante ocho días?

57. Con 12 botes conteniendo cada uno medio kilo de pintura se han pintado 90 m de verja de 80 cm de altura. Calcular cuántos botes de 2 kg de pintura serán necesarios para pintar una verja similar de 120 cm de altura y 200 metros de longitud.

58. Cuatro agricultores recolectan 10 000 kg de cerezas en 9 días. ¿Cuántos kilos recolectarán seis agricultores en 15 días?

59. Cinco trabajadores tardan 16 días en construir una pequeña cabaña trabajando 6 horas diarias. ¿Cuántos trabajadores serían necesarios para construir dicha cabaña en 10 días si trabajan 8 horas diarias?

60. En 8 días, 6 máquinas cavan una zanja de 2 100 metros de largo. ¿Cuántas máquinas serán necesarias para cavar 525 m trabajando durante 3 días?

REPARTOS PROPORCIONALES

En un **reparto proporcional** debemos repartir una cantidad dada entre varios, teniendo en cuenta una magnitud concreta medida para cada uno de aquellos entre los que se reparte, bien sea **directamente** (tomando los propios números como referencia para el reparto) o **inversamente** (tomando la inversa de los números como referencia para el reparto).

REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Si repartimos 1 000 e de forma directamente proporcional a 2, 3 y 5:

$$\frac{1000}{2+3+5} = 100 \text{ e por cada unidad}$$

A 2 le corresponden 200 e, a 3 le corresponden 300 e y a 5 le corresponden 500 e.

61. Tres carpinteros se encargaron de hacer unas mesas, por lo que recibieron un total de 450 euros. Juan hizo una mesa, Alberto hizo 2 mesas y Luisa 3 mesas.
¿Cuánto dinero corresponde a cada uno de ellos?

62. Un abuelo reparte 450 e entre sus tres nietos de 8, 12 y 16 años de edad, proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

63. Una empresa de trabajo a tiempo parcial reparte 6 000 e mensuales entre tres empleadas. Esas empleadas trabajan 7, 12 y 21 horas a la semana respectivamente.
¿Cuánto recibirá cada una de ellos?

64. Dos socias forman una empresa, para lo cual una aporta 1 000 e y el otro aporta 1 500 e. Al cabo de un año han obtenido un beneficio de 750 e. ¿Cuánto corresponde a cada una?

65. Dos socios aportan la misma cantidad para un negocio, pero el primero de ellos tuvo el dinero invertido 6 meses y el segundo lo tuvo 4 meses. ¿Cómo deben repartir una ganancia de 1 500 e?

66. Se asocian tres personas aportando 5 000 e, 7 500 e y 9 000 e. Si al cabo de un año han obtenido unos beneficios 6 450 e, ¿qué cantidad corresponde a cada una?

67. Tres socias pusieron para crear una empresa 5 000 e, 8 000 e y 10 000 erespectivamente. Tras un tiempo la empresa tiene 2300 e de beneficios. ¿Qué cantidad corresponde a cada una?

68. Una entidad benéfica decide repartir 1080 ordenadores entre tres centros educativos, el primero tiene 350 alumnos, el segundo 410 y el tercero 590. ¿Cuántos ordenadores corresponden a cada centro?

69. El ayuntamiento reparte una ayuda económica de 6000 e entre tres ganaderos que tienen vacas de una raza autóctona en peligro de extinción. Uno de ellos tiene 70 reses, otro 120 y el último 210. ¿Cuánto dinero recibirá cada uno?

70. Julia inicia un negocio con 2 000 e. Ocho meses después se le une Sonia, que aporta a la empresa 3 000 e. Al final del primer año obtienen una ganancia de 1 500 e.
¿Cuánto corresponde a cada uno?

Repartos inversamente proporcionales

Si repartimos 3 400 e de forma inversamente proporcional a 1, 2 y 5:

$$\frac{1}{1} = \frac{10}{10} \qquad \frac{1}{2} = \frac{5}{10} \qquad \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$$

Es realidad es análogo a un reparto directamente proporcional a $\frac{10}{10}$, $\frac{5}{10}$ y $\frac{2}{10}$.
O, equivalentemente, a 10, 5 y 2.

$$\frac{3400}{10+5+2} = \frac{3400}{17} = 200$$

1	!	10	!	10 200 = $\boxed{2000}$
2	!	5	!	5 200 = $\boxed{1000}$
5	!	2	!	2 200 = $\boxed{400}$

71. Tres hermanos ayudan al mantenimiento de la casa familiar entregando mensualmente 590 e. Si las aportaciones son inversamente proporcionales a la cantidad de tareas domésticas realizadas por cada uno de ellos (20, 24 y 32 respectivamente), ¿cuánto aporta cada uno?

72. Unos abuelos deciden repartir 420 e entre sus tres nietos, pero en vez de darles un tercio a cada uno prefiere hacerlo de forma inversamente proporcional a la edad de cada nieto, que tienen 3, 5 y 6 años. ¿Cuánto recibirá cada uno de ellos?

LENGUAJE ALGEBRAICO

Una **expresión algebraica** es es un conjunto de cantidades numéricas y literales relacionadas entre si mediante operaciones.

Las letras que utilizamos no son más que signos para representar cantidades desconocidas, por eso las llamamos **incógnitas**.
Podemos utilizar letras del alfabeto romano, del alfabeto griego o cualquier otro símbolo que nos resulte apropiado.

Tengo una cantidad de dinero.
Mi mejor amiga tiene un euro más que yo.

Mi dinero	!	L
El dinero de mi amiga	!	L +1

1. Escribe las expresiones algebraicas correspondiente a estas frases:

   a) Los caramelos que tiene Pilar, que son el doble que los de Carla.

   b) La edad de mi hermano, que es un año más joven que yo.

   c) La cantidad de carne que compró Blanca, que es un cuarto de kilo más que la comprada por Pedro.

   d) Lo que me he gastado en los regalos de Navidad

   e) Tengo el 20 % de mis ahorros en una cuenta a plazo fijo.

   f) La suma de dos números consecutivos.

   g) El perímetro de un triángulo escaleno.

   h) El área de un cuadrado de lado *l*.

   i) El área de un rectángulo cuya base mide el doble que su altura.

2. Escribe las expresiones algebraicas correspondientes a estos enunciados numéricos:

   a) El doble de un número.

   b) El triple de un número.

   c) La mitad de un número.

   d) Una unidad más que un número.

   e) Tres unidades menos que un número.

   f) La suma de dos números.

   g) La suma de los cuadrados de dos números.

   h) El cuadrado de la suma de dos números.

   i) El triple de la diferencia de un número y una unidad.

   j) La diferencia del triple de un número y una unidad.

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado obtenido al sustituir las variables por un número determinado.

$$x^2 \quad x^3 \text{ para } x = \quad 1 \qquad ! \qquad (\quad 1)^2 \quad (\quad 1)^3 = 1 \quad (\quad 1) = 2$$

3. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $3x + 7$ para $x = 2$

   b) $x^2 \quad 1$ para $x = \frac{2}{3}$

   c) $t \quad (t \quad 1)$ para $t = 0'5$

   d) $\frac{a+2}{a^2}$ para $a = \quad 1$

   e) $x \quad y + 3$ para $x = 2; y = 5$

   f) $x \quad (y + 3)$ para $x = 2; y = 5$

Monomios

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por el producto de un número por una o varias variables elevadas a exponentes naturales.

- Parte literal: las variables y sus exponentes
- Coeficiente: Número que multiplica la parte literal.

El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes de sus variables.

4. Identifica el coeficiente, la parte literal y el grado de los siguientes monomios:

   a) $7x^2$ *b*) xy *c*) $2x^2y^2$ *d*) $\quad 3x^2y^5$ *e*) x^4 *f*) $\frac{1}{2}y$ *g*) 1 *h*) $\quad t$

Suma y resta de monomios

Dos monomios son **semejantes** si tienen exactamente la misma parte literal (mismas variables, mismos exponentes).

Solo se pueden sumar y restar aquellos monomios que sean semejantes.
Para hacerlo basta con sumar o restar los coeficientes, manteniendo la parte literal.

$$3xy + 2xy = 5xy \qquad 3x + 2y + x = 4x + 2y$$
$$7x^2z \quad 5x^2z = 2x^2z \qquad 2x^3 + x^2 \quad 2x^3 = x^2$$

5. Opera cuando sea posible:

   a) $7a^3 + 8a^3$ *b*) $12x \quad 15y$ *c*) $4b^2 + 6b^3$ *d*) $12xy \quad 15xy$ *e*) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2$ *f*) $\quad 9t^4 + 9t^4$ *g*) $12x^2 \quad \frac{1}{2}x^2$ *h*) $\quad 7xz + (\quad 8xz)$

6. Realiza las siguientes operaciones:

a) $13a \quad 5a + 17a + 4a \quad 20a$

b) $30t^3 + (\quad 5)t^3 + 9t^3 \quad 17t^3 \quad (\quad 8t^3)$

c) $\frac{2b^2}{9} \quad \frac{5}{6}b^2 + \frac{17b^2}{8}$

7. Opera cuando sea posible:

a) $3a + 7b \quad 4a + 12b \quad a^2 + 1$

b) $7 + 12a \quad 8b \quad 15a + 12b$

c) $3x^2 \quad 3xy + y \quad 6x^2 + y$

d) $x^4 + 7x^3 \quad x^2 + 12x^3$

Multiplicación de monomios

En los productos de monomios, multiplicamos por un lado los coeficientes y por otro las partes literales.
Cuando las variables de las partes literales sean las mismas podemos aplicar lo aprendido en el tema de potencias y sumar los exponentes.

$$3a \quad 4b = 12ab \qquad \tfrac{1}{3}ab \quad \tfrac{3}{2}b = \tfrac{1}{2}ab^2$$
$$2x \quad 5x^2 = \quad 10x^3 \qquad x^2 \quad (\quad x^4) = \quad x^6$$

8. Realiza las siguientes operaciones e indica el grado del monomio resultante:

a) $10 \quad 3a^2$

b) $2b \quad 7b^2$

c) $\quad 2x^2 \quad 3x^4$

d) $x \quad 4x^2$

e) $\frac{3}{5}t^2 \quad \frac{10}{9}t$

f) $2 \quad r^2 \quad 4r$

g) $4a \quad 3b^2 \quad 2c$

h) $\quad x \quad \frac{1}{2}xy \quad y^2$

División de monomios

En los cocientes de monomios, dividimos por un lado los coeficientes y por otro las partes literales.
Cuando las variables de las partes literales sean las mismas podemos aplicar lo aprendido en el tema de potencias y restar los exponentes.

9. Realiza las siguientes operaciones e indica el grado del monomio resultante:

a) $3a^4 : 10a^2$

b) $2b^2 : 8b^2$

c) $\quad 2x^5 : 4x^4$

d) $x^2 : 4x$

e) $\frac{3}{5}t^2 : \frac{10}{9}t$

f) $\quad 2r^2 : 4r$

g) $4a^2b : 2a$

h) $\quad xy^2 : xy$

Potencias de monomios

En las potencias de monomios también operamos por un lado los coeficientes y por otro las partes literales.

10. Realiza las siguientes operaciones e indica el grado del monomio resultante:

a) $(2a^2)^3$	c) $(\ \ x^2)^3$	e) $(\frac{1}{2}a)^4$	g) $(\frac{2}{3}x^2)^2$
b) $(b^3)^5$	d) $(\ \ x^3)^2$	f) $(\ \ 3b^5)^3$	h) $(0^0 1x^3)^3$

Propiedad distributiva

La propiedad distributiva de la multiplicación resulta muy útil en álgebra, pues nos permite multiplicar un monomio por varios que estén en un paréntesis.

$$\text{L}\ (\bigstar + 5) = \text{L}\ \bigstar + \text{L}\ 5$$

11. Opera:

a) $3a\ \ (4a + 2a^2)$	c) $5c\ \ (3a^2\ \ \ 4b)$	e) $\ \ 1\ \ (x + y)$	g) $4x\ \ (3x + \frac{1}{2})$
b) $(\ \ 2b)\ \ (3b + 2)$	d) $d\ \ (d\ \ \ 4)$	f) $\frac{1}{2}x\ \ (2x\ \ \ 2)$	h) $\frac{2}{3}\ \ (x^2\ \ \ 3y)$

Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de varios monomios no semejantes, a los que llamamos **términos**.

$$3a^3 + 4a^2\ \ \ 7a + 12b\ \ \ 17$$

- El **grado** de un polinomio es el mayor de los grados de sus términos.
- El **término principal** es aquel de mayor grado.
- El **término independiente** es aquel de grado cero.

12. Identifica el término independiente, el término principal y el grado de los siguientes polinomios:

a) $x^4 + 2x^2\ \ \ 3x + 7$	e) $x\ \ \ x^2 + x^3$	i) $0^0 4x^5\ \ \ 3^0 5x^2 + 0^0 12$
b) $5x\ \ \ 7x^3 + 111$	f) $\ \ 5x^{10} + x^9\ \ \ 4x^4$	j) $\frac{1}{2}x\ \ \ \frac{3}{4}$
c) $4x^3\ \ \ 2x$	g) $xy + 7x\ \ \ 2y + 4$	k) 15
d) $7x^2 + 12x\ \ \ 1$	h) $\ \ 3x^2 + 2x^5 + 8$	l) $2^9x^9 + 3^7x^7 + 12^{15}$

13. Escribe un polinomio que cumpla las condiciones requeridas en cada caso:

   a) Tiene un solo término y es de grado 4.

   b) Tiene tres términos y grado 2.

   c) El coeficiente de su término principal es negativo y no tiene término independiente.

   d) El coeficiente de su término principal es igual a su término independiente.

   e) Tiene 5 términos y todos sus coeficientes son iguales.

14. Ordena los siguientes polinomios de tal modo que el grado de sus términos sea descendiente:

   a) $x \quad x^4 + 4$

   b) $1 + x \quad x^4 + 2x^2$

   c) $2x \quad x^4 + 2$

   d) $3 + 7x^6$

   e) $5x^2 + 3x \quad 11x^5 + 2$

   f) $12x + 1 \quad x^2$

Suma y resta de polinomios

En las sumas (o restas) de polinomios se suman (o restan) los monomios semejantes que los componen.

$P =$		x^2	$+7x$	2
$Q =$	$12x^3$		$+4x$	9
$P + Q =$	$12x^3$	$+x^2$	$+11x$	11

$P =$		x^2	$+7x$	2
$Q =$	$12x^3$		$+4x$	9
$P \quad Q =$	$12x^3$	$+x^2$	$+3x$	$+7$

15. Dados los polinomios $P = 6x^2 + 5x \quad 5$, $Q = \quad 3x^2 \quad 6x + 7$, $R = 3x^2 \quad 2$, realiza las siguientes operaciones:

   a) $P + Q$

   b) $P \quad Q$

   c) $P + R$

   d) $P \quad R$

   e) $Q + R$

   f) $Q \quad R$

   g) $P + Q + R$

   h) $P \quad Q + R$

   i) $Q \quad R \quad P$

16. Halla el valor numérico de las expresiones algebraicas anteriores cuando $x = 0$.

17. Dados los polinomios $P = x^2 + 2x + 7$, $Q = 5x^2 \quad 2x + 7$, $R = 4x^2 \quad 5$, realiza las siguientes operaciones:

   a) $P + Q$

   b) $P \quad Q$

   c) $P + R$

   d) $P \quad R$

   e) $Q + R$

   f) $Q \quad R$

   g) $P + Q + R$

   h) $P \quad [Q + R]$

   i) $Q \quad [R \quad P]$

18. Halla el valor numérico de las expresiones algebraicas anteriores cuando $x = \quad 1$.

19. Dibuja un cuadrado. Sobre cada una de las aristas del cuadrado dibuja un rectángulo cuyo otro lado mide el doble que la arista dada. La figura resultante tendrá forma de cruz.

    a) Halla la expresión algebraica del área de la figura por composición (es decir, sumando las áreas de todas las piezas).

    b) Halla el área de la figura cuando la arista del cuadrado mide 10 centímetros.

20. Dibuja un rectángulo. Sobre cada uno de los lados más largos dibuja media circunferencia.

    a) Halla la expresión algebraica del área de la figura por composición.

    b) Halla el área de la figura cuando el lado menor del rectángulo mide 4 metros y el mayor 6 metros.

Multiplicación de polinomios

En el producto de un polinomio por un monomio se aplica la propiedad distributiva, es decir, se multiplica cada término del polinomio por el monomio.

$$3x^2 \quad (4x^3 \quad 2x) = 3x^2 \quad 4x^3 \quad 3x^2 \quad 2x = 12x^5 \quad 6x^3$$

21. Realiza las siguientes operaciones:

a) $4 \quad (2x^3 + 3x^2 \quad 5x + 1)$	*c*) $2x \quad (15x^3 + 6x^2 \quad \frac{1}{2}x)$	*e*) $\frac{1}{3}x^2 \quad (15x^3 + 6x^2 \quad 9)$
b) $(\quad 5) \ (\quad 8x^4 + x^2 \quad 3x + 1)$	*d*) $(\quad 10x^3) \ (0'1x^2 \quad x + 10)$	*f*) $\frac{4}{3}x \quad (\frac{6}{4}x^5 \quad \frac{9}{4}x^3 \quad \frac{1}{3})$

En los productos de polinomios se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio.
La expresión obtenida debe simplificarse sumando los monomios semejantes que se obtengan.

$$\begin{aligned} P &= 2x^2 + 3x \quad 1 \\ Q &= 5x + 7 \\ P \quad Q &= 10x^3 + 7x^2 + 15x^2 + 21x \quad 5x \quad 7 \\ &= 10x^3 + 22x^2 + 16x \quad 7 \end{aligned}$$

22. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(x + 1) \quad (x + 2)$	*c*) $(\quad 5x + 7) \quad (x^2 \quad 2)$	*e*) $(x^2 \quad 1) \quad (x^3 + x \quad 1)$
b) $(2x + 3) \quad (4x \quad 1)$	*d*) $(2x^2 + 1) \quad (3x^3 \quad 5)$	*f*) $(3x^3 + \frac{1}{2}) \quad (2x^4 \quad 6x)$

23. Realiza las siguientes operaciones:

- *a*) $(x^2 + x + 1)\quad(x^2\quad 3x + 2)$
- *b*) $(2x^3\quad 5x + 3)\quad(4x^2 + 5x\quad 1)$
- *c*) $(\quad 5x^3 + 7x^2 + 1)\quad(4x^2\quad 7x\quad 2)$
- *d*) $(2x^2\quad 8x + 1)\quad(3x^3 + 8x\quad 5)$
- *e*) $(x^4\quad 2x^2 + 3)\quad(3x^2 + 7x\quad 4)$
- *f*) $(x^4 + 3x)\quad(x^4\quad 3x)$

24. Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas anteriores cuando $x = \frac{1}{2}$.

25. Realiza las siguientes operaciones, teniendo en cuenta que una potencia es la multiplicación de un factor por sí mismo tantas veces como indica el exponente:

- *a*) $(x + 1)^2$
- *b*) $(x\quad 1)^2$
- *c*) $(2x + 1)^2$
- *d*) $(2x\quad 1)^2$
- *e*) $(3x + 4)^2$
- *f*) $(3x\quad 4)^2$
- *g*) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}\right)^2$
- *h*) $\left(\frac{1}{3}x\quad \frac{2}{5}\right)^2$

Identidades notables

El cuadrado de la suma NO es igual a la suma de los cuadrados.
El cuadrado de la resta NO es igual a la resta de los cuadrados.

Para calcular el cuadrado de una suma, debemos multiplicar la suma por sí misma.
Si lo hacemos mediante el procedimiento habitual del producto observamos claramente que obtenemos tres términos, que siempre tienen la sigueinte relación:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

26. Desarrolla utilizando identidades notables:

- *a*) $(x + 1)^2$
- *b*) $(2x + 3)^2$
- *c*) $(4x + 6)^2$
- *d*) $(7x + 11)^2$
- *e*) $(6x + 9)^2$
- *f*) $(12x + 3)^2$
- *g*) $(3x + 4)^2$
- *h*) $(8x + 5)^2$
- *i*) $(5 + 2x)^2$
- *j*) $(3x^2 + 5x)^2$
- *k*) $(x^3 + 7x^2)^2$
- *l*) $(4x^4 + 3x^3)^2$
- *m*) $(9x^5 + 7x^3)^2$
- *n*) $(x^6 + x^4)^2$
- *ñ*) $(3x^3 + 4x^6)^2$
- *o*) $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3})^2$
- *p*) $(\frac{1}{4}x + \frac{3}{8})^2$
- *q*) $(\frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{3})^2$

Para calcular el cuadrado de una resta procedemos de modo análogo:

$$(a \quad b)^2 = a^2 \quad 2ab + b^2$$

27. Desarrolla utilizando identidades notables:

- a) $(x \quad 1)^2$
- b) $(2x \quad 3)^2$
- c) $(4x \quad 6)^2$
- d) $(7x \quad 11)^2$
- e) $(6x \quad 9)^2$
- f) $(12x \quad 3)^2$
- g) $(3x \quad 4)^2$
- h) $(8x \quad 5)^2$
- i) $(5 \quad 2x)^2$
- j) $(3x^2 \quad 5x)^2$
- k) $(x^3 \quad 7x^2)^2$
- l) $(4x^4 \quad 3x^3)^2$
- m) $(9x^5 \quad 7x^3)^2$
- n) $(x^6 \quad x^4)^2$
- ñ) $(3x^3 \quad 4x^6)^2$
- o) $(\frac{1}{2}x \quad \frac{1}{3})^2$
- p) $(\frac{1}{4}x \quad \frac{3}{8})^2$
- q) $(\frac{3}{5}x^2 \quad \frac{2}{3})^2$

$$(a + b)(a \quad b) = a^2 \quad b^2$$

28. Desarrolla utilizando identidades notables:

- a) $(x + 1)(x \quad 1)$
- b) $(2x + 3)(2x \quad 3)$
- c) $(4x + 6)(4x \quad 6)$
- d) $(7x + 11)(7x \quad 11)$
- e) $(6x \quad 9)(6x + 9)$
- f) $(12x \quad 3)(12x + 3)$
- g) $(3x + 4)(3x \quad 4)$
- h) $(8x + 5)(8x \quad 5)$
- i) $(5 + 2x)(5 \quad 2x)$
- j) $(3x^2 + 5x)(3x^2 \quad 5x)$
- k) $(x^3 + 7x^2)(x^3 \quad 7x^2)$
- l) $(4x^4 + 3x^3)(4x^4 \quad 3x^3)$
- m) $(9x^5 + 7x^3)(9x^5 \quad 7x^3)$
- n) $(x^6 + x^4)(x^6 \quad x^4)$
- ñ) $(3x^3 + 4x^6)(3x^3 \quad 4x^6)$
- o) $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3})(\frac{1}{2}x \quad \frac{1}{3})2$
- p) $(\frac{1}{4}x \quad \frac{3}{8})(\frac{1}{4}x + \frac{3}{8})$
- q) $(\frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{3})(\frac{3}{5}x^2 \quad \frac{2}{3})$

29. Halla la identidad notable que corresponde a cada polinomio:

- a) $x^2 + 2x + 1$
- b) $x^2 \quad 2x + 1$
- c) $x^2 \quad 1$
- d) $25x^2 + 20x + 4$
- e) $64x^2 \quad 96x + 36$
- f) $100x^2 \quad 16$
- g) $100x^4 + 100x^2 + 25$
- h) $9x^6 \quad 12x^5 + 4x^4$
- i) $49x^8 \quad 25x^4$
- j) $\frac{4}{25}x^2 + 2x + \frac{25}{4}$
- k) $\frac{1}{9}x^2 \quad \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$
- l) $\frac{100}{49}x^2 \quad \frac{1}{9}$

División de un polinomio entre un monomio

En los cocientes de un polinomio entre un monomio se divide cada término entre el monomio.

$$(12x^5 - 6x^3) : 3x^2 = 12x^5 : 3x^2 - 6x^3 : 3x^2 = 4x^3 - 2x$$

30. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(4x^3 + 7x^2 - 8x) : x$

b) $(18x^3 - 27x^2 - 30x + 81) : 3$

c) $(6x^8 + 12x^5) : (3x^3)$

d) $(4x^4 - 16x^3 + 8x^2) : 2x^2$

e) $(10x^4 + 20x^3 - 15x^2) : (5x)$

f) $(2x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x) : (-2x)$

g) $(-36x^{12} + 24x^8 - 48x^4) : (-12x^4)$

h) $(x^4 + 6x^3 - 7x^2) : (2x)$

i) $(\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{5}{2}x) : (\frac{1}{2}x)$

j) $(2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + x^3) : (\frac{2}{3}x^2)$

Extracción de factor común

Si los términos de un polinomio tienen divisores comunes puede aplicarse la propiedad distributiva para expresarlo como producto de un monomio por un polinomio de grado menor. Ese monomio recibe el nombre de **factor común**.

$$\begin{aligned} A &= 8x^4 + 2x^3 - 6x \\ &= 2x\,(4x^3 + x^2 - 3) \end{aligned}$$

31. Extrae el factor común 2:

a) $6 + 2x$ b) $4x^2 + 10$ c) $8x^3 + 2x^2 + 12$ d) $6x^4 - 4x^3 - 26$

32. Extrae el factor común x:

a) $2x^2 + 5x$ b) $3x^6 - 5x^4 + 2x$ c) $4x^3 - 7x$ d) $x^5 + 2x^4 - 3x^2 + x$

33. Extrae el factor común $2x^2$:

a) $4x^4 - 8x^3 + 2x^2$

b) $-10x^5 + 2x^4 - 6x^2$

c) $12x^4 + 2x^3 - 18x^2$

d) $2x^4 - 100x^3 + 50x^2$

e) $16x^9 + 2x^7 - 24x^5 + 4x^2$

f) $4x^8 - 2x^6 + 122x^2$

34. Extrae el factor común $\frac{1}{3}x$:

a) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$ b) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x$ c) $x^4 + \frac{-2}{3}x$ d) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{9}x$

35. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

a) $x^5 + 7x^3 - 4x^2$

b) $2x^3 + 12x + 8$

c) $3x^2 - 5x$

d) $2x^4 + 8x^2 - 4x$

e) $75x^4 + 15x^3 - 25x^2$

f) $-9x^5 + 6x^4 - 12x^3$

g) $\frac{x}{5} - \frac{x^2}{2}$

h) $\frac{3}{16}x^4 - \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{4}$

i) $2x^2 + 3xy$

El orden de las operaciones se mantiene en todos los conjuntos numéricos y también ha de respetarse a la hora de realizar operaciones en lenguaje algebraico.

JERARQUÍA DE OPERACIONES

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

36. Realiza las siguientes operaciones:

    a) $(x+3)^2 \quad 2(3x \quad 4)^2$

    b) $(2x+3)(2x \quad 3) \quad 4x(x \quad 2)$

    c) $[(15x+6x^2)(2x \quad 1)] : (3x)$

    d) $[(4x+1)(5x+2) \quad 2(x+1)^2] : x$

37. Dados los polinomios $A = x+1$, $B = x \quad 1$, $C = 2x$ realiza las siguientes operaciones:

    a) $A \; B + C$

    b) $A \; (B + C)$

    c) $A^2 \quad C$

    d) $B^2 + C$

    e) $C \; (A + B)$

    f) $C^2 : (A \quad B)$

38. Dados los polinomios $P = 3x^2 \quad 4$, $Q = 6 \quad 5x$, $R = 2x^2 + 5x$ realiza las siguientes operaciones:

    a) $3 \; P \quad 2 \; Q$

    b) $P \; Q + R$

    c) $P \; (Q + R)$

    d) $Q^2 + P$

    e) $R : x + Q$

    f) $R \quad P^2$

ECUACIONES

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.
Llamamos **solución** de la ecuación a los valores de las incógnitas para los cuales la igualdad es cierta.

1. Expresa algebraicamente los siguientes enunciados:

   a) El área de un cuadrado mide 81 centímetros cuadrados.

   b) El perímetro de un rectángulo cuyo lado mayor mide 1 metro más que el menor es igual a 16 metros.

   c) El doble de un número más el triple del mismo número es igual a cinco veces dicho número.

   d) La quinta parte de un número menos la mitad de otro número es igual a 10.

   e) El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

2. Tengo 10 e en mi cartera, en monedas de 1 e y de 2 e.

   a) Expresa algebraicamente la cantidad de dinero que tengo, utilizando dos incógnitas.

   b) Halla una solución de la ecuación.

   c) Halla una solución de la ecuación en la que alguno de los números sea negativo.

   d) Halla una solución de la ecuación en la que alguno de los números sera una fracción.

   e) No todas las soluciones son válidas. ¿Por qué?

   f) Halla todas las soluciones válidas posibles.

3. Escribe una ecuación cuya solución sea $x = 2$.

4. Escribe una ecuación cuya solución sea $x = \frac{1}{2}$.

Para comprobar si un valor es solución de una ecuación, debemos hallar el **valor numérico** de ambos miembros y comprobar si son iguales.

5. Comprueba si el valor indicado es solución de la ecuación:

   a) $3x^2 \quad 5x + 2 = 0$ para $x = 1$

   b) $2 \quad (3x \quad 5) \quad 4x = \quad 6$ para $x = 2$

   c) $\frac{x \quad 1}{3} \quad 2x = \quad 7$ para $x = 4$

   d) $3x^2 + x \quad 2 = 0$ para $x = \frac{2}{3}$

   e) $2x \quad 8 + 3 \quad (3x \quad 1) = 0$ para $x = 1$

   f) $\frac{x \quad 1}{3} \quad \frac{x + 2}{5} = 0$ para $x = 2$

   g) $\frac{x \quad 1}{3} \quad \frac{x + 2}{5} = 0$ para $x = \quad 2$

   h) $6x^2 \quad x + 1 = 0$ para $x = \frac{1}{3}$

6. Escribe una ecuación cuya solución sea $x = \quad 4$.

7. Escribe una ecuación cuya solución sea $x = \frac{2}{3}$.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son **equivalentes** si puede transformarse una en la otra aplicando las reglas de la suma y del producto.

Regla de la suma

Si en una ecuación se suma (o se resta) el mismo número en ambos miembros se obtiene una ecuación equivalente.

$$x + 2 = 6$$
$$x = 6 \quad 2$$
$$x = 4$$

Por eso solemos decir que *si está sumando pasa al otro miembro restando* y, recíprocamente, que *si está restando pasa al otro miembro sumando*.

8. Aplica la regla de la suma para encontrar la solución de estas ecuaciones:

   a) $14 + x + 10 = 35$
   b) $18 + 2x \quad 8 = x \quad 25$
   c) $12 \quad x = 12 \quad 2x$
   d) $7 \quad 5x = 12 \quad 4x \quad 17$
   e) $3x \quad 5 + 3x = 6x \quad 6$
   f) $\quad 3x + 7 \quad 10 = \quad 4x + 5$
   g) $\quad 1 + 10x = 11x + 8$
   h) $3x \quad 7 = 1 + 2x$
   i) $\quad 6x + 5 = \quad 7x \quad 6$

Regla del producto

Si en una ecuación se multiplica (o se divide) por el mismo número no nulo en ambos miembros se obtiene una ecuación equivalente.

$$3x = \quad 15$$
$$x = \frac{\quad 15}{3}$$
$$x = 5$$

Por eso solemos decir que *si está multiplicando pasa al otro miembro dividiendo* y, recíprocamente, que *si está dividiendo pasa al otro miembro multiplicando*.

9. Aplica la regla del producto para encontrar la solución de estas ecuaciones:

   a) $3x = 18$
   b) $\frac{x}{2} = 8$
   c) $6x = 11$
   d) $4x = \frac{12}{5}$
   e) $\quad 2x = \frac{1}{3}$
   f) $5 = 7x$
   g) $\frac{3x}{7} = 12$
   h) $3x = \frac{3}{7}$
   i) $\frac{3x}{4} = \quad \frac{1}{4}$

Ecuaciones de primer grado

Una **ecuación de primer grado** es aquella equivalente a la ecuación formada por un polinomio de primer grado igual a cero.

Para resolver una ecuación de primer grado sencilla:

1. Aplicamos la regla de la suma de tal modo que los términos con incógnita estén en un miembro y los términos sin incógnita en el otro.

2. Operamos y utilizamos la regla del producto para despejar la incógnita.

$O \quad x = 0 \quad !$ Infinitas soluciones

$O \quad x = \text{n}^{\text{o}} \quad !$ No hay solución

10. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $5x + 4 = 49$

b) $3 + 8x = 5x$

c) $4x \quad 5 = 7x + 15$

d) $3x + 2 \quad 5x \quad 7x + 9 = 8x \quad 1 + 7x$

e) $7x + 7 \quad x = 4x + 15 + 2x \quad 8$

f) $4x + 9 = 5x \quad 3 \quad x + 6$

Para resolver una ecuación de primer grado con paréntesis, operamos para suprimirlos.

11. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis:

a) $2 \quad (x \quad 1) + 3 = 9$

b) $4 \quad (x + 2) = 3 \quad (x + 7)$

c) $5x \quad 4 \quad (2x \quad 7) = 13$

d) $6 \quad (2x \quad 3) = 10 \quad (2x \quad 5)$

e) $3 \quad (6x \quad 10) \quad 5 \quad (2 \quad 4x) = 25x \quad 1$

f) $2\,(7x \quad 1) \quad 3\,(3x \quad 6) \quad 5\,(11x + 6) = 196$

Para resolver una ecuación con denominadores, multiplicamos ambos lados de la igualdad por un múltiplo de dichos denominadores, preferiblemente el mínimo común múltiplo.

$$\frac{2 \quad (3x + 7)}{5} + \frac{5 \quad (x \quad 3)}{2} = \quad 1$$

$$10 \quad \frac{2 \quad (3x + 7)}{5} + 10 \quad \frac{5 \quad (x \quad 3)}{2} = 10 \quad (\quad 1)$$

$$4 \quad (3x + 7) + 25 \quad (x \quad 3) = \quad 10$$

$$12x + 28 + 25x \quad 75 = \quad 10$$

$$12x + 25x = \quad 10 \quad 28 + 75$$

$$37x = 37$$

$$x = \frac{37}{37} = 1$$

Procedimiento general de resolución

1. Multiplicamos todos los términos por el mínimo común múltiplo de los denominadores, si los hubiese.
2. Operamos para suprimir paréntesis, si los hubiese.
3. Aplicamos la regla de la suma de tal modo que los términos con incógnita estén en un miembro y los términos sin incógnita en el otro.
4. Operamos y utilizamos la regla del producto para despejar la incógnita.
5. Comprobamos la solución.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con denominadores:

a) $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} + \frac{x}{9} = 7$

b) $\frac{x \quad 3}{2} + \frac{2x \quad 5}{2} = 5$

c) $\frac{7x \quad 1}{2} \quad \frac{4x \quad 6}{2} = 7$

d) $3x \quad \frac{1}{4} = 2x + \frac{1}{3} \quad \frac{5}{6}$

e) $\frac{2x \quad 3}{5} + 1 = 4x + 4$

f) $\frac{3x \quad 1}{2} + \frac{5x + 7}{4} = \quad 7$

g) $\frac{5x + 7}{4} \quad \frac{2x + 1}{3} = 2$

h) $\frac{6 \quad x}{5} + \frac{3x \quad 1}{6} \quad \frac{2x \quad 3}{4} = \frac{1}{12}$

i) $x \quad 2 \quad \frac{5x + 7}{6} = \frac{10 \quad 4x}{9}$

j) $\frac{9x \quad 1}{12} + \frac{6x + 6}{8} \quad \frac{3x}{10} = \frac{16}{15}$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores:

a) $\frac{5 \quad (3x \quad 5)}{4} \quad \frac{7x + 3}{8} = 2$

b) $\frac{3 \quad (4x + 1)}{7} \quad \frac{6 \quad (x \quad 3)}{5} = 3$

c) $3 \quad (2x \quad 4) + \frac{5x + 1}{6} = \frac{1}{4}$

d) $\frac{2(3x \quad 1)}{3} + \frac{5x \quad 6}{6} = \frac{138}{9}$

e) $\frac{2x \quad 8}{5} + \frac{3(x + 2)}{6} = 3$

f) $\frac{5(2x \quad 1)}{3} \quad \frac{x \quad 4}{3} = 2$

g) $\frac{3(2x \quad 8)}{4} \quad 2(6 \quad 4x) = \frac{5}{2}$

h) $\frac{3(2x + 2)}{10} \quad \frac{7(2x \quad 5)}{15} \quad \frac{x \quad 6}{6} = \frac{29}{15}$

i) $\frac{3(5x \quad 1)}{2} \quad \frac{7(3x \quad 4)}{3} = \frac{1}{6} \quad \frac{11(x \quad 1)}{6}$

j) $\frac{2(x + 3)}{5} + \frac{3(x \quad 6)}{2} = \frac{2}{5} + \frac{10(2x + 1)}{6}$

Problemas con ecuaciones de primer grado

Procedimiento para resolución de problemas

1. Indica los distintos datos y su relación con la incógnita.
2. Plantea la ecuación que relaciona esos datos.
3. Resuelve la ecuación.
4. Comprueba el resultado:
   Debe ser solución de la ecuación y además un valor factible para el problema.
5. Relee el problema y contesta a la pregunta con una frase breve.

Resuelve siguiendo los pasos indicados:

14. Julio ha ido de compras. En la primera tienda ha gastado las dos terceras partes de su dinero y en la segunda tres cuartas partes de lo que le quedaba, así que ya solo tiene 10 euros.
    a) ¿Cuánto dinero tenía al principio?
    b) ¿Cuánto ha gastado en cada tienda?
    c) ¿Cuánto ha gastado en total?
15. En la frutería del barrio el kilo de fresas cuesta 30 céntimos más que el kilo de naranjas pero 20 céntimos menos que el kilo de kiwis.
    Por 2kg de fresas, 4kg de kiwis y 3kg de naranjas se han pagado 16'10 e.
    ¿Cuál es el precio de cada tipo de fruta?
16. Tres personas han trabajado en una obra, cobrando según las horas trabajadas.
    Marta ha trabajado 2 horas más que Carlos, y Brais ha trabajado el doble que los otros dos juntos.
    a) Si en total han trabajado 40 horas, ¿cuántas horas ha trabajado cada uno de ellos?
    b) Si por cada hora de trabajo cobran 20e, ¿cuánto cobrará cada uno?
17. Víctor tiene la cuarta parte de la edad que su padre y dentro de 10 años sus edades sumarán 75. ¿Cuántos años tiene cada uno?
18. En el taller de Amparo hay motos y coches, un total de 40 vehículos. Si al contar las ruedas obtenemos 94.
    a) ¿Cuántas motos hay?
    b) ¿Y coches?
19. Marisa tiene 43 años y tres hijos. El pequeño tiene 2 años menos que el mediano, que a su vez tiene 3 años menos que la mayor. Calcula sus edades sabiendo que dentro de tres años la suma de las edades de los hijos será igual a la de la madre.
20. En un concurso dan 5 puntos por cada respuesta correcta y quitan 3 puntos por cada fallo.
    Si Inma ha contestado a 25 preguntas y tiene 69 puntos, ¿cuántas ha acertado?

21. En una frutería hay el doble de manzanas que de peras y el triple de uvas que de manzanas. Si en total hay 441 piezas de fruta, calcula cuántas hay de cada clase.

22. Un granjero tenía gallinas en su corral, pero la tercera parte se escapó por una agujero de la valla y un lobo se comió dos terceras partes de las que quedaban, así que decidió cambiar las 18 gallinas que le quedaban a otro corral.
¿Cuántas gallinas tenía al principio?

23. Raquel, Ramón y Rosa están contando el dinero que tienen para ir al cine. Raquel tiene 7 € más que Ramón y Rosa tiene 5 € más que Raquel. Si en total tienen 40 €, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

24. Un periodista ha escrito la crónica de un partido de baloncesto, en la que el equipo local ha sufrido una aplastante derrota. Las dos séptimas partes del artículo están dedicadas a elogiar al entrenador, las tres cuartas partes del resto a elogiar a los jugadores y las 15 líneas restantes a comentar la labor arbitral. ¿Cuántas líneas tiene el artículo?

Ecuaciones de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado** es aquella equivalente a la ecuación formada por un polinomio de segundo grado igual a cero.

En general escribimos las ecuaciones de segundo grado como

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son tres números cuyo único requisito es que $a \neq 0$.

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Las ecuaciones incompletas son aquellas que tiene un término nulo.

Caso $ax^2 + c = 0$

Para resolver ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ despejamos de manera análoga a lo que hacíamos con las de primer grado, teniendo en cuenta que siempre habrá o bien 2 posibles soluciones (una positiva y otra negativa) o bien ninguna en absoluto.

$$3x^2 - 48 = 0$$
$$3x^2 = 48$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$

25. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 16 = 0$	*e*) $4x^2 + 100 = 0$	*i*) $x^2 - \frac{16}{121} = 0$
b) $5x^2 - 20 = 0$	*f*) $4x^2 - 100 = 0$	*j*) $\frac{1}{2}x^2 - 8 = 0$
c) $5x^2 + 20 = 0$	*g*) $10x^2 - 160 = 0$	*k*) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{27} = 0$
d) $3x^2 - 27 = 0$	*h*) $3x^2 - 75 = 0$	*l*) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4} = 0$

Caso $ax^2 + bx = 0$

Para resolver ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ extraemos factor común x y resolvemos separadamente las ecuaciones asociadas a cada factor.

$$9x^2 - 6x = 0$$
$$x \cdot (9x - 6) = 0$$
$$\swarrow \quad \searrow$$
$$\boxed{x = 0} \qquad 9x - 6 = 0$$
$$9x = 6$$
$$x = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

26. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 8x = 0$	*e*) $6x^2 + 12x = 0$	*i*) $x^2 - \frac{1}{3}x = 0$
b) $x^2 - 8x = 0$	*f*) $18x^2 - 9x = 0$	*j*) $\frac{3}{4}x^2 + x = 0$
c) $5x^2 + 30x = 0$	*g*) $2x^2 + 50x = 0$	*k*) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = 0$
d) $7x^2 - 28x = 0$	*h*) $7x^2 + 24x = 0$	*l*) $\frac{9}{5}x^2 - \frac{3}{25}x = 0$

Caso general

En general cualquier ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ puede resolverse utilizando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dependiendo de los valores que tome el radical $b^2 - 4ac$ podemos tener dos, una o ninguna solución.

27. Resuelve las siguientes ecuaciones, identificando los coeficientes y escribiendo la fórmula en cada uno de los casos:

a) $x^2 - x - 6 = 0$	*e*) $3x^2 - 9x + 12 = 0$	*i*) $x^2 - 3x + 2 = 0$
b) $-x^2 + 2x + 3 = 0$	*f*) $3x^2 - 9x - 30 = 0$	*j*) $x^2 - 20x + 100 = 0$
c) $x^2 - 2x - 8 = 0$	*g*) $2x^2 + 4x + 2 = 0$	*k*) $2x^2 + 4x = 0$
d) $6x^2 + 18x + 12 = 0$	*h*) $x^2 - 5x - 14 = 0$	*l*) $2x^2 - 4 = 0$

28. Resuelve las siguientes ecuaciones con soluciones racionales, identificando los coeficientes y escribiendo la fórmula en cada uno de los casos:

a) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$	*c*) $15x^2 + 7x - 2 = 0$	*e*) $x^2 - \frac{11}{10}x - \frac{3}{5} = 0$
b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$	*d*) $3x^2 - x - \frac{2}{3} = 0$	*f*) $x^2 - 0'01 = 0$

29. Resuelve las siguientes ecuaciones, identificando los coeficientes y escribiendo la fórmula en cada uno de los casos:

a) $3x^2 - 3x - 18 = 0$	*e*) $x^2 - 7x + 10 = 0$	*i*) $9x^2 - 30x + 25 = 0$
b) $x^2 + 8x + 16 = 0$	*f*) $-x^2 - 7x - 10 = 0$	*j*) $-2x^2 - 16x - 32 = 0$
c) $9x^2 - 24x + 16 = 0$	*g*) $2x^2 - 18 = 0$	*k*) $20x^2 - 60x + 45 = 0$
d) $5x^2 - 7x - 6 = 0$	*h*) $4x^2 + 12x + 19 = 0$	*l*) $6x^2 - 11x - 10 = 0$

30. Opera y resuelve:

a) $2x(3x - 5) + 7x(1 - x) = -10$	*f*) $3x^2 - 9x(2x + 2) + 4 = 7$
b) $3x^2 + x(5 - 3x) - 42 = 6(x - 7)$	*g*) $(3x - 1)^2 = -(3x + 1)(3x - 1)$
c) $2x(5x - 1) + 2(x - 5) = 0$	*h*) $(2 - 3x)^2 + 2(x - 1)^2 = 0$
d) $3x + 5x(x - 1) + 8x - 7 = -8$	*i*) $(1 - x)^2 + 3x^2 = 1$
e) $x(4x - 6) + 1 - 4x = -5$	*j*) $(2x + 3)^2 = (x + 3)(x - 3) + 3(4x + 6)$

Problemas con ecuaciones de segundo grado

Procedimiento para resolución de problemas

1. Indica los distintos datos y su relación con la incógnita.
2. Plantea la ecuación que relaciona esos datos.
3. Resuelve la ecuación.
4. Comprueba el resultado:
   Debe ser solución de la ecuación y además un valor factible para el problema.
5. Relee el problema y contesta a la pregunta con una frase breve.

Resuelve siguiendo los pasos indicados:

31. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 113. Halla dichos números.
32. Con una cuerda de $20m$ de longitud se ha construído un rectángulo de $21m^2$ de área.
    Calcula las dimensiones del rectángulo.
33. La superficie de una colchoneta de gimnasia es de $84m^2$. El largo es el doble del ancho más $2m$.
    Calcula las dimensiones de la colchoneta.
34. Un campo de fútbol el largo mide 30 metros más que el ancho, y tiene un área de $8\,800m^2$.
    Averigua las dimensiones del campo.
35. En un triángulo de $22cm^2$ de área, la base es $3cm$ mayor que el doble de la altura.
    ¿Qué dimensiones tiene el triángulo?
36. La suma de los cuadrados de dos números opuestos es 72. ¿Cuáles son esos números?
37. Una piscina con forma de ortoedro tiene $100m^3$ de capacidad. El largo de la base es el doble del ancho y la altura es de $2m$. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Sistemas de ecuaciones

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones interrelacionadas.
Una **solución de un sistema de ecuaciones** es un conjunto de valores numéricos (uno por cada incógnita) para los cuales todas las igualdades son ciertas.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x + 5y = \quad 7 \end{cases}$$

Tipos de soluciones

Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones lineales está compuesta de dos valores, uno para cada una de las incógnitas: $x = 1; y = \quad 1$.

Estas soluciones deben comprobarse sistemáticamente tras la resolución de un sistema, sustituyendo dichos valores **en ambas ecuaciones** y comprobando que se cumplen las igualdades.

$$\begin{cases} 4 \quad 1 + 3 \quad (\quad 1) = 1 \\ 2 \quad 1 + 5 \quad (\quad 1) = \quad 7 \end{cases}$$

1. Comprueba si $x = 3$, $y = 1$ es solución de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x + 5y = \quad 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 2y = 20 \\ 3x + 9y = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x \quad y = \quad 10 \\ 2x + 6y = 12 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 5 \\ \frac{1}{2}x \quad \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$

- Si llegamos a una ecuación del tipo $0x = 0$, nuestro sistema tiene **infinitas soluciones** puesto que ambas ecuaciones son equivalentes.
- Si llegamos a una ecuación del tipo $0x =$nº, nuestro sistema **no tiene solución** puesto que ambas ecuaciones son incompatibles.

Resolución por sustitución

Método de sustitución

1. Despeja una variable (la de tu elección) en una de las ecuaciones (la de tu elección).
2. Sustituye el valor obtenido en la otra ecuación.
3. Resuelve la ecuación de primer grado obtenida, hallando el valor de una de las incógnitas.
4. Sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones originales (o en el despeje) para obtener el valor de la otra incógnita.
5. Comprueba la solución.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 & \to \boxed{y = \dfrac{1 \quad 4x}{3}} \\ 2x + 5y = \quad 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= \quad 7 \\ 2x + 5\,\frac{1 \quad 4x}{3} &= \quad 7 \\ 6x + 5(1 \quad 4x) &= \quad 21 \\ 6x + 5 \quad 20x &= \quad 21 \\ 6x \quad 20x &= \quad 21 \quad 5 \\ 26x &= \quad 26 \\ \boxed{x = 1} \end{aligned}$$

$$y = \frac{1 \quad 4x}{3} = \frac{1 \quad 4 \; 1}{3} = \frac{1 \quad 4}{3} = \frac{\;3}{3}$$

$$\boxed{y = \quad 1}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 4x + 2y = 18 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \quad y = 1 \\ 3x \quad 3y = \quad 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x \quad y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x \quad 3y = 9 \\ 4x \quad 3y = 18 \end{cases}$

3. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x \quad 3y = \quad 1 \\ 5x \quad 7y = \quad 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x \quad 7y = 5 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \quad 2y = 1 \\ 3x + 2y = \quad 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x \quad 2y = 20 \\ 5x \quad 6y = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 8x \quad 2y = 5 \\ 6x \quad 5y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$

Resolución por igualación

Método de igualación

1. Despeja una variable (la de tu elección) en ambas ecuaciones.
2. Iguala ambas expresiones algebraicas.
3. Resuelve la ecuación de primer grado obtenida, obteniendo el valor de una de las incógnitas.
4. Sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones originales (o en el despeje) para obtener el valor de la otra incógnita.
5. Comprueba la solución.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 & \rightarrow \quad \boxed{y = \dfrac{1 \quad 4x}{3}} \\ 2x + 5y = \quad 7 & \rightarrow \quad \boxed{y = \dfrac{\quad 7 + 2x}{5}} \end{cases}$$

$$\frac{1 \quad 4x}{3} = \frac{\quad 7 + 2x}{5} \qquad\qquad y = \frac{1 \quad 4x}{3} = \frac{1 \quad 4 \quad 1}{3} = \frac{1 \quad 4}{3}$$

$$5(1 \quad 4x) = 3(\quad 7 + 2x) \qquad\qquad \boxed{y = \quad 1}$$

$$5 \quad 20x = \quad 21 + 6x$$

$$\quad 20x \quad 6x = \quad 21 \quad 5$$

$$\quad 26x = \quad 26$$

$$\boxed{x = 1}$$

4. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 4x + 2y = 18 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \quad y = 1 \\ 3x \quad 3y = \quad 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x \quad y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x \quad 3y = 9 \\ 4x \quad 3y = 18 \end{cases}$

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación:

a) $\begin{cases} 2x \quad 3y = \quad 1 \\ 5x \quad 7y = \quad 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x \quad 7y = 5 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \quad 2y = 1 \\ 3x + 2y = \quad 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x \quad 2y = 20 \\ 5x \quad 6y = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 8x \quad 2y = 5 \\ 6x \quad 5y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$

Resolución por reducción

Método de reducción

1. Multiplica cada una de las ecuaciones por un número adecuado, de tal modo que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos.
2. Suma ambas expresiones.
   Si el paso anterior se realizó de forma correcta, una de las incógnitas se anulará.
3. Resuelve la ecuación de primer grado obtenida, obteniendo el valor de una de las incógnitas.
4. Sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones originales para obtener el valor de la otra incógnita.
5. Comprueba la solución.

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+3y=1 \\ 2x+5y=-7 \end{array}\right. \begin{array}{l} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{2} \end{array} \begin{array}{r} 4x+3y=1 \\ \underline{4x+10y=14} \\ 0x+13y=-13 \end{array} \rightarrow \boxed{y=-1}$$

$$4x+3(-1)=1 \rightarrow 4x-3=1 \rightarrow 4x=1+3 \rightarrow 4x=4 \rightarrow x=\frac{4}{4} \rightarrow \boxed{x=1}$$

6. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=10 \\ x+3y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=9 \\ 4x+2y=18 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-y=1 \\ 3x-3y=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y=2 \\ x+y=4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-3y=9 \\ 4x-3y=18 \end{cases}$

7. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción:

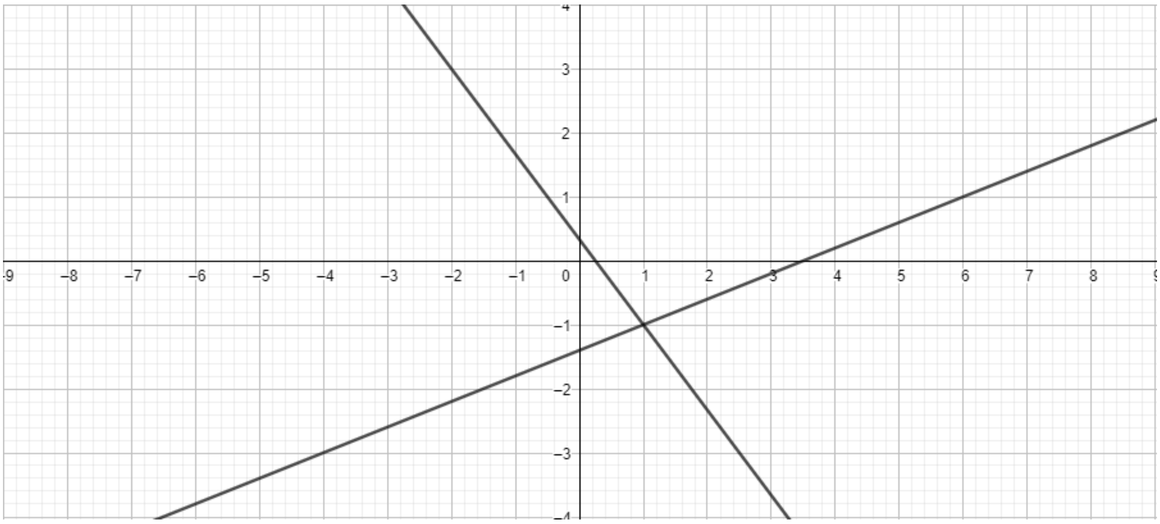
a) $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 5x-7y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-7y=5 \\ 2x+5y=13 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+2y=-5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x-2y=20 \\ 5x-6y=16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 8x-2y=5 \\ 6x-5y=2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x+3y=4 \\ 2x+6y=3 \end{cases}$

Resolución gráfica

La solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas corresponde con las coordenadas del punto de intersección de sus gráficas representadas en el plano.

Para resolver un sistema gráficamente utilizaremos la calculadora gráfica de Geogebra.



El punto de intersección de las dos rectas tiene coordenadas $(1; \quad 1)$ por lo tanto la solución a nuestro sistema es: $x = 1$, $y = \quad 1$.

8. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método gráfico:

a) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 4x + 2y = 18 \end{cases}$
e) $\begin{cases} x \quad y = 1 \\ 3x \quad 3y = \quad 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x \quad y = 1 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$
f) $\begin{cases} x \quad 3y = 9 \\ 4x \quad 3y = 18 \end{cases}$

9. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método gráfico:

a) $\begin{cases} 2x \quad 3y = \quad 1 \\ 5x \quad 7y = \quad 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 3x \quad 7y = 5 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$
e) $\begin{cases} x \quad 2y = 1 \\ 3x + 2y = \quad 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x \quad 2y = 20 \\ 5x \quad 6y = 16 \end{cases}$
d) $\begin{cases} 8x \quad 2y = 5 \\ 6x \quad 5y = 2 \end{cases}$
f) $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$

PROBLEMAS

PROCEDIMIENTO PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Indica los distintos datos y su relación con las incógnitas.
2. Plantea dos ecuaciones que relacionen esos datos.
3. Resuelve el sistema por el método de tu elección.
4. Comprueba el resultado: debe ser solución de ambas ecuaciones y además un valor factible para el problema.
5. Relee el problema y contesta a la pregunta con una frase breve.

RESUELVE SIGUIENDO LOS PASOS INDICADOS.

10. La suma de dos números es 157 y su diferencia es 41. ¿De qué numeros se trata?
11. La edad de María es el cuádruple que la de su hija. Dentro de 20 años, la edad de María será el doble que la de su hija. ¿Qué edad tienen?
12. Tengo 24 monedas repartidas en dos huchas. Si paso 5 monedas de una hucha a la otra, tendré el mismo número de monedas en cada una. ¿Cuántas monedas hay en cada hucha?
13. Teniendo en cuenta que una garrafa de una bebida equivale a 5 botellas y que tres garrafas y 7 botellas suman 11 litros, ¿qué capacidad tiene cada garrafa y cada botella?
14. Paloma ha vendido 50 docenas de huevos en el mercado. A la mañana los vendía a 3 e la docena, pero a la tarde la ha rebajado a 2 e por no estar tan frescos.
    Si ha ganado 138 e, ¿cuántas docenas ha vendido por la mañana y cuántas por la tarde?
15. Por la mezcla que 8 litros y 3 litros de vino de distintas calidades se ha pagado un total de 30 e.
    Si por comprar un litro de cada uno pagaríamos 5 e, calcula el precio de cada tipo de vino.
16. Un vendedor mezcla dos variedades de café. El kilo de la primera variedad cuesta 3'60 e y el kilo de la segunda cuesta la mitad.
    Si ha obtenido 20kg de la mezcla y el precio es de 2'43 epor kilo, ¿qué cantidad ha utilizado de cada variedad?
17. Para elaborar un kilo de chocolate con una pureza del 75 % se han mezclado dos cacaos, uno puro al 90 % y otro puro al 50 %. ¿Cuánto han utilizado de cada uno de ellos?
18. Un móvil y una tableta cuestan 500 e, pero una empresa de telefonía me ofrece el móvil con un 50 % de descuento y la tableta con un 15 % de descuento si acepto un contrato de permanencia.
    Con esa oferta el precio se queda en 320 e.
    ¿Cuál era el precio original de cada artículo?

EJERCICIOS DE REPASO:

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución, el método de igualación y el método de reducción. Recuerda comprobar las soluciones.

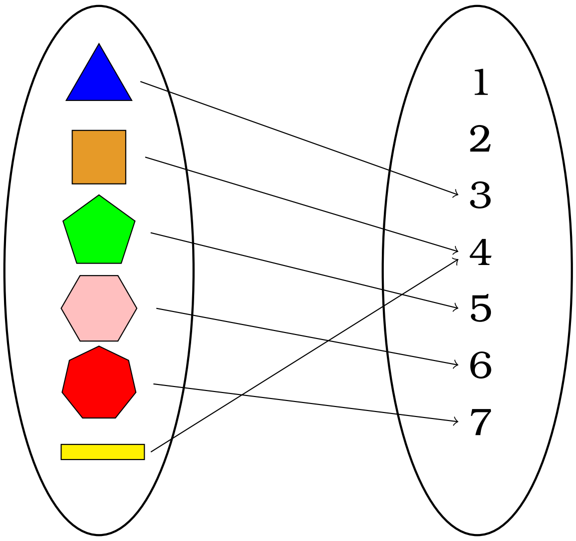
$a) \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 3x \quad 5y = \quad 17 \end{cases}$ $c) \begin{cases} x \quad 3y = 1 \\ 2x + 6y = \quad 2 \end{cases}$ $e) \begin{cases} 2x \quad 5y = 3 \\ 4x \quad 10y = 4 \end{cases}$

$b) \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$ $d) \begin{cases} 2x \quad 5y = \quad 9 \\ 4x + y = 4 \end{cases}$ $f) \begin{cases} 3x \quad 10y = 8 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

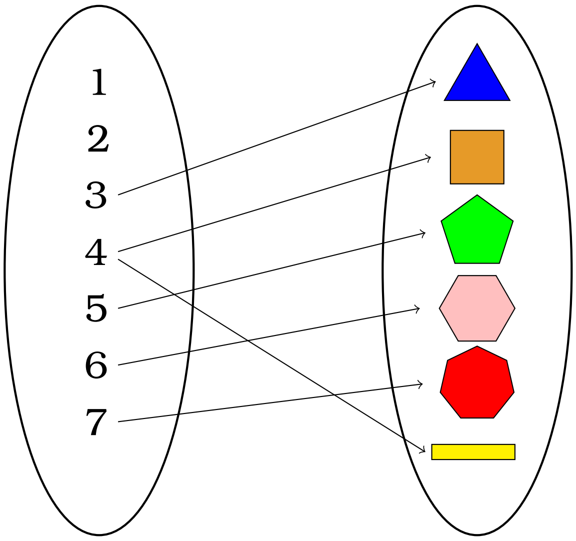
Gráficas y funciones

Correspondencia y función

Una **correspondencia** es cualquier relación entre los elementos de dos conjuntos.
Una **función** es una correspondencia tal que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un único valor del conjunto final.



La correspondencia entre figuras geométricas y su número de lados es una función, porque de cada figura sale una única flecha.



En cambio, la correspondencia entre números y las figuras con esa cantidad de lados NO es correspondencia.

1. La relación entre el número de DNI y la letra del mismo es una función, pero la relación entre la letra del DNI y el número no lo es. ¿Por qué?

2. Los alumnos de una clase aportan varios datos personales para una estadística, y se relacionan los siguientes datos:

   a) El número de orden de clase con el número de hermanos.

   b) El DNI con el primer apellido.

   c) El primer apellido con el número de orden de clase.

   d) El número de hermanos con el DNI.

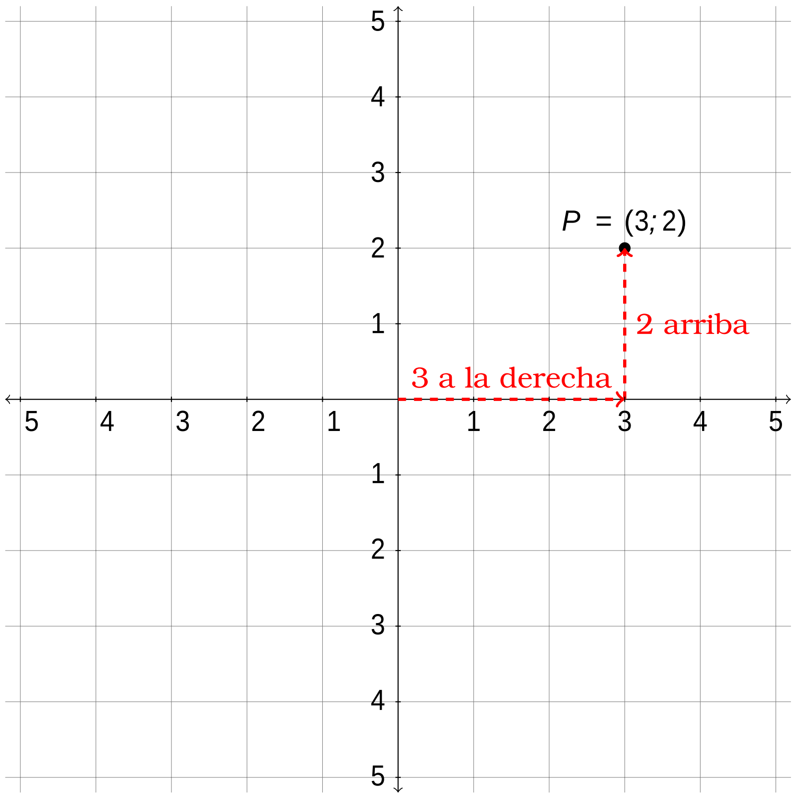
   ¿Alguna de esas correspondencias es una función?

3. Se define la correspondencia entre la fecha de nacimiento de una persona y la suma de las cifras de esa misma fecha. ¿Es función?

Coordenadas en el plano

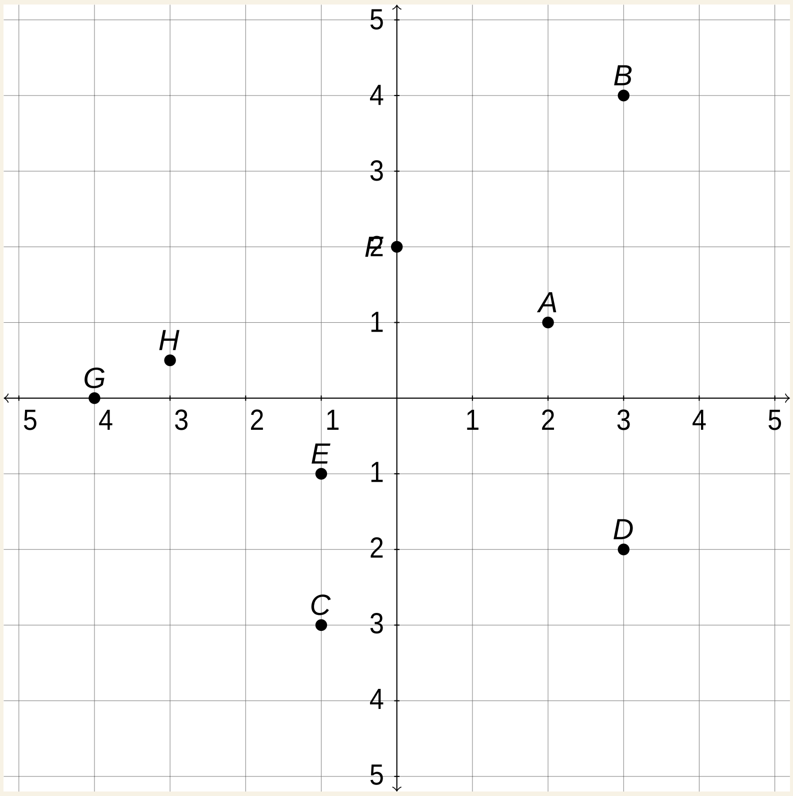
Para representar puntos en el plano utilizamos dos rectas perpendiculares graduadas llamadas **ejes de coordenadas** o **ejes cartesianos**.
Utilizándolas como referencia, cada punto tiene dos coordenadas del tipo $(x; y)$.

- El punto de corte de ambos ejes se llama **origen**, y sus coordenadas son $(0; 0)$.
- El eje horizontal se llama eje X o **eje de abscisas**.
  A la derecha del origen la coordenada x es positiva, y al izquierda es negativa.
- El eje vertical se llama eje Y o **eje de ordenadas**.
  Por encima del origen la coordenada y es positiva, y por debajo es negativa.



El plano se divide en cuatro cuadrantes, que se ordenan desde el superior izquierda siguiendo un giro contrario al de las agujas del reloj.

4. Escribe las coordenadas de los puntos representados:



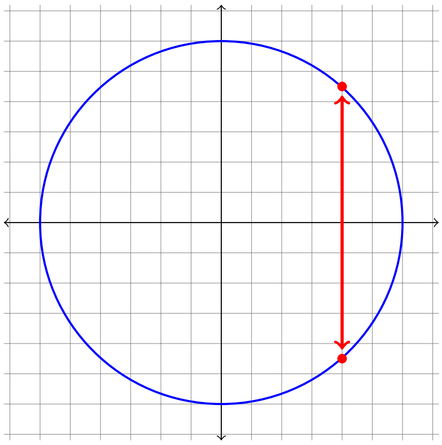
5. Representa los siguientes puntos en el eje cartesiano:

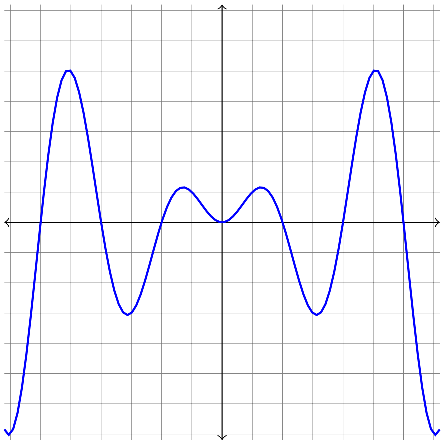
a) $A = (4; 1)$	*c*) $C = (3; \quad 1)$	*e*) $E = (0; 6)$	*g*) $G = (6; 2)$
b) $B = (2; 7)$	*d*) $D = (\quad 4; 5)$	*f*) $F = (\quad 2; \quad 3)$	*h*) $H = (3; 0)$

6. Representa en un plano cartesiano el punto $P = (4; 3)$.
   Representa también otros cuatro puntos que equidisten de P (es decir, que estén todos a la misma distancia de P).

Las **funciones numéricas** que estudiaremos en este tema relacionan dos magnitudes, por eso pueden representarse como parejas de números $(x; y)$, es decir, como puntos en un plano cartesiano.

En este caso, para ser función debe asegurarse que para cada valor de la coordenada x existe un único valor de la coordenada y, o lo que es lo mismo, que **para cada** x **existe un único punto** en la gráfica.

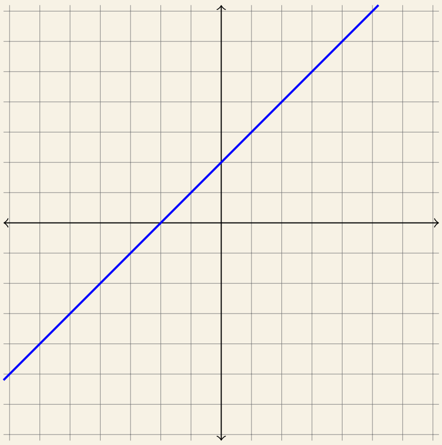


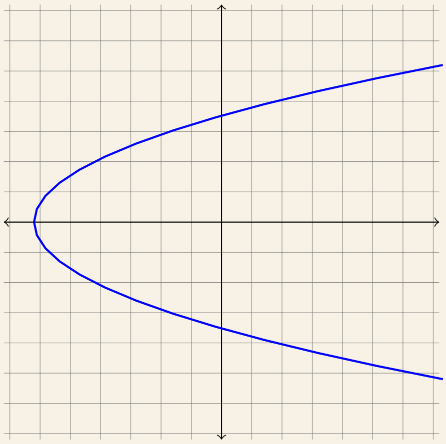


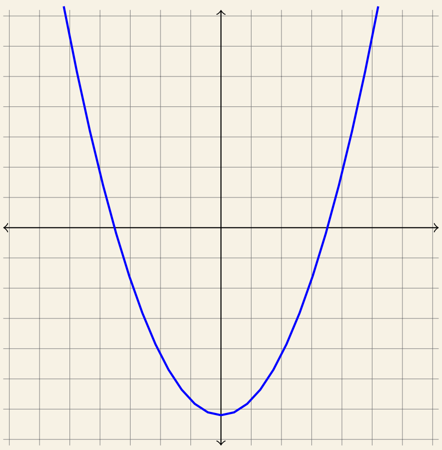
Si hay dos puntos con el mismo valor de x (es decir, están en la misma recta vertical) entonces NO es función.

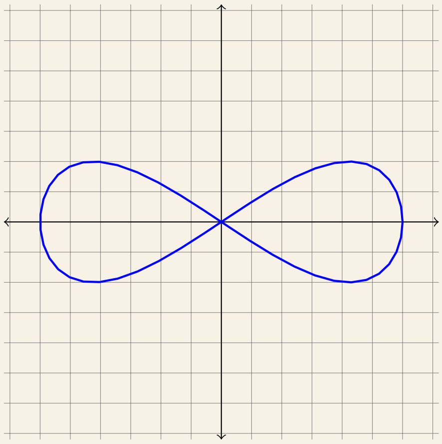
Aún así, una función puede tener formas bastante complicadas y llegar a estar en ocasiones a la misma altura.

7. Indica si las siguientes gráficas corresponden a una función:









Fórmulas, tablas y gráficas

Las funciones expresan la relación entre dos magnitudes.
Esa relación puede describirse algebraicamente (con una fórmula), a través de una serie de datos numéricos (con una tabla de datos) o bien utilizando un representación visual de los mismos (con una gráfica).

Tomemos por ejemplo la siguiente expresión:

Cada kilo de manzanas cuesta 1'90 e.

Para poder hallar la fórmula de la función debemos tener claro cuáles son las dos magnitudes involucradas (en este caso, peso y precio) y relacionarlas mediante una expresión algebraica:

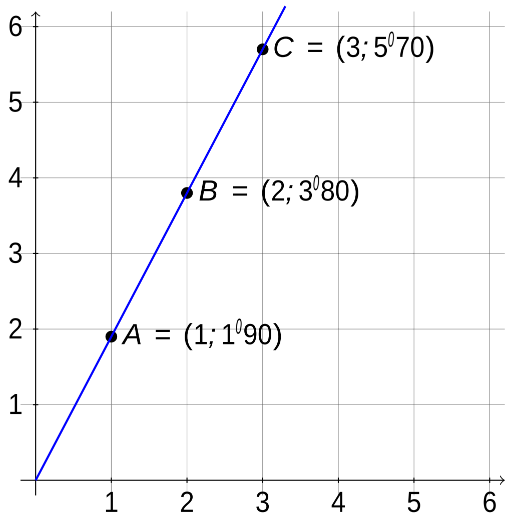
$$\begin{array}{lll} \text{peso} & ! & x \\ \text{precio} & ! & y \end{array} \quad ! \quad \boxed{y = 1^{0}90 \quad x}$$

A partir de esta función podemos rellenar una tabla de valores, sustituyendo valores de x en la fórmula para obtener valores de y:

$$\begin{array}{lll} x = 1 & ! & y = 1^{0}90 \quad 1 = 1^{0}90 \\ x = 2 & ! & y = 1^{0}90 \quad 2 = 3^{0}80 \\ x = 2 & ! & y = 1^{0}90 \quad 3 = 5^{0}70 \end{array} \quad !$$

x (kg)	1	2	3
y (e)	$1^{0}90$	$3^{0}80$	$5^{0}70$

Los pares $(x; y)$ de la tabla de valores se pueden representar en un plano, y al unirlos de la forma apropiada nos dará una gráfica que describe nuestra función:

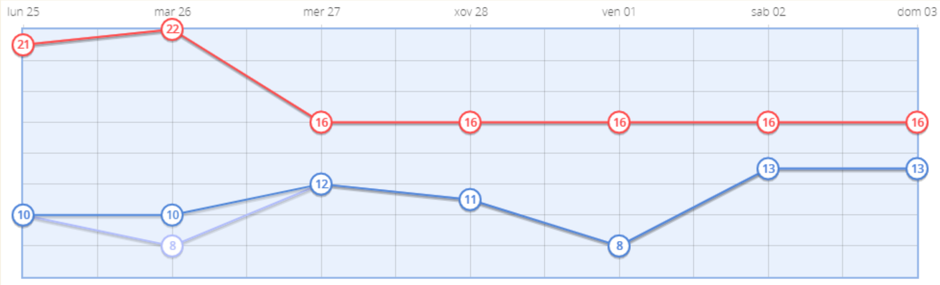


8. Dos magnitudes están relacionadas mediante la fórmula $y = 3x \quad 4$.

   a) Construye la tabla de valores correspondiente.

   b) Representa la gráfica en un eje cartesiano.

9. Construye la tabla de valores correspondiente a las siguiente gráficas:

   a) 

   b) 

   c)

10. Construye la tabla de valores y representa la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = x$	c) $y = \quad x + 1$	e) $y = (x + 1)^2$	g) $y = 2x \quad \frac{1}{2}$
b) $y = x^2$	d) $y = x^2 + 1$	f) $y = 3x + 4$	h) $y = \frac{1}{2}x \quad 1$

11. La base de un rectángulo mide el doble que la altura.

    a) Si x es la altura, expresa algebraicamente la base.

    b) Si llamamos y al perímetro del rectángulo, escribe la función que permite obtener el perímetro a partir de la altura.

    c) Representa en unos ejes cartesianos la gráfica que relaciona el perímetro con la altura.

12. La base de un rectángulo mide 1cm más que la altura.

    a) Si x es la altura, expresa algebraicamente la base.

    b) Si llamamos y al área del rectángulo, escribe la función que permite obtener el área a partir de la altura.

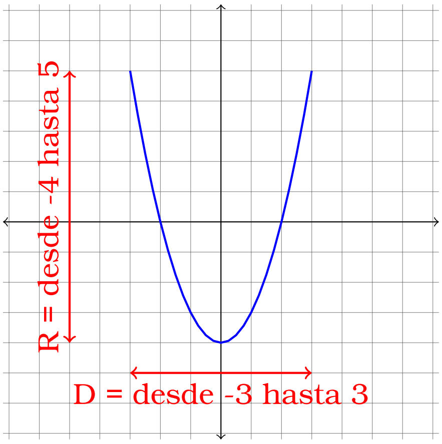
    c) Construye una tabla de valores para los siguientes valores de x: -4, -3,-2, -1, 0, 1, 2, 3.

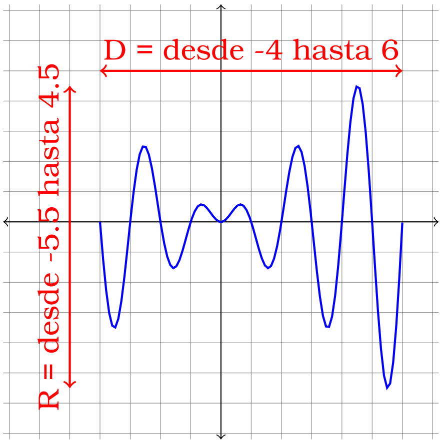
    d) Representa en unos ejes cartesianos la gráfica que relaciona el área con la altura.

ESTUDIO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

DOMINIO Y RECORRIDO

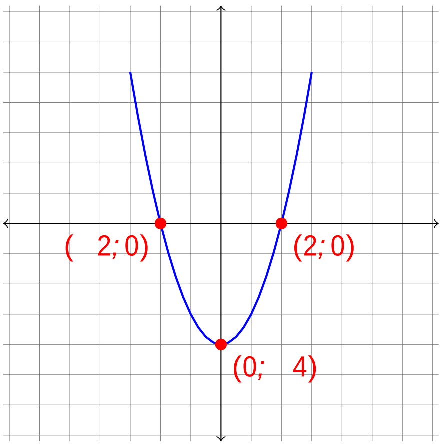
El **dominio** de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (x), es decir, *de izquierda a derecha*.
El **recorrido** de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente (y), es decir, *de abajo a arriba*.

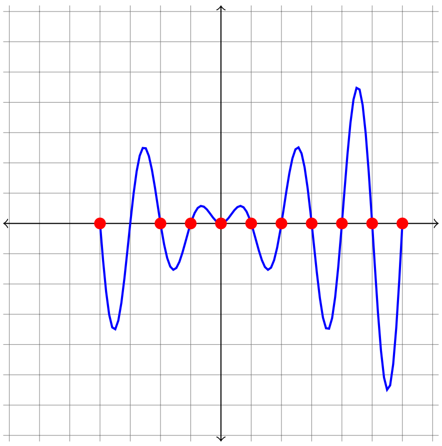




PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

Para conocer y representar la gráfica de una función es conveniente conocer los puntos de corte con los ejes coordenados, es decir, aquellos puntos en los que la función pasa exactamente por cada uno de los ejes.



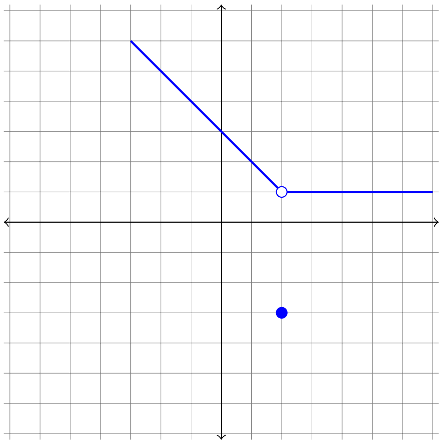


- Los **puntos de corte con el eje horizontal** tienen siempre la segunda coordenada nula: $(x; 0)$
- Como mucho puede haber un **punto de corte con el eje vertical**, y tiene siempre la primera coordenada nula: $(0; y)$

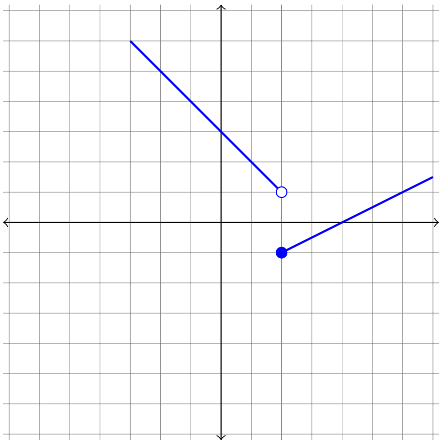
Continuidad

Una función es **continua** si su gráfica podría dibujarse sobre un papel sin levantar el lápiz en ningún momento. En caso contrario decimos que tiene una **discontinuidad** y la clasificamos en dos tipos diferentes:

Discontinuidad evitable: Hay un punto colocado en una posición que no es la adecuada para ser continua.



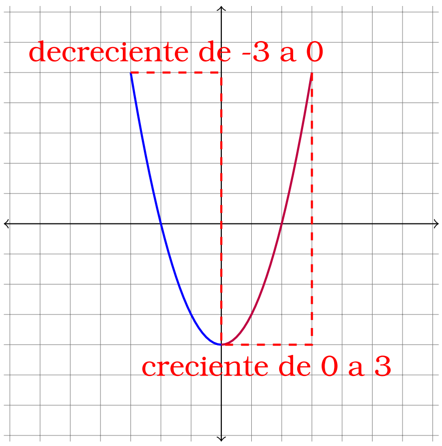
Discontinuidad de salto: Hay un salto vertical (hacia arriba o hacia abajo, pero no hacia los lados) entre un trozo de línea y el siguiente.

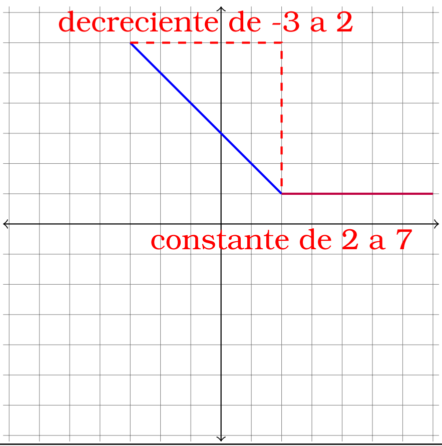


Monotonía

El estudio de la **monotonía** consiste en observar en qué intervalos la función es creciente, decreciente o constante.

- **Creciente:** al aumentar el valor de la variable independiente también aumenta el valor de la variable dependiente.
  En la gráfica, cuando nos movemos a la derecha también nos movemos hacia arriba.
- **Decreciente:** al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el valor de la variable dependiente.
  En la gráfica, cuando nos movemos a la derecha también nos movemos hacia abajo.
- **Constante:** la variable dependiente toma siempre el mismo valor.
  En la gráfica resulta un segmento horizontal.



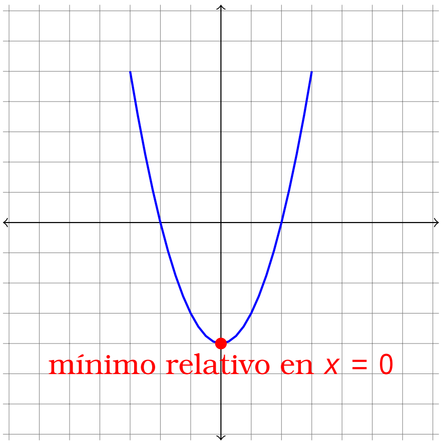


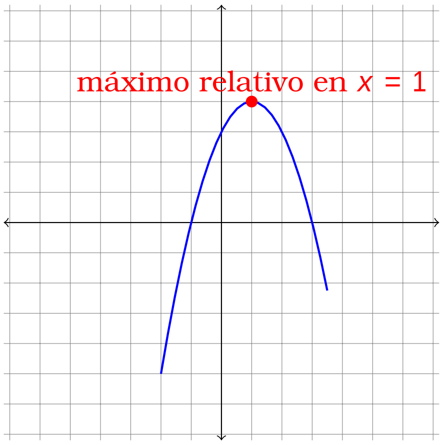
EXTREMOS

Los **extremos relativos** de una función son aquellos puntos en los que la gráfica muestra un punto más elevado o más bajo que aquellos a su alrededor.

- **Máximo:** A su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente. Parece la cima de una colina.

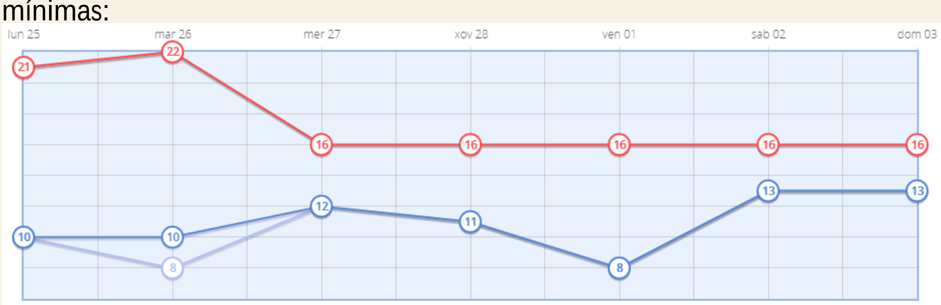
- **Mínimo:** A su izquierda la función es decreciente y a su derecha creciente. Parece el punto más bajo de un valle.



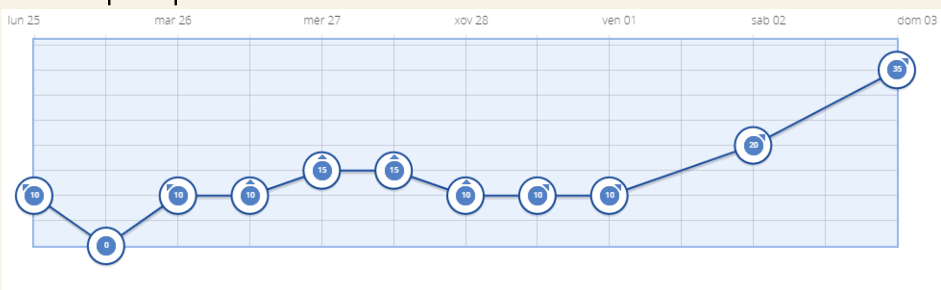


13. Estudia las siguiente gráficas, extraídas de la web de AEMET:

    a) La gráfica roja representa temperaturas máximas, la gráfica azul representa temperaturas mínimas:

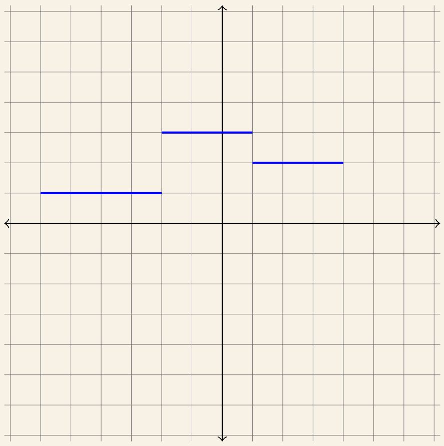


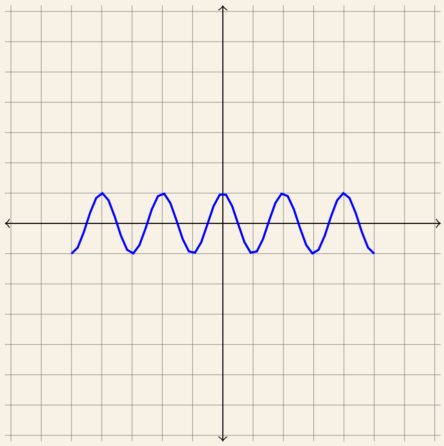
    b) Gráfica que representa la velocidad del viento:

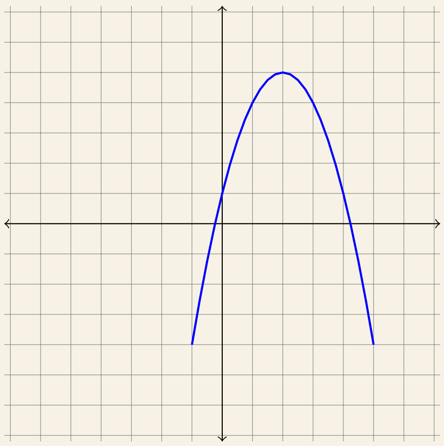


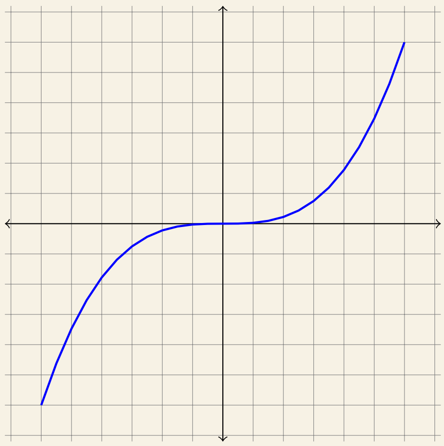
c) Gráfica que representa la probabilidad de precipitaciones:

14. Estudia las siguientes gráficas de funciones:



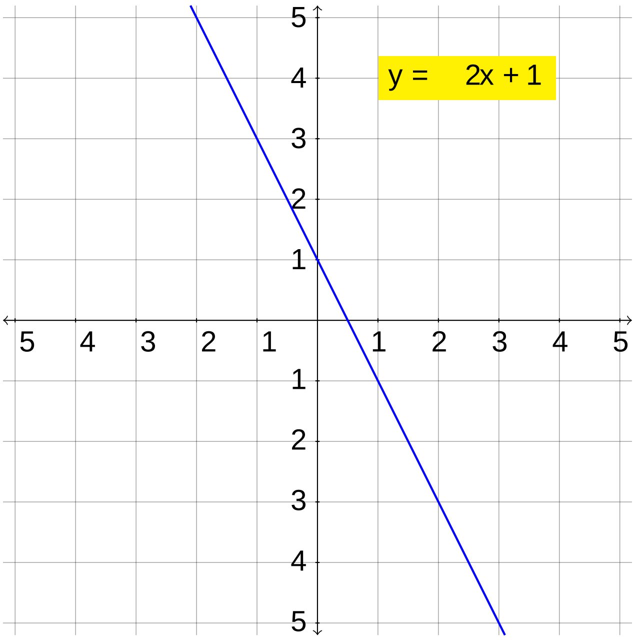






FUNCIÓN LINEAL

Una función lineal es una función de la forma $y = mx + n$ donde m y n son dos números conocidos.
Le llamamos lineal porque su grá ca se corresponde con una línea recta.



En este curso no estudiaremos las rectas verticales, cuya ecuación es de la forma $x = x_0$, porque no son la grá ca de ninguna función.

15. Construye la tabla de valores y representa la grá ca de las siguientes funciones lineales:

a) $y = x + 3$	c) $y = 3x$	e) $y = \quad 2$	g) $y = \quad x + 4$
b) $y = x \quad 3$	d) $y = \quad 3x$	f) $y = 4x \quad 1$	h) $y = 1 \quad x$

16. Comprueba si el punto $P = (3; 2)$ pertenece a alguna de las siguientes rectas:

a) $y = x + 1$	b) $y = 2x \quad 3$	c) $y = 7 \quad 3x$	d) $y = 3x \quad 7$

Para hallar la ecuación de una recta es su ciente con conocer dos puntos de la misma.

APLICACIÓN DE SISTEMAS LINEALES

Lo que hemos aprendido sobre sistemas de ecuaciones es su ciente para hallar la expresión algebraica de una función lineal de un modo rudimentario.
Sustituyendo los valores de sus coordenadas en la expresión $y = mx + n$ obtenemos sendas ecuaciones con incógnitas m y n que podemos resolver con cualquiera de los métodos vistos en el tema anterior.

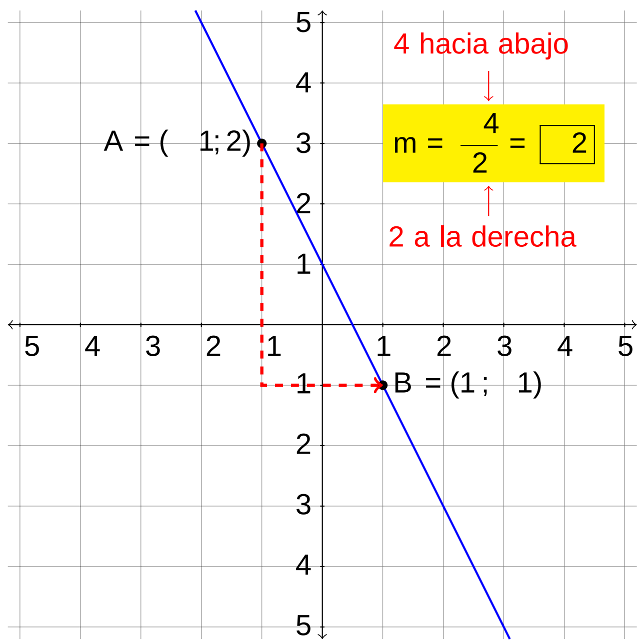
A = (3 ; 2) ! 2 = m 3 + n
B = (4 ; 1) ! 1 = m 4 + n) ! resolvemos $\boxed{m = \;\; 3; n = 11}$

17. Halla la expresión algebraica (y = mx + n) de las funciones lineales que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos:

a) A = (0 ; 1), B = (2 ; 3)
b) C = (3 ; 4), D = (2 ; 3)
c) P = (5; 3), Q = (3; 3)
d) R = (1 ; 7), S = (1; 3)
e) F = (3 ; 1), G = (2 ; 1)
f) X = (0 ; 0), Y = (5; 3)

PENDIENTE Y ORDENADA DE LA RECTA

La pendiente representa la inclinación de la recta y corresponde al valor m.



Para calcularla necesitaremos dos puntos de la recta, y observar el modo cuánto nos trasladamos hacia arriba por cada punto que nos trasladamos hacia la derecha.
Lo que puede resumirse en la siguiente fórmula:

$$m = \frac{y_B \quad y_A}{x_B \quad x_A}$$

- Si la pendiente es positiva (m > 0) la función lineal es creciente.
- Si la pendiente es cero (m = 0) la función lineal es constante.
- Si la pendiente es negativa (m < 0) la función lineal es decreciente.

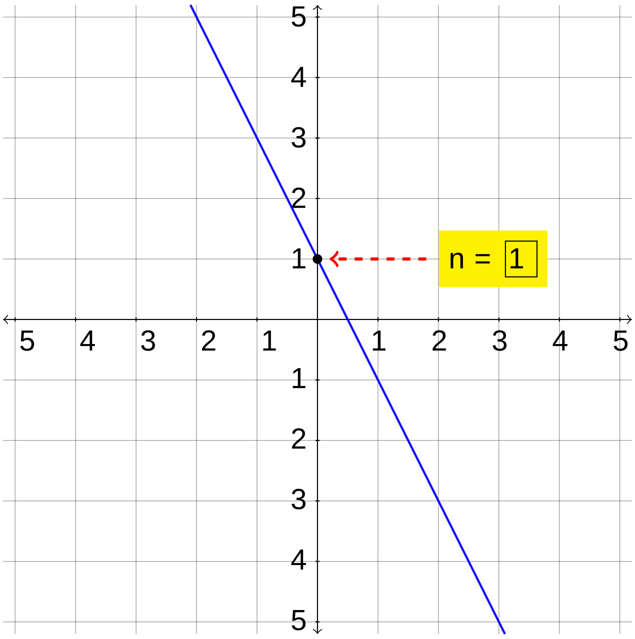
18. Indica si las siguientes funciones son crecientes, decrecientes o constantes:

a) $y = x + 3$	c) $y = 3x$	e) $y = \quad 2$	g) $y = \quad x + 4$
b) $y = x \quad 3$	d) $y = \quad 3x$	f) $y = 4x \quad 1$	h) $y = 1 \quad x$

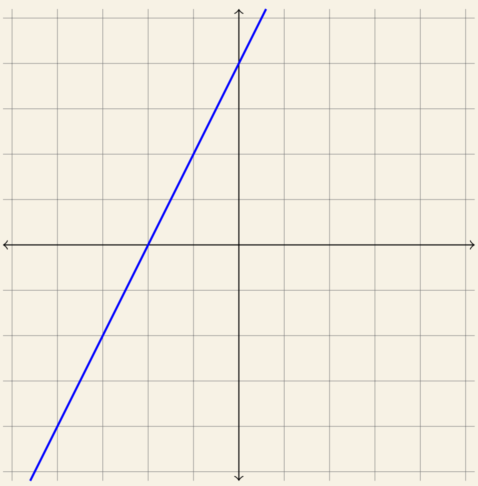
19. Calcula la pendiente de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos. ¾Son crecientes, decrecientes o constantes?

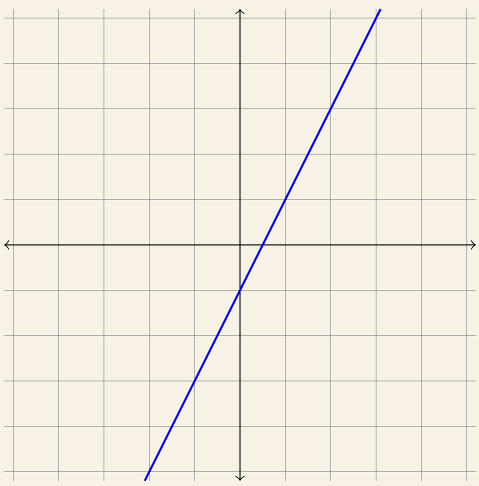
a) $A = (3;4)$, $B = (2;5)$	d) $G = (2;1)$, $H = (5;3)$
b) $C = (3;4)$, $D = (4;3)$	e) $I = (\quad 4;3)$, $J = (\quad 5;0)$
c) $E = (0;0)$, $F = (\quad 2;\quad 4)$	f) $K = (\quad 2;\quad 4)$, $L = (2;\quad 4)$

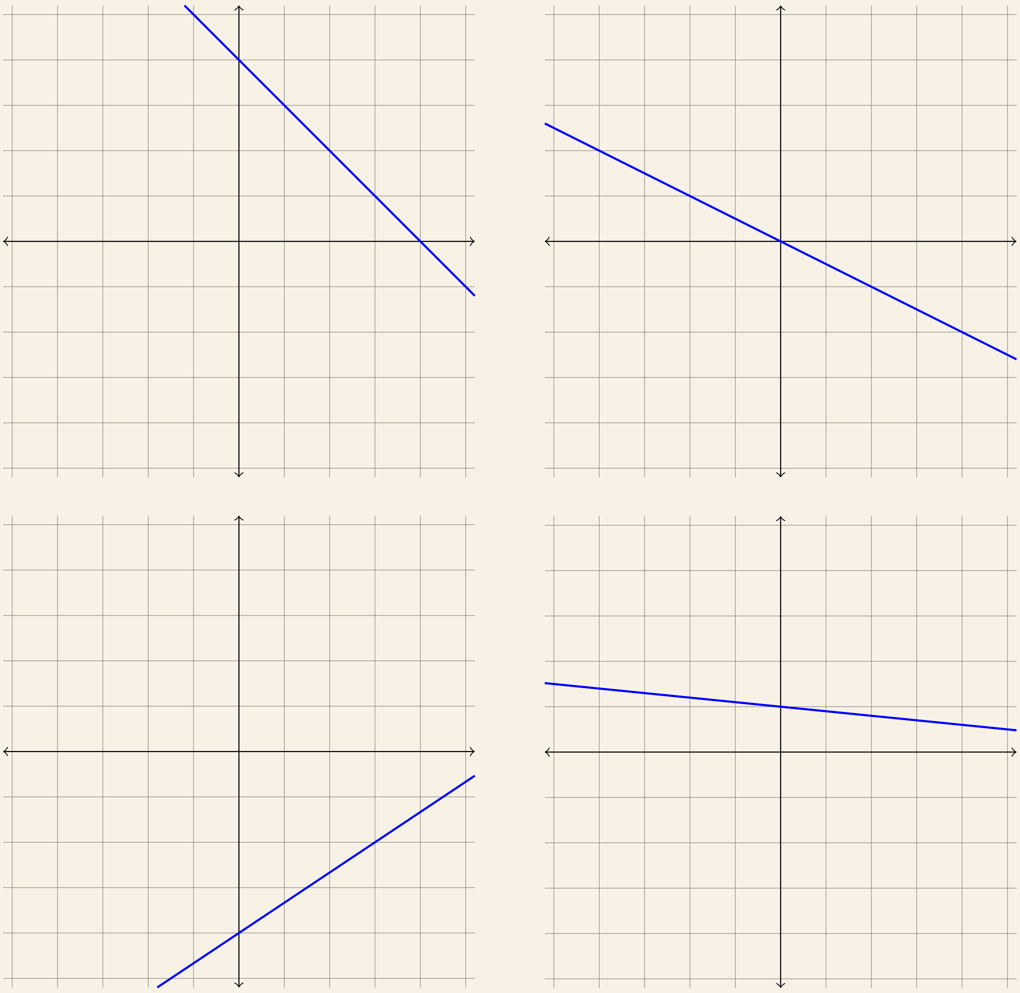
El término independiente (también llamado ordenada respecto al origen) representa la altura a la que se encuentra la recta y corresponde al valor n.
Para hallarlo solo necesitaremos observar el punto de la recta que corta al eje vertical.



20. Observa las siguientes gráficas y deduce cuál es su expresión algebraica ($y = mx + n$):







21. Halla la expresión algebraica ($y = mx + n$) de las funciones lineales que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, utilizando la fórmula de obtención de la pendiente:

a) A = (0 ; 1), B = (2 ; 3)

b) C = (3 ; 4), D = (2 ; 3)

c) P = (5; 3), Q = (3; 3)

d) R = (1 ; 7), S = (1; 3)

e) F = (3 ; 1), G = (2 ; 1)

f) X = (0 ; 0), Y = (5; 3)

Geometría plana

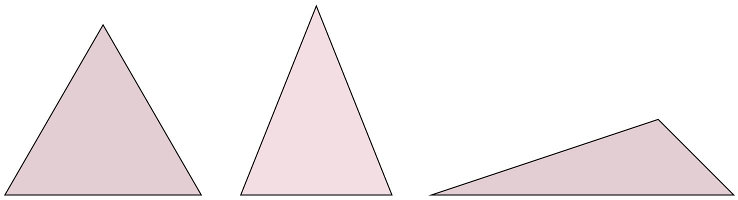
Figuras poligonales

Un polígono es una gura geométrica limitada por una serie de segmentos a los que llamamos lados del polígono.
El punto común de dos de los lados se llama vértice .

Triángulo

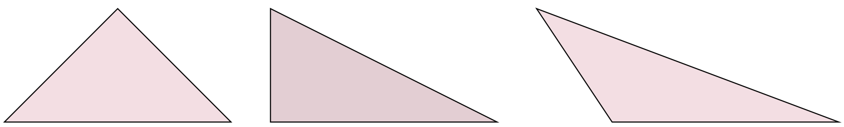
Los triángulos pueden clasi carse según sus lados:

- Equilátero: triángulo cuyos lados son todos iguales.
- Isósceles: triángulo con dos lados iguales entre si y otro distinto.
- Escaleno: triángulo con todos los lados distintos.



Los triángulos también pueden clasi carse según sus ángulos:

- Acutángulo: triángulo cuyos lados son todos agudos (es decir, menores de 90 o).
- Rectángulo: triángulo que tiene un ángulo rectángulo (es decir, de 90 o).
- Obtusángulo: triángulo que tiene un ángulo obtuso (es decir, de más de 90 o).



1. Dibuja un triángulo equilátero. ¾Es acutángulo, rectángulo u obtusángulo?
2. ¾Puede un triángulo rectángulo ser equilátero? ¾E isósceles? ¾Y escaleno?
3. ¾Puede un triángulo obtusángulo ser equilátero? ¾E isósceles? ¾Y escaleno?

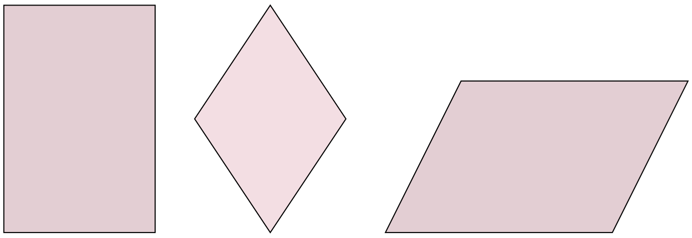
Cualquier gura poligonal puede descomponerse en triángulos, por lo que el estudio de esta gura es fundamental para poder trabajar con cualquier otro polígono.

CUADRILÁTEROS

Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados, que pueden clasi carse en:

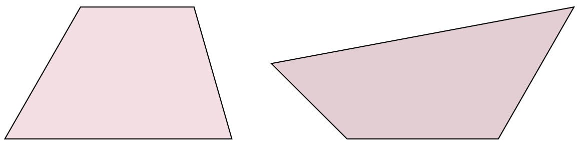
Paralelogramos , es decir, con los lados paralelos dos a dos.

- Rectángulos: tienen los cuatro ángulos rectos.
- Rombos: tienen los cuatro lados iguales.
- Romboides: Tienen los ángulos y los lados iguales dos a dos.



No paralelogramos :

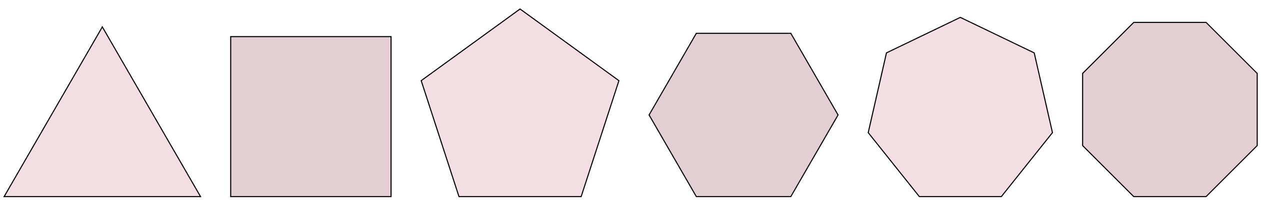
- Trapecios: Solo dos lados paralelos entre sí.
- Trapezoide: Ningún lado es paralelo a otro.



4. ¾En qué categoría clasi carías un cuadrado?

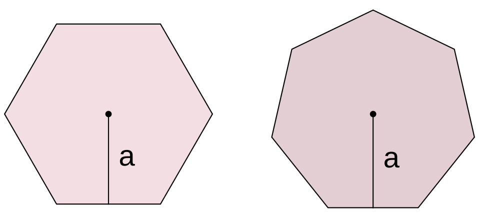
POLÍGONOS REGULARES

Un polígono regular es aquel que tiene sus lados iguales y sus ángulos iguales.



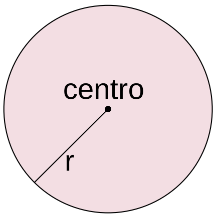
5. ¾Cuál es el triángulo regular? ¾Y el cuadrilátero regular?

Para el estudio de polígonos regulares de 5 o más lados, necesitaremos conocer un segmento llamado apotema , que tiene de extremos el centro de la gura y el punto central de uno de sus lados.



6. a) Representa la apotema en un triángulo equilátero, en un cuadrado, en un pentágono regular y en un octógono regular.
   b) ¾Cuántas apotemas podrías dibujar en cada una de esas guras?

Figuras circulares



La circunferencia es una curva cerrada cuyos puntos equidistan de otro llamado centro. Esa distancia se llama radio.

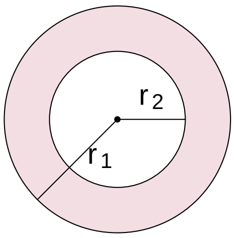
La gura geométrica delimitada por una circunferencia se llama círculo.

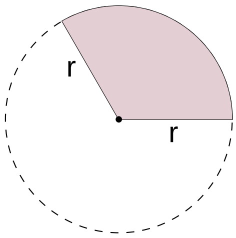
Estudiaremos además otras guras circulares más complejas:

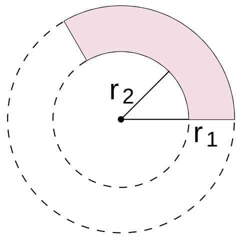
La corona circular es una -gura encerrada entre dos circunferencias concéntricas.

El sector circular es una gura encerrada entre dos radios y una cuerda circular.

El trapecio circular es la -gura equivalente a un sector de una corona circular.

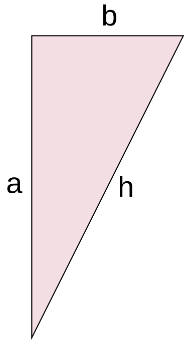






7. Utiliza compás para dibujar las siguientes guras:
   a) Una corona circular de radios 1 cm y 3 cm.
   b) Una corona circular de radios 2 cm y 3 cm.
   c) Un sector circular de radio 3 cm y ángulo 180º
   d) Un sector circular de radio 3 cm y ángulo 90º
   e) Un sector circular de radio 3 cm y ángulo 45º
   f) Una corona circular de radios 2cm y 3 cm y ángulo 270º

Teorema de Pitágoras



Uno de los teoremas clásicos de la geometría es el teorema de Pitágoras, aplicado a triángulos rectángulos .

Para entenderlo, debemos conocer los nombres de las partes de un triángulo rectángulo:

- La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto, y es siempre el mayor de los tres.
- Los catetos son los lados contiguos al ángulo recto.

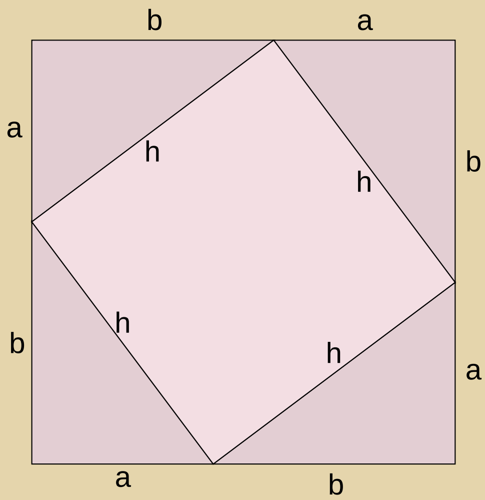
4%/2%-! $% 0“4€'/2!3

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$h^2 = a^2 + b^2$$

“.4%.4! $%-/342!2 %, 4%/2%-! $% 0“4€'/2!3

8. En la siguiente gura hay cuatro triángulos rectángulos iguales que encierran un cuadrado:



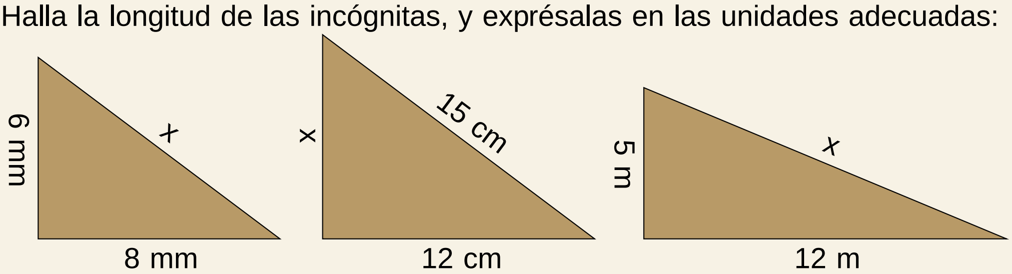
a) Halla el área del cuadrado grande, teniendo en cuenta que su lado mide $a + b$.
½Recuerda las identidades notables!

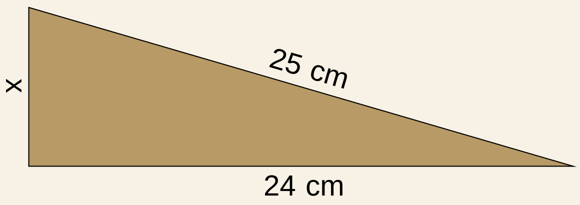
b) Halla el área del los rectángulos y el área del cuadrado pequeño.

c) El área del cuadrado grande es igual al área de los cuatro triángulos más el área del cuadrado pequeño.
Escribe algebraicamente esa igualdad.

d) Despeja h^2.
¾Qué expresión obtienes?

9. Halla la longitud de las incógnitas, y exprésalas en las unidades adecuadas:





El teorema de Pitágoras nos permite conocer características de otras guras, dividiéndolas en triángulos rectángulos convenientes.

10. ¾Cuánto mide la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1 metro?
11. Halla la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 3 metros.
12. Calcula la longitud del lado de un rombo sabiendo que su diagonal mayor mide 80 cm y su diagonal menor mide 60 cm.
13. Calcula la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 4 cm.

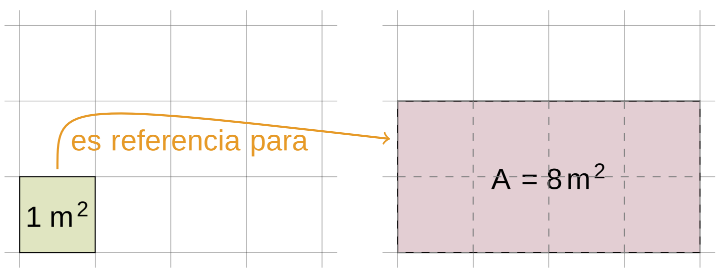
Perímetro y área

El perímetro de un polígono es la medida del contorno que rodea a la gura. Se calcula sumando todos los lados de la gura, y se expresa en unidades de longitud (metro, centímetro, kilómetro, etc.).

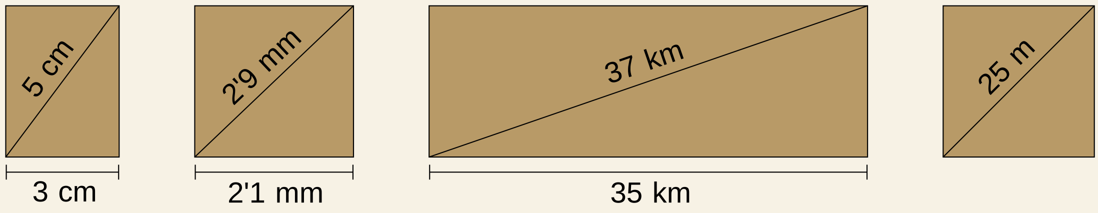
El área de un polígono es la medida de la extensión que ocupa la gura. Se calcula tomando como referencia una gura cuadrada de lado 1 unidad, y se expresa en cuadrados de unidades de longitud (m^2, cm^2, km^2, etc.)

Área del rectángulo

La gura básica en el cálculo de áreas es el cuadrado. El área de un cuadrado de lado la unidad es una unidad al cuadrado.
El área de un rectángulo se obtiene por composición de múltiples cuadrados de lado unitario, por lo que puede calcularse multiplicando base por altura.



14. Aplica el teorema de Pitágoras y calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:



15. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo cuya base mide 1'5 metros y cuya altura mide el triple que la base.

16. La diagonal de un rectángulo mide 1 metro más que uno de sus lados. El otro lado mide 5 metros.

    a) Dibuja aproximadamente la figura y expresa algebraicamente las dimensiones de sus lados.
    b) Aplica el teorema de Pitágoras para hallar la longitud del lado desconocido.
    c) Calcula el perímetro y el área del rectángulo.

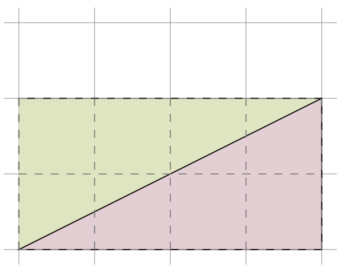
17. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo cuya base mide 1 cm más que su altura y cuya diagonal mide 29 centímetros.

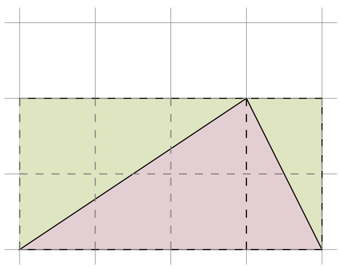
18. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo cuya altura mide 11 centímetros y cuya base es 1 centímetro menor que la diagonal.

Área del triángulo

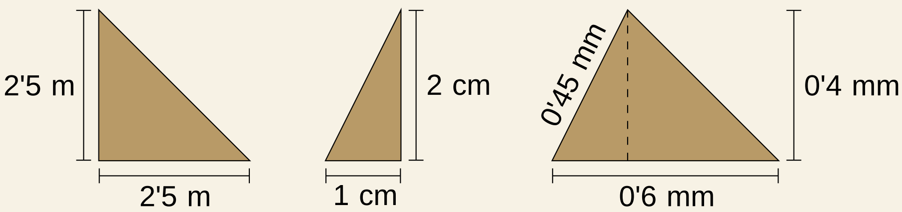
Un triángulo ocupa la mitad de superficie que un rectángulo con la misma base y altura. Este hecho es muy evidente cuando se trata de un triángulo rectángulo.

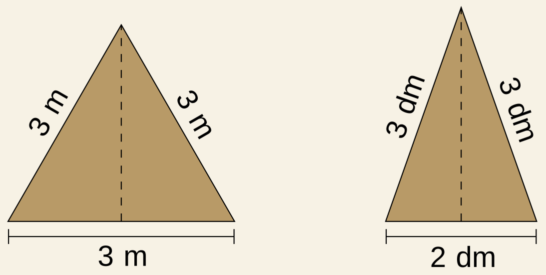
Cuando hablamos de otros triángulos la observación no es directa, pero si los dividimos en dos partes trazando su altura podemos ver que también es la mitad del rectángulo correspondiente.





19. Aplica el teorema de Pitágoras y calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:





20. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 centímetros y uno de sus catetos 10 centímetros.

    a) Utiliza el teorema de Pitágoras para hallar la longitud del otro cateto.
    b) Halla el perímetro y el área del triángulo.

21. Calcula el perímetro y el área de los siguientes triángulos rectángulos:

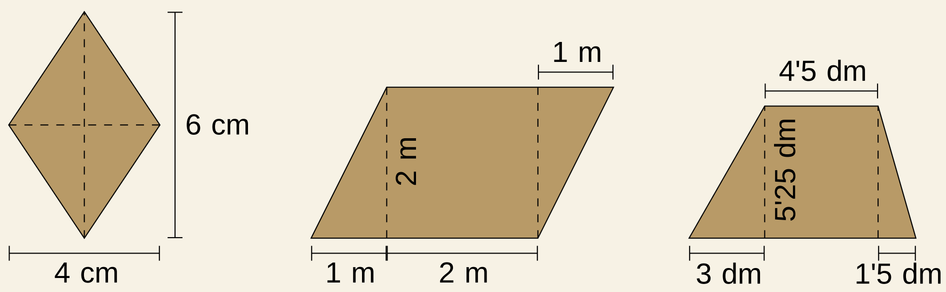
    a) Un cateto mide 4 cm y el otro 3 cm.
    b) Un cateto mide 40 m y la hipotenusa mide 41 m.
    c) Un cateto mide 8 mm y la hipotenusa mide 17 mm.
    d) Un cateto mide 12 cm y el otro 35 cm.
    e) Un cateto mide 60 m y la hipotenusa mide 61 m.
    f) Un cateto mide 20 cm y el otro 21 cm.

22. Halla el perímetro y el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 7 decímetros.

Área de otros polígonos

Conocido el modo en que se calculan el área de un rectángulo y el área de un triángulo, ya podemos hallar la de cualquier otra gura poligonal descomponiéndola en rectángulos y triángulos convenientes.

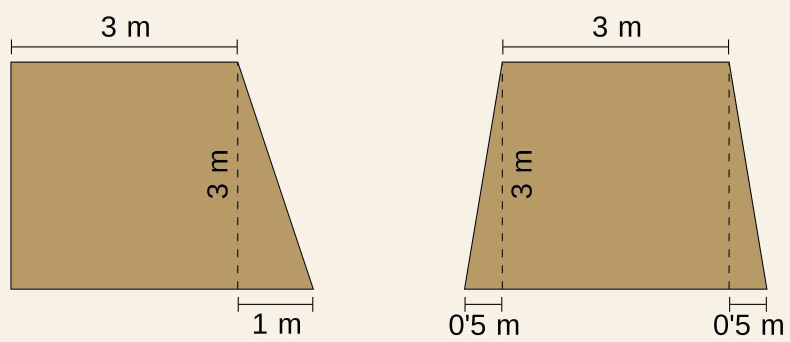
23. Calcula el perímetro y el área de las siguientes guras:

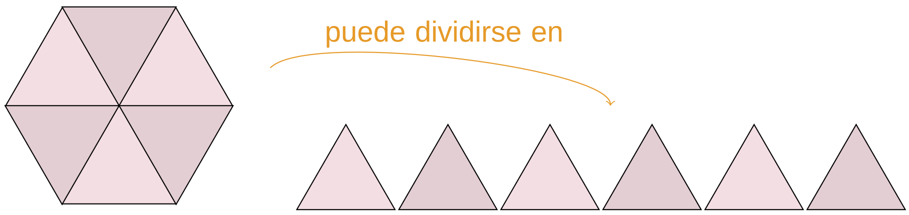


24. El lado de un rombo mide 12'5 cm y una de sus diagonales 15 cm.

    a) Halla la longitud de la otra diagonal.
    b) Calcula el área del rombo.

25. Calcula el perímetro y el área de estos dos trapecios.





Un caso particular son los polígonos regulares, que pueden dividirse en tantos triángulos iguales como lados tienen.
Cada uno de esos triángulos tiene como base uno de los lados del polígono y como altura la apotema, de modo que su área es:

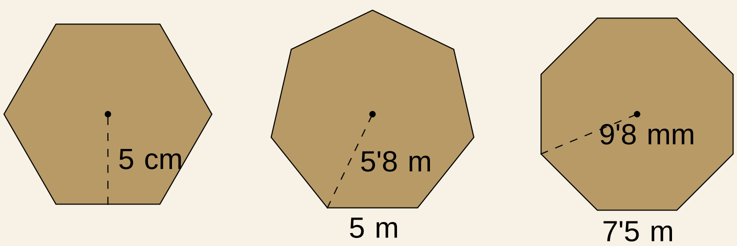
$$A_T = \frac{\text{lado} \quad \text{apotema}}{2}$$

Y por lo tanto el área total del polígono es:

$$A = n^{o}\ \text{lados} \quad \frac{\text{lado} \quad \text{apotema}}{2}$$

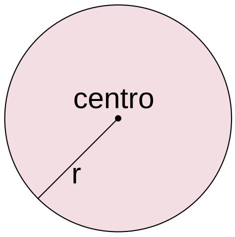
El hexágono regular está formado por 6 triángulos equiláteros.
Por eso el lado del hexágono es igual a su radio.

26. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:



27. Halla el lado de un pentágono regular de 61'5 cm^2 de área y 4'1 cm de apotema.

28. Averigua la apotema de un hexágono regular de área 93'5 cm^2



El perímetro de un círculo , es decir, la longitud de la circunferencia, viene dada en función de su radio por la expresión 2 r .

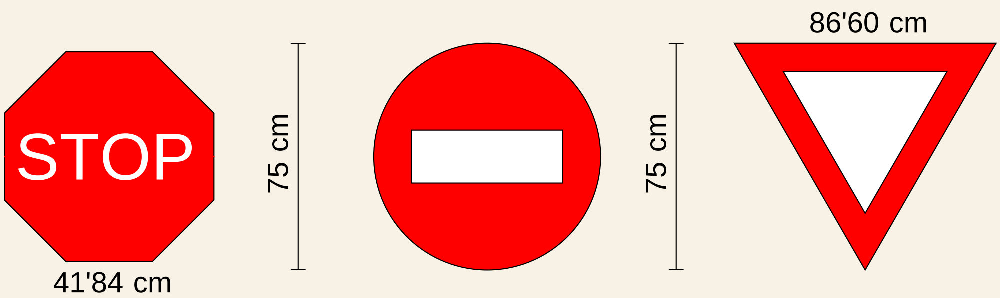
El área de un círculo también viene dada en función de su radio, por la expresión r 2.

es un número irracional, es decir, tiene in nitas cifras decimales no periódicas.
Por motivos prácticos lo aproximaremos a las centésimas: 3'14.

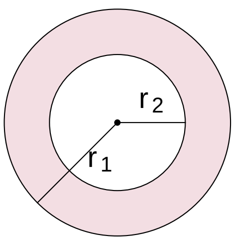
29. Halla el perímetro y el área de un círculo cuyo radio mide 2 metros.

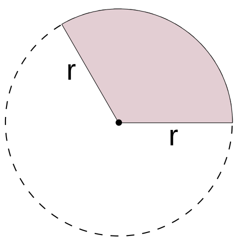
30. Halla el perímetro y el área de un círculo cuyo diámetro mide 2 metros.

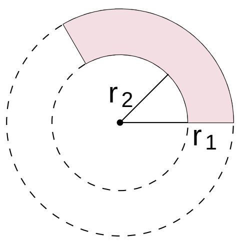
31. Compara la super cie de distintas señales de trá co, todas de la misma altura, para saber cuánto aluminio se necesita para su fabricación:



32. Halla el área de un círculo en el cual se puede inscribir un cuadrado de lado 3 centímetros.







El área de una corona circular es la diferencia del área del círculo grande menos el área del círculo pequeño.

$$A = A_{grande} \quad A_{pequeño}$$

El área del sector circular es una porción (¡recuerda la razón de proporción!) del círculo completo, que tiene un ángulo total de 360 º.

$$A = \frac{ángulo}{360} \quad A_{círculo}$$

El área del trapecio circular se calcula empleando primero el razonamiento de la corona y a continuación el del sector.

33. Calcula el área de una corona circular cuyos radios miden 3 y 5 metros.

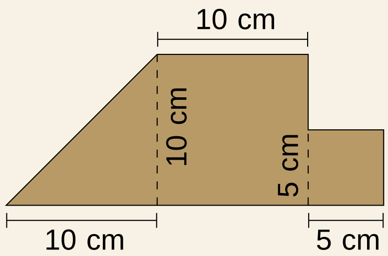
34. Calcula el perímetro y el área de un semicírculo de radio 4 metros.

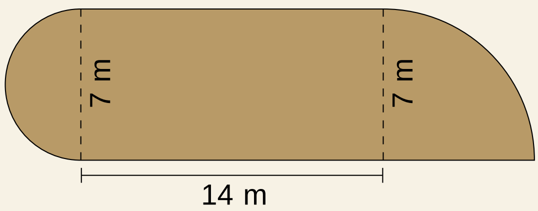
35. Calcula el perímetro y el área de un cuarto de corona circular cuyos radios miden 1 y 3 metros.

FIGURAS COMPUESTAS

Como el estudio de rectángulos y triángulos es sencillo, para hallar el área de otras guras poligonales es conveniente descomponerlas en esas guras. Si la gura tiene alguna parte circular, lógicamente esa se descompondrá aparte.

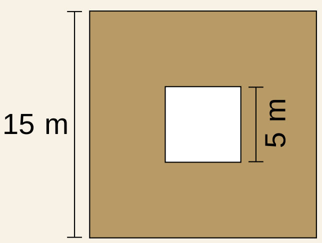
36. Calcula el perímetro y el área de las siguientes guras:

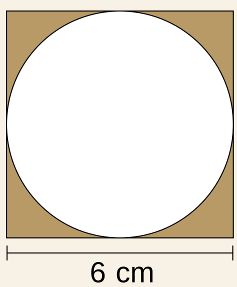


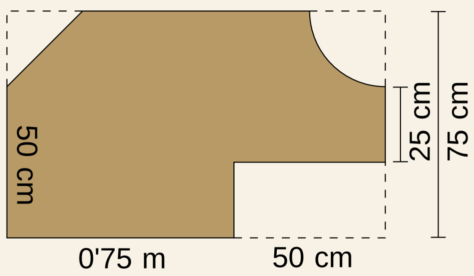


En ocasiones las guras tienen huecos, bien sean interiores o estén justo en un borde. En ese caso podemos restarle a una gura grande el área del borde.

37. Calcula el área de las siguientes guras:



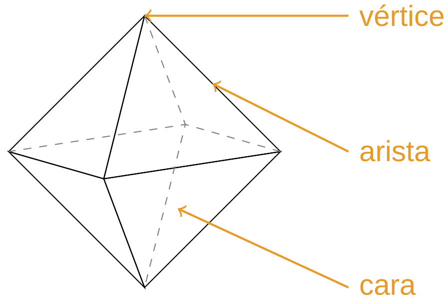




Cuerpos geométricos

Poliedros

Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por 4 o más polígonos.



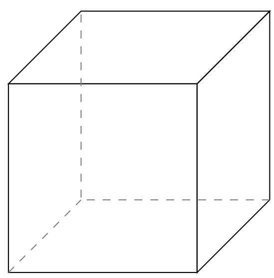
- Llamamos caras a cada uno de los polígonos que limitan al poliedro.
- Llamamos aristas a los lados de dichos polígonos. Cada arista es común a dos caras.
- Llamamos vértices a los puntos extremos de los lados. En cada vértice concurren varias aristas.

El área de un poliedro es la suma de las áreas de sus caras.
Para calcularlo de forma sencilla consideraremos su desarrollo plano.

El volumen de un poliedro es el espacio que ocupa.
Para calcularlo necesitamos conocer el área de la base y la altura del poliedro.

Hexaedros

El hexaedro o cubo es un poliedro regular formado por 6 caras laterales cuadradas iguales.



1. ¾Cuántas aristas tiene un cubo?
2. ¾Cuántos vértices tiene un cubo?
3. Da un ejemplo de objeto cotidiano que tenga forma de cubo.

El área del hexaedro es la suma del área de los seis cuadrados.

El volumen de un hexaedro se calcula elevando la longitud de la arista al cubo.

$$V = a^3$$

4. Halla el área y el volumen de los hexaedros cuyas aristas midan:

a) 5 cm	c) 1 dm	e) 6 mm	g) 10 cm
b) 3 m	d) 2 cm	f) 25 mm	h) 1'1 dm

5. a) Halla la longitud de la arista de un cubo cuya área es 12 cm^2.
   b) Calcula su volumen.

UNIDADES DE MEDIDA DE VOLUMEN

A veces, cambiar de unidades de volumen nos parece un tanto complejo pues no tenemos claro por qué hemos de utilizar un coe ciente u otro. ¿10? ¿100? ¿1000?
Para intentar entenderlo haremos unos sencillos ejercicios.

6. a) Expresa en m^3 el volumen de un cubo cuyo lado mide 1 km (es decir, 1000 m).
   b) Expresa en m^3 el volumen de un cubo cuyo lado mide 1 hm (es decir, 100 m).
   c) Expresa en m^3 el volumen de un cubo cuyo lado mide 1 cm (es decir, 0'01 m).
   d) Expresa en m^3 el volumen de un cubo cuyo lado mide 1 mm (es decir, 0'001 m).

7. Halla la relación entre las siguientes unidades, utilizando el mismo razonamiento que en el ejercicio anterior:

   a) $1km^3$ = __________m^3
   b) $1m^3$ = __________cm^3
   c) $1cm^3$ = __________mm^3
   d) $1m^3$ = __________mm^3

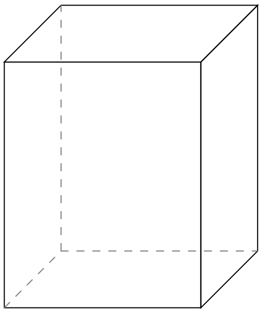
8. Teniendo en cuenta que un litro equivale a un decímetro cúbico (1 l = 1 dm^3), halla la relación entre las siguientes unidades de volumen:

   a) m^3 y l
   b) km^3 y l
   c) l y cm^3
   d) l y mm^3

9. a) Halla la longitud de la arista de un cubo cuyo volumen es 8 litros.
   b) Calcula su área.

ORTOEDROS

Un ortoedro es un poliedro formado por 6 caras laterales rectangulares iguales y paralelas dos a dos.



10. ¾Cuántas aristas tiene un ortoedro?

11. ¾Cuántos vértices tiene un ortoedro?

12. Da un ejemplo de objeto cotidiano que tenga forma de ortoedro.

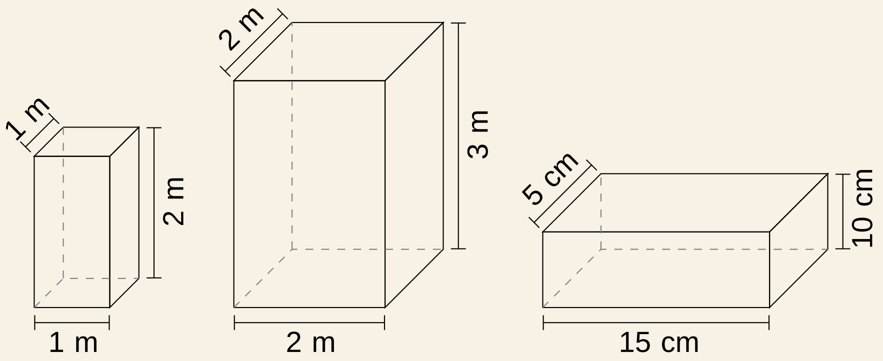
13. ¾Es correcto a rmar que todos los hexaedros son ortoedros?

El área del ortoedro es la suma del área de los seis rectángulos, que recordemos son iguales dos a dos.

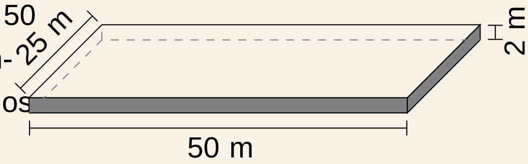
El volumen de un hexaedro se calcula multiplicando el área de la base (un rectángulo) por la altura.

$$V = A_{base} \quad altura$$

14. Calcula el área y el volumen de los siguientes ortoedros:



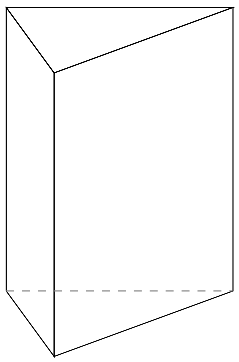
15. Las dimensiones de una piscina olímpica son 50 m de largo, 25 m de ancho y 2 m de profundidad. ¾Cuántos litros de agua necesitaremos para llenarla?



16. En un almacén de dimensiones 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto queremos almacenar cajas de dimensiones 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto. ¾Cuantas cajas podremos almacenar?

PRISMAS

Un prisma es un poliedro formado por dos bases poligonales iguales unidas mediante caras laterales que son paralelogramos. Los hexaedros y los ortoedros son casos particulares de prismas.

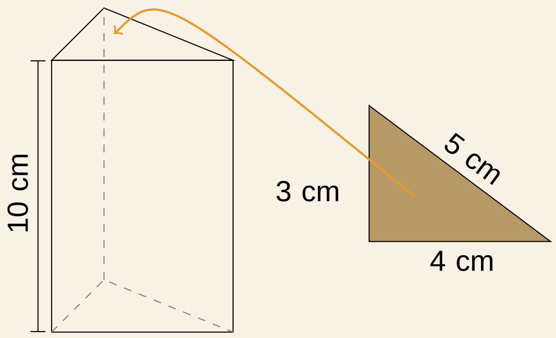


17. ¾Cuántas aristas tiene un prisma?
18. ¾Cuántos vértices tiene un prisma?
19. Da un ejemplo de objeto cotidiano que tenga forma de prisma.
20. Observa el aula. ¾Es un prisma?

El área de un prisma es la suma del área de sus bases y caras laterales.
El volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

$$V = A_{base} \quad altura$$

21. Calcula el área y el volumen del siguiente prisma triangular:



22. Esboza un dibujo de un prisma de 10 cm de altura y cuya base es un rombo de lado 15 cm, diagonal mayor 24 cm y diagonal menor 18 cm. Calcula su área y su volumen.

23. Calcula el área y el volumen de un prisma de 15 cm de altura y que tiene por base un rectángulo de lados 2 y 3 cm.

24. Calcula el área y el volumen de un prisma recto de 3 m de altura y que tiene por base un triángulo equilátero de 2 m de arista.

25. Calcula el área y el volumen de un prisma de 20 cm de altura y cuya base es un triángulo rectángulo con catetos 5 y 7 cm.

26. Calcula el área y el volumen de un prisma de 10 cm de altura y cuya base es un hexágono regular de lado 4 cm.

27. Calcula el área y el volumen de un prisma de 10 cm de altura y cuya base es un polígono irregular de perímetro 35 cm y área 25 cm^2.

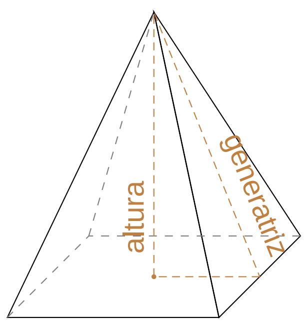
28. Un tetrabrick de leche mide 7 cm de ancho, 7 cm de fondo y 20 cm de alto.

    a) ¾Qué cantidad de material es necesaria para fabricarlo?

    b) ¾Qué volumen tiene su interior? Exprésalo en mililitros.

PIRÁMIDES

Una pirámide es un poliedro formado por una base poligonal y caras laterales triangulares que con uyen a un punto común llamado vértice.
Un caso particular de pirámide es el tetraedro, un poliedro regular formado por 4 triángulos equiláteros.



29. ¾Cuántas aristas tiene una pirámide?

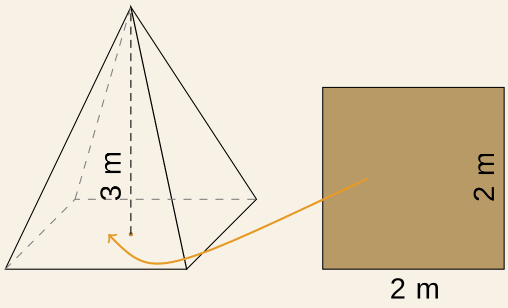
30. ¾Cuántos vértices tiene una pirámide?

El área de una pirámide es la suma del área de su base y sus caras laterales.
El volumen de una pirámide es la tercera parte del producto del área de la base y la altura.

$$V = \frac{A_{base} \cdot altura}{3}$$

La di cultad del cálculo del área y del volumen de una pirámide radica en distinguir su altura de la altura de cada una de sus caras triangulares. Conocida una se puede calcular la otra utilizando el teorema de Pitágoras.

31. Calcula el área y el volumen de la siguiente pirámide:



32. Calcula el área y el volumen de una pirámide triangular en la que las aristas de la base miden 2 mm y la altura es 12 mm.

33. Calcula el área y el volumen de una pirámide cuadrangular de altura 6 cm y cuya base tiene 16 cm de arista.

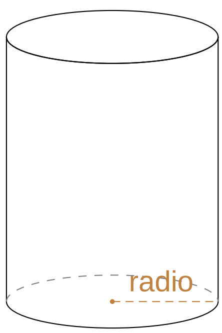
34. Calcula el área y el volumen de una pirámide hexagonal en la que la arista de la base mide 3 cm y la arista lateral 5 cm.

Cuerpos redondos

Los cuerpos que vamos a estudiar a continuación se llaman sólidos de revolución, es decir, son guras no poliédricas que se obtienen a partir de una gura plana que gira sobre un eje.

Cilindros

Un cilindro es una gura formada por dos bases circulares unidas entre sí por una super cie curva.



Dado que las bases son círculos, para hallar el área de del cilindro necesitamos recordar el área de un círculo:

$$A_{base} = \pi r^2$$

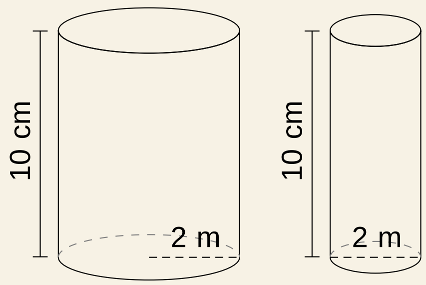
En el desarrollo plano del cilindro vemos que la super cie que une ambas bases equivale a un rectángulo cuya longitud es la misma que la circunferencia (2 r) y cuya altura es la altura del cilindro (h).

$$A_{lateral} = 2 \ r \quad altura$$

El volumen de un cilindro se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

$$V = A_{base} \quad altura$$

35. Calcula el área y el volumen de los siguientes cilindros:



36. Una lata de refresco mide 10 centímetros de altura, y tiene una base circular de diámetro 6'5 centímetros.

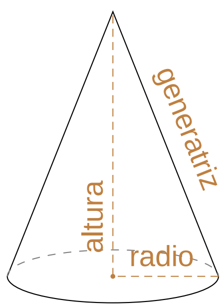
    a) ¾Cuántos cm^2 de aluminio son necesarios para su fabricación?

    b) Calcula el volumen de refresco que puede albergar y exprésalo en mililitros.

CONOS

Un cono es una gura formada por una base circular y una super cie curva que la une con su vértice.

Dado que la base es un círculo, para hallar el área de del cono necesitamos recordar el área de un círculo:



$$A_{base} = \ r^2$$

En el desarrollo plano del cono vemos que el lateral equivale a un trozo de círculo, cuyo arco coincide con la longitud de la circunferencia de la base, por eso su área se puede expresar como:

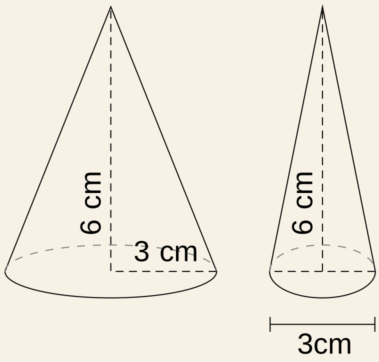
$$A_{lateral} = \ r \quad generatriz$$

El volumen de un cono es la tercera parte del producto del área de la base y la altura.

$$V = \frac{A_{base} \quad altura}{3}$$

La di cultad del cálculo del área y del volumen de una pirámide radica en distinguir su altura de su generatriz. Conocida una se puede calcularla otra utilizando el teorema de Pitágoras.

37. Calcula el volumen de los siguientes conos:

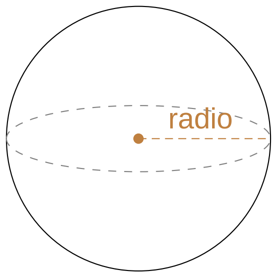


38. Calcula el área y el volumen de un cono de altura 5 metros y cuya base tiene radio 2 metros.

39. Calcula el área y el volumen de un cono de altura 5 metros y cuya base tiene diámetro 2 metros.

ESFERAS

Una esfera es una super cie curva cuyos puntos equidistan de otro llamado centro. El área de la esfera se calcula mediante la fórmula:



$$A = 4\ r^{2}$$

El volumen de la esfera se calcula mediante la fórmula:

$$V = \frac{4\ r^{3}}{3}$$

40. Calcula el área y el volumen de una esfera de radio 2 metros.

41. Calcula el área y el volumen de una esfera de diámetro 2 metros.

42. Calcula el área y el volumen de una esfera de radio 6 metros.

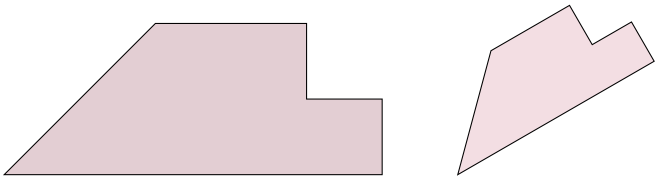
43. Calcula el área y el volumen de una esfera de radio 12 metros.

44. En una heladería me han ofrecido un helado en cucurucho. He medido el cono desde la punta hasta el borde de la circunferencia, y son 10 cm. También he medido el diámetro de la circunferencia, y son 4 cm.

    a) ¾Qué volumen de helado cabe en el cono?
    b) Además de llenar todo el cucurucho con helado, asoma sobre el borde media esfera adicional. ¾Qué volumen de helado hay en esa semiesfera?
    c) Entonces, ¾cuántos mililitros de helado me han ofrecido en total?

Semejanza

Dos guras son semejantes cuando tienen la misma forma, aunque tengan distinto tamaño o estén colocadas en otra posición.



Razón entre longitudes

Las guras poligonales con el mismo número de lados son semejantes si:

- Sus ángulos son iguales.
- Sus lados son proporcionales.

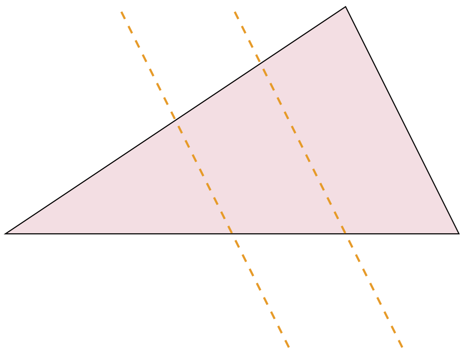
1. Un cuadrado cuyo lado mide 2 metros y otro cuyo lado mide 3 centímetros, ¾son semejantes?
2. Un triángulo equilátero cuyo lado mide 3 centímetros y otro cuyo lado mide 2 kilómetros, ¾son semejantes?
3. Un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5 cm, y un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 5cm y 6 cm, ¾son semejantes?
4. Un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5cm, y otro triángulo rectángulo cuyos lados miden 1'5 cm, 2 cm y 2'5 cm, ¾son semejantes?
5. Un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5cm, y otro triángulo rectángulo cuyos lados miden 5 cm, 12 cm y 13 cm, ¾son semejantes?
6. ¾Es posible que al reducir con una fotocopiadora un triángulo cuyos lados miden 9, 18 y 12 cm resulte un triángulo de lados 4, 8 y 6 cm?

La razón de semejanza   es la constante de proporcionalidad entre dos guras semejantes, es decir, el número por el que hemos de multiplicar todas las longitudes de los segmentos de una de las guras para obtener las longitudes de los segmentos de la otra.

7. Dibuja un rectángulo cuya base mida 5 unidades y cuya altura mida 2 unidades.
   Dibuja también otro rectángulo semejante con razón de semejanza 2, es decir, que mida el doble.
8. Dibuja un rectángulo cuya base mida 2 unidades y cuya altura mida 1 unidad, y otro cuya base mida 6 unidades y cuya altura mida 3 unidades. ¾Cuál es la razón de semejanza entre ellos?
9. Dibuja un triangulo isósceles cuya base mida 3 unidades y cuya altura mida 2 unidades.
   Dibuja también otro triángulo semejante con razón de semejanza 2'5.
10. Dibuja un hexágono regular de 2 unidades y otro de lado 1 unidad. ¾Cuál es la razón de semejanza entre ellos?

11. Dibuja un cuadrado de lado 2 unidades y otro cuadrado de lado 3 unidades. ¾Cuál es la razón de semejanza entre ellos?

TEOREMA DE TALES



4%/2%-! 02 “-%2/

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

Tales de Mileto

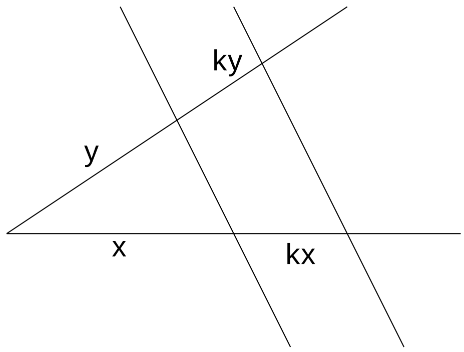
Una consecuencia directa de este teorema es que dos rectas paralelas que corten a rectas secantes dan lugar a segmentos proporcionales.

En la práctica, eso quiere decir que hay una razón de proporcionalidad para dividir los segmentos de un mismo lado entre sí:

$$\frac{kx}{x} = k = \frac{ky}{y}$$

Y además también hay una razón de proporcionalidad para dividir los segmentos de un lado entre los del otro:

$$\frac{ky}{kx} = \frac{y}{x}$$



12. Dibuja un triángulo rectángulo de catetos 15 y 8 unidades de longitud.
Si se unen los puntos medios de dichos catetos, ¾resulta un triángulo semejante a él?

13. Dibuja un segmento de 5 cm de longitud iguales y divídelo en 3 partes iguales.
Para ello dibuja otro segmento que mida tres unidades (puedes ayudarte con un compás) y divide en triángulos semejantes aplicando el teorema de Tales.

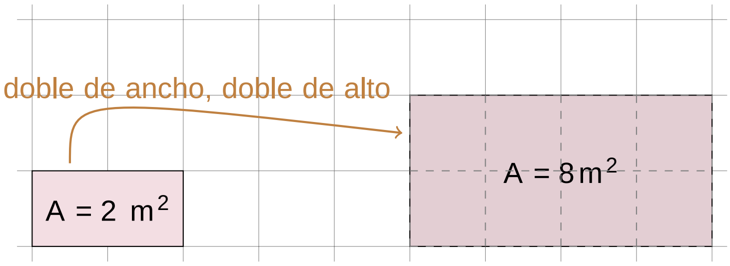
14. Divide un segmento de 7 cm de longitud en 4 partes iguales.

15. Divide un segmento de 4 cm de modo que una de ellas sea el doble de la otra.

16. Divide un segmento de 10 cm de longitud en tres partes proporcionales a 1, 2 y 3.

RAZÓN ENTRE ÁREAS

La razón entre las áreas de dos guras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza.



Por ejemplo, si tenemos una gura cuya altura y se multiplica por 2 entonces el área se multiplica por $2^2 = 4$.

17. a) Halla el área de un cuadrado cuyo lado mide 1 cm.
    b) Utiliza semejanza para hallar el área de cuadrados cuyo lado mida:
       - 3 cm
       - 6 cm
       - 0'5 cm
       - 0'25 m

18. a) Halla el área de un rectángulo cuya base mide 3 cm y cuya altura mide 2 cm.
    b) Halla el área de un rectángulo cuyos lados miden el triple que el anterior.

19. a) Halla el área de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm y cuya altura mide 4 cm, aplicando el teorema de Pitágoras.
    b) Halla el área de un triángulo rectángulo cuyos lados miden la tercera parte que el anterior.

20. Tenemos un rectángulo cuya área es 50 m^2. ¾Cuál será el área de un rectángulo semejante cuyos lados midan la quinta parte?

21. Partimos de un círculo cuya área es 20 m^2 y construímos otro un 50 % mayor. ¾Cuál es su área?

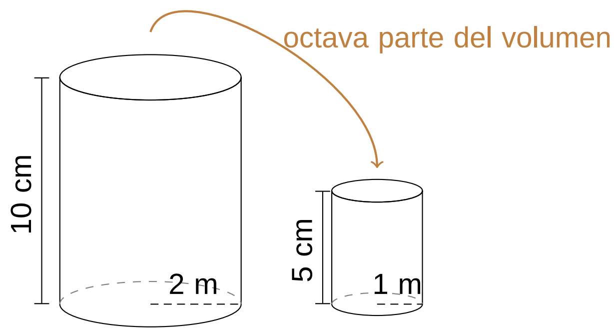
22. Dibuja un cuadrado cuyo lado mide 1 mm, otro cuyo lado mide 1 cm y otro cuyo lado mide 1 dm. ¾Cuál es la relación entre sus áreas?

23. Halla la relación entre:

    a) km^2 y m^2
    b) m^2 y cm^2
    c) cm^2 y mm^2
    d) m^2 y mm^2
    e) km^2 y hm^2
    f) km^2 y dm^2
    g) km^2 y cm^2
    h) km^2 y mm^2

24. Teniendo en cuenta que una hectárea (ha) es equivalente a un hectómetro cuadrado (hm^2), ¾a cuántos metros cuadrados equivale un área?

El volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura.
La razón entre los volúmenes de dos poliedros semejantes es el cubo de la razón de semejanza.



25. a) Halla el volumen de un cubo cuya arista mide 1 cm.
 b) Utiliza semejanza para hallar el volumen de cubos arista mida:
 - 3 cm
 - 6 cm
 - 0'5 cm
 - 0'25 m

26. Tenemos una esfera cuyo volumen es 2 000 mm^3
¾Cuál será el volumen de otra esfera cuyo radio mida la cuarta parte?

27. Halla la relación entre:

a) km^3 y m^3 b) m^3 y cm^3 c) cm^3 y mm^3 d) m^3 y mm^3

28. Teniendo en cuenta que un litro equivale a un decímetro cúbico, halla la relación entre:

a) m^3 y l b) km^3 y l c) l y cm^3 d) l y mm^3

ESCALAS

Un **mapa** es una representación gráfica de una zona geográfica.

Mapa de Galicia en Google Maps

Un **plano** es una representación gráfica de otro tipo de elementos, como pueden ser una vivienda o las calles de una ciudad.

Plano extraído de arqhys.com

Una **maqueta** es la representación en tres dimensiones de cualquier objeto, típicamente reducida con respecto al original.

Maqueta de Aedes Ars

La **escala** de un mapa, plano o maqueta es la razón de semejanza entre la representación y la realidad.

La escala numérica tiene un formato específico, en el que se indica que por cada unidad en la representación la medida real tiene un cierto número de unidades.

1 : 10

Escala 1 : 250 000		
1 mm	!	250 000 mm = 250 m
4 mm	!	1 000 000 mm = 1km
1 cm	!	250 000 cm = 2'5 km
0'1 m	!	25 000 m = 25 km

La escala es una razón, por lo tanto no se refiere a ninguna unidad. Las medidas son las que sí deben indicar unidad.

Los problemas de escalas pueden resolverse de un modo sencillo utilizando una regla de tres, relacionando la representación con la realidad.

Conocida la escala y la medida en el mapa:

Mapa	Realidad
1	160 000
2'3 cm	x cm

Conocida la escala y la medida en la realidad:

Mapa	Realidad
1	160 000
x km	20 km

Para averiguar la escala, conociendo ambas medidas:

Mapa	Realidad
1	x
2 cm	250 cm

29. Tenemos un mapa a escala 1:50 000.

    a) La distancia entre dos pueblos en el mapa es de 11 cm. ¾Cuál es la distancia real?

    b) La distancia real entre otros dos pueblos es de 3'75 km. ¾A qué distancia estarán en el mapa?

30. La distancia entre Madrid y Burgos es 243 km.
    Si en el mapa la distancia entre ambas ciudades es 8'1 cm, ¾a qué escala está dibujado?

31. Se ha construido el plano de una habitación cuyas dimensiones son 9 m de largo y 6 m de ancho. En el plano, el largo de la habitación es 12 cm.

    a) ¾A qué escala está dibujado el plano?

    b) ¾Cuál es el ancho de la habitación en el plano?

32. Si un barco mide 21 metros y su maqueta mide 70 centímetros, ¾a qué escala se realizó la maqueta?

33. La torre de Hércules en A Coruña, tiene una altura total de 55 metros.
    Si queremos realizar una maqueta de la misma a escala 1:110, ¾qué altura tendrá dicha maqueta?

34. Si una mosca tiene una longitud de 9 mm y su maqueta mide 18 cm, ¾a qué escala se realizó la maqueta?

35. Un mapa de España está construido a escala 1:2500000.
    ¾A cuántos kilómetros se encuentran dos ciudades que en el mapa están separadas 10 cm?

36. En un mapa de América del Sur construido a escala 1:84 000 000 la mayor distancia Este-Oeste corresponde a dos puntos situados a 60 mm, y la mayor distancia Norte-Sur corresponde a 100 mm aproximadamente. ¾Cuántos kilómetros representan estas distancias?

37. Ordena las siguientes escalas de mayor a menor:

    1:45 1:20 1:65 3:1 1:30 1:1 1:18 5:1

38. Dibuja un plano a escala 1:100 de tu dormitorio.
    Indica dónde están puertas, ventanas y mobiliario con símbolos adecuados.

ESTADÍSTICA

La estadística nos facilita herramientas para realizar suposiciones fundamentadas sobre un grupo grande de individuos observando solo unos pocos.

- Llamamos población al conjunto de todos los individuos sobre los que se realiza el estudio estadístico. Para conocer las características de la población completa es necesario realizar un censo .
- Llamamos muestra a un subconjunto de la población en el que se recogen los datos del estudio, a partir de los cuales se pretende deducir características de toda la población.

1. Indica cúal es la población y cuál la muestra:
   a) Se va a realizar un estudio estadístico para decidir si conviene construír un nuevo polideportivo en una ciudad de 426 873 habitantes. Como preguntar a todas las personas es muy costoso, solo se preguntará a 1 258 habitantes de diferentes barrios.
   b) En un gimnasio deciden preguntar a sus 200 socios sus propuestas para actividades.
   c) Para hacer un estudio sobre los gustos musicales de los alumnos de 12 años de una ciudad, se ha escogido a 125 niños de esa edad.
2. En un estudio sobre la duración de las bombillas que fabrica una empresa, ¾crees conveniente estudiar toda la población? ¾Por qué?

TIPOS DE VARIABLES

La variable estadística es la característica estudiada.

- Variable cualitativa es la que expresa una cualidad, que no se puede cuanti car.
- Variable cuantitativa es la que se expresa numéricamente.

3. Indica cuáles de las siguientes variables son cuantitativas y cuales son cualitativas:
   a) Comida favorita.
   b) Profesión que te gusta.
   c) Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada.
   d) Número de alumnos de tu instituto.
   e) El color de los ojos de tus compañeros de clase.
   f) Cociente intelectual de los miembros de tu familia.
4. Da tres ejemplos de variables cualitativas y tres de variables cuantitativas.

Las variables cuantitativas, a su vez, se pueden clasi car en dos tipos:

- discreta   si solo puede tomar valores aislados.
  Por ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ...
- continua   si puede tomar valores dentro de un intervalo.
  Por ejemplo: todos los números decimales entre 0 y 1.

Una variable continua no puede ser medida con exactitud pues el valor observado depende de la precisión de los instrumentos de medición.
Ese hecho no debe llevarnos a confundirla con una variable discreta.

5. Indica cuáles de las siguientes variables cuantitativas son discretas y cuales son continuas:

   a) Número de manzanas vendidas cada día en una frutería.
   b) Temperaturas registradas cada hora en un observatorio.
   c) Período de duración de un automóvil.
   d) El diámetro de las ruedas de varios coches.
   e) Número de hijos de 50 familias.
   f) Censo anual de los españoles.

6. Indica cuáles de las siguientes variables son cualitativas, cuáles son cuantitativas discretas y cuáles cuantitativas continuas.

   a) El número de hijos de una familia.
   b) Número de personas que llegan a un consultorio en una hora.
   c) El número de árboles que hay en un parque.
   d) El número de canales de televisión que tienes en casa.
   e) Cantidad de empleados que trabajan en una tienda.
   f) Número de libros vendidos cada mes en Amazon.
   g) Número de clientes que visitan un supermercado por día.
   h) El color favorito de cada persona.
   i) El peso de una persona.
   j) La velocidad a la que va a un tren.
   k) Longitud en centímetros de un tenedor.
   l) La cantidad de dedos que tienes en la mano.
   m) El número de faltas en un partido de fútbol.
   n) El volumen de cerveza en una jarra.
   ñ) La nacionalidad de los jugadores de un equipo.
   o) Peso de las vacas en una granja.
   p) Tiempo que esperas al amor de tu vida.

q) Distancia que recorren los autos en una ciudad.

r) Red social más utilizada por cada persona.

s) Número de animales en una granja.

t) El diámetro de una esfera.

u) La estatura de tu mejor amigo.

v) El ancho de una pelota de fútbol.

w) Volumen de agua en una piscina.

x) Tiempo que demora el repartidor de una pizzería en entregar un pedido.

y) Velocidad a la que viaja un avión.

z) Modelo de coche más vendido de un concesionario.

TABLAS DE FRECUENCIAS

En un estudio estadístico, tras recoger los datos se cuentan y se agrupan.
En una tabla de frecuencias se representan ordenados los valores que toma la variable estadística (x_i) con las distintas frecuencias asociadas:

- frecuencia absoluta (f_i): número de veces que aparece x_i en el recuento.
- frecuencia relativa (h_i): proporción de veces que aparece x_i en el recuento.
  Puede expresarse como fracción $\frac{f_i}{n}$, donde n es el total de datos, o bien como porcentaje.
- frecuencia absoluta acumulada (F_i): es la suma de las frecuencias absolutas de valores menores o iguales que x_i.
- frecuencia relativa acumulada (H_i): es la suma de las frecuencias relativas de valores menores o iguales que x_i.
  Puede expresarse como fracción o bien como porcentaje.

Preguntamos a una serie de personas de cuántos automóviles dispone su familia:

1 0 1 1 2 2 1 1 2 1 1 1 3 0 2 2 1 1 2 2

Y creamos una tabla de frecuencias:

recuento de casos

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
0	2	$\frac{2}{20} = 0'1 = 10\,\%$	2	$\frac{2}{20} = 10\,\%$
1	10	$\frac{10}{20} = 0'5 = 50\,\%$	2 + 10 = 12	$\frac{12}{20} = 60\,\%$
2	7	$\frac{7}{20} = 0'35 = 35\,\%$	12 + 7 = 19	$\frac{19}{20} = 95\,\%$
3	1	$\frac{1}{20} = 0'05 = 5\,\%$	19 + 1 = 20	$\frac{20}{20} = 100\,\%$
Total	20	1 = 100 %		

comprobamos los totales

vamos añadiendo valores de la columna f_i

7. Durante el mes de junio, en una ciudad se han registrado las siguientes temperaturas máximas. Elabora con ellas una tabla de frecuencias.

32	31	28	29	33	32	31	30	31	31
27	28	29	30	32	31	31	30	30	29
29	30	30	31	30	31	34	33	33	29

8. Se le pidió a un grupo de personas que indiquen su color favorito. Elabora con ellos una tabla de frecuencias.

negro	azul	amarillo	rojo	azul	azul	rojo	negro	amarillo	rojo
rojo	amarillo	amarillo	azul	rojo	negro	azul	rojo	negro	amarillo

9. Un dentista observa el número de caries en 100 niños y resume la información en la siguiente tabla. Complétala con los datos que faltan.

Nº caries	f_i	h_i
0	25	0.25
1	20	0.2
2		
3	15	0.15
4		0.05

10. En mi pueblo viven 1 100 familias. El 40 % de las familias tiene un solo hijo, el 35 % ninguno, el 11 % dos hijos y el resto más de dos.

 a) Calcula cuántas familias tienen ninguno, uno, dos o más hijos.

 b) Elabora una tabla de frecuencias con los datos obtenidos, y comprueba que los porcentajes coinciden con los del enunciado.

11. Hemos preguntado a un grupo de personas cuántas horas practicaban deporte a la semana. Elabora una tabla de frecuencias.

2	1	4	2	3	2	1	0	1	3
7	2	9	0	2	1	3	3	3	2
2	3	3	3	3	3	4	3	3	2

12. Realizamos un estudio para conocer el número de televisores que hay en cada vivienda en una determinada zona de la ciudad. Elabora una tabla de frecuencias.

1	1	2	2	2	2	0	0	4	3
2	3	4	3	4	1	1	1	2	0
3	4	2	2	4	4	2	1	4	1
1	1	2	2	2	2	1	1	1	2
2	1	1	3	3	1	1	2	2	1

Podemos agrupar los valores x_i en distintos intervalos, a los que llamaremos clases, y construir nuestra tabla de frecuencias de modo exactamente análogo.

La única diferencia que merece la pena notar es que al calcular parámetros podemos necesitar un valor numérico que represente al intervalo y para ello tomaremos la marca de clase, es decir, el valor central del intervalo.

Los alumnos de un centro, en rangos de edades.

clase	x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[12 14)	13	148	$\frac{148}{350}$ 42 %	148	42 %
[14 16)	15	133	$\frac{135}{350}$ = 38 %	281	80 %
[16 18)	17	62	$\frac{62}{350}$ 18 %	343	98 %
[18 20)	19	7	$\frac{7}{350}$ = 2 %	350	100 %
Total		350	1 = 100 %		

13. Hemos preguntado a la salida de un supermercado cuanto se han gastado en la compra:

26'45 43'91 22'15 29'03 31'25 34'21 25'12 21'34 28'76 26'51

Agrupa los datos de 5 en 5 a partir de los 20 euros, y haz la tabla de frecuencias.

14. Se han medido los pesos de un grupo de recién nacidos, y los resultados en kilos han sido los siguientes:

3'2	3'1	2'8	2'9	3'3	3'2	3'1	3'0	3'1	3'1
3'7	3'8	2'9	3'0	3'2	3'1	3'1	3'0	3'0	3'4
3'9	3'0	3'5	3'6	3'8	3'3	3'4	3'3	3'3	3'7

Elabora una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos de 200 gramos.

15. Los datos que se dan a continuación corresponden a los pesos en kilos de ochenta personas:

60	66	77	70	66	68	57	70	66	52
75	65	69	71	58	66	67	74	61	63
69	80	59	66	70	67	78	75	64	71
81	62	64	69	68	72	83	56	65	74
67	54	65	65	69	61	67	73	57	62
67	68	63	67	71	68	76	61	62	63
76	61	67	67	64	72	64	73	79	58
67	71	68	59	69	70	66	62	63	66

a) Elabora una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos de 5 kg.

b) Calcula el porcentaje de personas de peso menor que 65 kg.

c) Calcula el porcentaje de personas de peso mayor o igual que 70 Kg pero menor que 85 kg.

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Para presentar de modo visual los datos estadístico podemos apoyarnos en distintos tipos de grá cos:

- Para representar variables cualitativas frecuentemente se utiliza un grá cos de sectores circulares , en el que a cada valor se le asigna un sector de tamaño proporcional a su frecuencia.

- Para representar variables cualitativas y cuantitativas discretas se puede utilizar un diagrama de barras en el que a cada valor se le asigna una barra de tamaño proporcional a su frecuencia.

- Para representar variables cuantitativas con datos agrupados se puede utilizar un histograma , similar a un diagrama de barras en el que la base de cada barra corresponde con todo un intervalo.

16. Crea grá cos estadísticos adecuados para las tablas de frecuencias de los ejercicios del apartado anterior.

PARÁMETROS DE POSICIÓN

Los parámetros de posición nos permiten obtener información simpli cada de una variable estadística.

MODA

La moda (M_o) es el valor más frecuente de la variable.
Ten en cuenta que algunas variables pueden tener más de una moda.

4 4 3'5 **5** 4'5 3 **5** 6 3'5 **5**

La moda de estos datos es $M_o = 5$, porque es el valor que más veces se repite.

17. Las alturas de los miembros de la familia son: 1'72, 1'85, 1'65, 1'65 y 1'58. Halla la moda.

18. Mis notas de clase son: 4, 4'5, 5, 4, 5'5, 4, 6, 4, 5 y 6'5. Halla la moda.

19. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la moda.

20. Halla la moda de las variables del apartado de tablas de frecuencias.

La media aritmética simple ($\overline{x}$) es el resultado de sumar todos los valores posibles y dividirlo entre el número de datos.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \quad + x_n}{n}$$

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

En total tenemos 10 datos, así que los sumamos todos y dividimos entre 10.

$$\overline{x} = \frac{4+4+3'5+5+4'5+3+5+6+3'5+5}{10} = 4'35$$

21. Las alturas de los miembros de la familia son: 1'72, 1'85, 1'65, 1'65 y 1'58. Calcula la media.

22. Mis notas de clase son: 4, 4'5, 5, 4, 5'5, 4, 6, 4, 5 y 6'5. Calcula la media.

23. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la media.

Si trabajamos a partir de una tabla de frecuencias, en lugar de sumar un valor f_i veces podemos multiplicar x_i f_i.

$$\overline{x} = \frac{x_1\ f_1 + \quad + x_m\ f_m}{n}$$

x_i	f_i	h_i
0	2	$\frac{2}{20} = 10\,\%$
1	10	$\frac{10}{20} = 50\,\%$
2	7	$\frac{7}{20} = 35\,\%$
3	1	$\frac{1}{20} = 5\,\%$
Total	20	$1 = 100\,\%$

! $\overline{x} = \frac{0\ \ 2 + 1\ \ 10 + 2\ \ 7 + 3\ \ 1}{20} = 1'35$

24. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
f_i	16	32	12	4	1

a) ¾Cuál es la moda? b) Calcula la media.

25. Calcula la media de las variables cuantitativas del apartado de tablas de frecuencias.

La media ponderada es otro tipo de media utilizado muy frecuentemente, en el que cada valor x_i se multiplica por su peso (es decir, la importancia que tiene respecto al total) y se divide entre la suma de los pesos.

$$x = \frac{x_1 \;\; p_1 + \qquad + x_n \;\; p_n}{p_1 + \qquad + p_n}$$

26. En una asignatura, la cuali cación se calcula como el 80 % de la nota de exámenes, el 10 % la nota de las tareas de clase y casa y otro 10 % la actitud respecto al trabajo.

    a) Halla la cuali cación de un alumno que obtuvo un 5 en los exámenes, pero tiene un 0 en las tareas y otro 0 en el trabajo.

    b) Halla la cuali cación de otro alumno que obtuvo un 4 en los exámenes, pero tiene la nota máxima en tareas y trabajo.

MEDIANA

La mediana es el valor central de la variable, obtenida tras ordenar todos los valores de menor a mayor.

- Si los datos son impares es sencillo, pues al ordenarlos de menor a mayor es evidente cuál es el valor central.

- Si los datos son pares habrá dos valores centrales, así que hallamos la media aritmética simple de ambos.

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

Antes de nada, tenemos que ordenar los datos de menor a mayor.

3 3'5 3'5 4 4 4'5 5 5 5 6

Como en el centro hay dos números, les hacemos la media aritmética:

$$Me = \frac{4 + 4'5}{2} = 4'25$$

27. Las alturas de los miembros de la familia son: 1'72, 1'85, 1'65, 1'65 y 1'58. Calcula la mediana.

28. Mis notas de clase son: 4, 4'5, 5, 4, 5'5, 4, 6, 4, 5 y 6'5. Calcula la mediana.

29. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la mediana.

30. Compara la moda, la media y la mediana que has obtenido con el mismo enunciado.

Cuartiles

Si la mediana se obtiene dividiendo la lista de datos ordenados a la mitad, los cuartiles se obtienen dividiéndola en cuartos de forma análoga.

- Q_1 es el primer cuartil, hay un cuarto de valores menores que él.
- Q_2 es el segundo cuartil. Coincide con la mediana.
- Q_3 es el tercer cuartil, hay un cuarto de valores mayores que él.

3 3'5 3'5 4 4 4'5 5 5 5 6

Como en total hay 10 datos al partir a la mitad nos quedan 5 datos a la izquierda y 5 datos a la derecha, por eso $Q_2 = Me = 4'25$.
Al repartir esos 5 nuevamente en dos mitades, el valor central será Q_1 y Q_3 respectivamente.

3 3'5 3'5 4 4 | 4'5 5 5 5 6

$Q_1 = 3'5$ $Q_3 = 5$

31. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Halla los cuartiles.

32. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
f_i	16	32	12	4	1

Halla los cuartiles.

Parámetros de dispersión

Si los parámetros de posición nos dan una idea de dónde está el centro, los parámetros de posición nos indican si la mayoría de los datos están próximos a ese centro o repartidos a mayor distancia.

Rango

El rango o recorrido es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor.

El rango intercuartículo es la diferencia entre el tercer cuartil y el primero.

3 3'5 3'5 4 4 | 4'5 5 5 5 6

$R = 6 \quad 3 = 3$ $R_I = 5 \quad 3'5 = 1'5$

33. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Halla el rango y el rango intercuartílico.

34. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
f_i	16	32	12	4	1

a) Halla el rango.

b) Halla el rango intercuartílico.

VARIANZA

Llamamos desviación respecto a la media a la diferencia entre cada dato y la media, es decir, $x_i \quad \overline{x}$.

La varianza (s^2) es la media de los cuadrados de las desviaciones.

$$s^2 = \frac{(x_1 \quad \overline{x})^2 + \quad + (x_n \quad \overline{x})^2}{n}$$

Si desarrollamos los cuadrados y reorganizamos los sumandos del numerador, podemos expresar la varianza de esta otra forma:

$$s^2 = \frac{(x_1)^2 + \quad + (x_n)^2}{n} \quad (\overline{x})^2$$

Y, por supuesto, si trabajamos a partir de una tabla de frecuencias en lugar de sumar un valor f_i veces podemos multiplicarlos por f_i.

x_i	f_i	h_i
0	2	$\frac{2}{20} = 10\,\%$
1	10	$\frac{10}{20} = 50\,\%$
2	7	$\frac{7}{20} = 35\,\%$
3	1	$\frac{1}{20} = 5\,\%$
Total	20	$1 = 100\,\%$

$$\overline{x} = \frac{0 \quad 2 + 1 \quad 10 + 2 \quad 7 + 3 \quad 1}{20} = 1{}^{0}35$$

$$s^2 = \frac{0^2 \quad 2 + 1^2 \quad 10 + 2^2 \quad 7 + 3^2 \quad 1}{20} \quad 1{}^{0}35^2$$

$$= 2{}^{0}35 \quad 1{}^{0}8225 = 0{}^{0}5275$$

DESVIACIÓN TÍPICA

La desviación típica (s) es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$s = +\sqrt{s^2}$$

35. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la varianza y la desviación típica.

36. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
f_i	16	32	12	4	1

Calcula la varianza y la desviación típica.

37. Calcula la varianza y desviación típica de las variables cuantitativas del apartado de tablas de frecuencias.

PROBABILIDAD

Si al realizar un experimento conocemos de antemano el resultado, decimos que es un **experimento determinista**.

En cambio, en un **experimento aleatorio** no podemos predecir el resultado que se obtendrá al realizarlo, es decir, depende del azar. Para estudiarlos necesitaremos el **cálculo de probabilidades**.

1. Indica si estos experimentos son aleatorios.

    a) Lanzar una moneda y anotar el resultado.
    b) Determinar la hora a la que termina la clase.
    c) Medir la longitud de una circunferencia de la que conocemos el radio.
    d) Lanzar un dardo a una diana y observar en qué número cae.
    e) Abrir un libro y anotar el número de página.
    f) Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo del que conocemos sus catetos.

A cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio se le llama **suceso elemental**.

2. Indica cuántos sucesos elementales hay en los siguientes experimentos aleatorios:

    a) Lanzar una moneda.
    b) Landar un dado.
    c) Sacar una carta de una baraja española, que tiene cartas del 1 al 7 y tres figuras en cada uno de los 4 palos.
    d) Sacar una carta de una baraja española, que tiene cartas del 1 al 12 en cada uno de los 4 palos.
    e) Sacar una carta de la baraja francesa, que tiene cartas del 1 al 10 y tres figuras en cada uno de los 4 palos, más dos comodines.

El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los sucesos elementales.
Lo representaremos con la letra E.

3. Escribe el espacio muestras del los siguientes experimentos aleatorios:

    a) Lanzar una moneda.
    b) Landar un dado.
    c) Lanzar dos monedas.
    d) Lanzar dos dados.

Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral, es decir, un conjunto formado por sucesos elementales.

Un suceso puede estar formado por un solo suceso elemental, o por varios. Incluso todos. ¡O ninguno!

4. Describe los siguientes sucesos del experimento lanzar dos monedas:

   a) No sale ninguna cara.
   b) Sale una cara.
   c) Sale al menos una cara.
   d) Sale al menos una cruz.

5. Describe los siguientes sucesos del experimento lanzar dos dados:

   a) Suman 2.
   b) Suman 4.
   c) Suman 6.
   d) Suman 10.
   e) Suman 12.
   f) Suman 15.

Probabilidad de un suceso

La **probabilidad** de un suceso es la mayor o menor certeza de que llegue a ocurrir.
Se expresa como un número comprendido entre 0 (0 %, un suceso imposible) y 1 (100 %, un suceso seguro).

No confundas los términos posible/imposible con probable/improbable.

6. Imagina que ahora, repentinamente, ocurriesen los siguientes hechos.
   ¿Son posibles o imposibles? ¿Probables o improbables?

   a) Alguien peta en nuestra puerta.
   b) El Rey Felipe VI peta en nuestra puerta.
   c) El Rey Felipe IV peta en nuestra puerta.
   d) La profesora empieza a cantar una copla.
   e) La profesora se convierte en un reptil de 4 m de altura.
   f) El cristal de la ventana se rompe.
   g) La pared se rompe bajos los puños de Hulk.

Regla de Laplace

La probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de resultados favorables al suceso y el número total de resultados posibles.

Regla de Laplace

$$P(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos favorables al suceso A}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos posibles}}$$

Si queremos calcular la probabilidad de sumar 8 puntos al lanzar dos dados, debemos conocer el número de elementos del espacio muestral y contar la cantidad de sucesos que suman 8:

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

$$P(\text{sumar 8 puntos}) = \frac{5}{36} \quad 13'89\,\%$$

En cambio, si queremos calcular la probabilidad de que sumen *al menos* 8 puntos:

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

$$P(\text{sumar al menos 8 puntos}) = \frac{15}{36} \quad 41'67\,\%$$

7. Si tiramos una moneda:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar cara?

   b) ¿Y de sacar cruz?

8. Lanzamos dos dados y sumamos los puntos obtenidos, como en el ejemplo. Calcula la probabilidad de que sumen:

   a) Dos puntos.

   b) Más de dos puntos.

   c) Siete puntos.

   d) Distinto de siete puntos.

   e) Más de 12 puntos.

   f) Menos de 12 puntos.

9. En una baraja española de 40 cartas:

   a) ¿Qué probabilidad hay de sacar el rey de copas?

   b) ¿Y de sacar un rey, del palo que sea?

   c) ¿Y de sacar una carta cualquiera de copas?

10. Para conseguir dinero para un viaje de fin de curso se ha organizado un sorteo. Se venderán 200 papeletas y solo habrá un número ganador.

    a) Si compro todas las papeletas, ¿qué probabilidad tengo de ganar el sorteo?

    b) ¿Y si no compro ninguna?

    c) ¿Qué probabilidad tengo si compro simplemente una?

    d) ¿Y si compro 100 papeletas?

11. Tengo una caja de chinchetas de colores. Hay 12 de color azul, 15 de color verde, 8 de color rojo y 10 de color amarillo. Calcula las probabilidades de que una chincheta extraída al azar sea:

    a) De color rojo.

    b) De color blanco.

    c) De color verde o azul.

    d) No amarillo.

12. Considera el experimento que consiste en sacar una bola de una bolsa que contiene 5 bolas azules, 7 rojas y 3 verdes. Calcula la probabilidad de estos sucesos:

    a) Sacar una bola verde.

    b) Sacar una bola verde o roja.

    c) Sacar una bola que no sea verde.

    d) Sacar una bola negra.