Matrices e determinantes

O concepto de matriz coma un cadro ou táboa de números é unha ferramenta con moitas aplicacións nos campos da teoría de grafos (redes sociais, buscas de Google), en fotografía dixital (compresión de imaxes), en criptografía (cifrado de mensaxes), en economía (matriz de *input-output*), en demografía (matriz de evolución da poboación), etc.

Definición de matriz

Unha **matriz** de dimensión $m \times n$ é un conxunto de $m \cdot n$ números reais dispostos en m filas e n columnas da forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Un **elemento** xenérico dunha matriz denótase por a_{ij}, onde o subíndice i representa a fila que ocupa e o subíndice j representa a columna que ocupa.
A matriz A tamén se pode designar como $A = (a_{ij})$, onde $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ ou, de forma abreviada, $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Dúas matrices $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ son **iguais** se:

- Teñen a mesma dimensión.
- Os elementos que ocupan o mesmo lugar en ambas as matrices coinciden, é dicir $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Nunha matriz $A = (a_{ij})$ a fila i-ésima é o vector

$$F_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

e a columna j-ésima é o vector

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

CC BY-NC

Esta matriz é de dimensión 2×3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A matriz A ten 2 filas

$$F_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e 3 columnas

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tipos de matrices

Matrices rectangulares

Unha **matriz rectangular** é aquela que ten distinto número de filas que de columnas, $m \neq n$.
O conxunto de matrices de dimensión $m \times n$ denótase por $M_{m\times n}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow A \in M_{3\times 2}$$

Unha **matriz fila** é unha matriz que só ten unha fila, $m = 1$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow B \in M_{1\times 4}$$

Unha **matriz columna** é unha matriz que só ten unha columna, $n = 1$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow C \in M_{3\times 1}$$

Unha **matriz nula** é aquela que ten todos os seus elementos iguais a 0.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow O \in M_{3\times 2}$$

Matrices cadradas

Unha **matriz cadrada** é aquela que ten igual número de filas que de columnas, $m = n$.
O conxunto de matrices de dimensión $n \times n$, o cal denominamos **orde** n, denótase por M_n.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -6 & -7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow D \in M_3$$

(cc) BY-NC

Dada unha matriz cadrada de orde n, nela definimos:

- A **diagonal principal**, formada polos elementos a_{ij} tales que $i = j$.
- A **diagonal secundaria**, formada polos elementos a_{ij} tales que $i + j = n + 1$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

diagonal principal — diagonal secundaria

Unha **matriz triangular** é aquela que ten nulos todos os termos situados por debaixo (triangular **superior**) ou por enriba (triangular **inferior**) da diagonal principal.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz triangular superior de orde 3 — matriz triangular inferior de orde 3

Unha **matriz diagonal** é aquela na cal todos os elementos que <u>non</u> están situados na diagonal principal son nulos.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow G \in M_3$$

Unha **matriz escalar** é aquela na cal todos os elementos que <u>non</u> están situados na diagonal principal son nulos, e os da diagonal principal son iguais.

$$H = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow H \in M_3$$

Unha **matriz unidade** ou **identidade** é aquela na cal todos os elementos que <u>non</u> están situados na diagonal principal son nulos, e os da diagonal principal son iguais a 1. Desígnase por I.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \longleftarrow I \in M_3$$

(cc) BY-NC

Operacións con matrices

Suma de matrices

Dadas dúas matrices $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ da mesma dimensión $m \times n$, a **suma** de A e B é outra matriz da mesma dimensión $m \times n$ dada por:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

É dicir, a suma obtense sumando un a un os elementos que ocupan o mesmo lugar en ambas as matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades da suma

- Asociativa $\quad A + (B + C) = (A + B) + C$
- Conmutativa $\quad A + B = B + A$
- Elemento neutro $\quad A + O = A = O + A$
- Elemento oposto $\quad A + (-A) = O = -A + A$

Produto dunha matriz por un escalar

Dada unha matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$, e dado un número $k \in \mathbb{R}$ (un escalar), o produto de ambos é outra matriz da mesma dimensión $m \times n$ dada por:

$$k \cdot A = k \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$$

É dicir, o produto por un escalar obtense multiplicando polo número real todos os elementos da matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad k = -2$$

$$-2 \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -2 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

(cc) BY-NC

Propiedades do produto por un escalar

- Distributiva respecto da suma de matrices $\lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
- Distributiva respecto da suma de escalares $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
- Conmutativa $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$
- Asociativa mixta $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$
- Elemento neutro $1 \cdot A = A$

1. Calcula $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
2. Calcula $2A - 3I$, sendo $A = (a_{ij})$ a matriz de dimensión 3×3 definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} -2 & \text{se } i = 1 \\ (-1)^i \cdot (i+1) & \text{se } j = 2 \\ i \cdot j & \text{noutro caso} \end{cases}$$

Produto de matrices

Esta operación non é tan natural e intuitiva como poden ser as anteriores e, de feito, non sempre se pode realizar.
Dadas dúas matrices $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$ e $B = (b_{jk}) \in M_{n \times p}$, o **produto** de A e B é outra matriz de dimensión $m \times p$ dada por:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

$$(a_{ij}) \cdot (b_{jk}) = (c_{ik}) \qquad \text{con} \qquad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

É dicir, cada elemento c_{ik} obtense multiplicando ordenadamente os elementos da fila i-ésima da primeira matriz polos elementos da columna k-ésima da segunda matriz e sumando os resultados.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}} = \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 16 \end{pmatrix}}$$

(cc) BY-NC

Propiedades do produto de matrices

- Asociativa $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Elemento neutro $A \cdot I = I \cdot A = A$
- En xeral, non é conmutativa $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Distributiva respecto da suma $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C; \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- En xeral, non existe elemento inverso, pois non sempre existe unha matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$.

As operacións con matrices carecen de dúas propiedades moi importantes que si teñen os números reais, e para que non nos falle a intución temos que andar con ollo.
✓ O produto non é conmutativo. Debemos comprobar se a multiplicación é posible; de selo, debemos ter moito coidado co lado polo que se efectúa dita multiplicación.
✓ Como non sempre existe elemento inverso, para as matrices non temos definida unha operación de división.

3. Dada unha matriz $A \in M_{2\times 4}$, existe algunha matriz B tal que ou ben AB ou ben BA sexa unha matriz de 3 filas?

4. Dadas as matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   calcula todas as multiplicacións de dúas matrices distintas que sexan posibles.

5. Se A, B son matrices cadradas da mesma orde, saca factor común na expresión: $3A^2B - 4AB^2 + AB$.

6. Podes calcular A^2 para calquera matriz A?

7. Calcula A^{2000}, sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Acha todas as matrices que conmute coa matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, calcula os valores de a, b para que se verifique a igualdade $A^2 = A$.

(cc) BY-NC

Transposición de matrices

Chámase **matriz trasposta** dunha matriz A de dimensión $m \times n$ a outra matriz que se obtén ao cambiar en A as filas polas columnas, e viceversa. Denótase por A^t e, consecuentemente, a súa dimensión é $n \times m$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}$$

Propiedades da transposición de matrices

- Se unha matriz A é de orde n, a súa trasposta A^t tamén é de orde n.
- $\left(A^t\right)^t = A$
- $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
- $(\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

10. Escribe exemplos de (e se non é posible explica o porqué):

    a) Unha matriz triangular inferior de dimensión 4×3.

    b) Unha matriz que sexa á vez triangular superior e inferior.

11. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, comproba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

12. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calcula $A + A^t$.

Determinantes

A toda matriz cadrada se lle pode asociar un número real chamado determinante que contén certa información sobre esa matriz, e que permitirá desenvolver diversos cálculos e resolver situacións que veremos máis adiante.
A definición xeral do determinante é un chisco complexa, pero nos casos de orde 2 e orde 3 dá lugar a regras máis sinxelas, que serán as que empreguemos neste curso.

Cálculo dun determinante de orde 2

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

(cc) BY-NC

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 = 11$$

13. Calcula estes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ *b*) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ *c*) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ *d*) $\begin{vmatrix} -4 & b \\ b & -3 \end{vmatrix}$

Cálculo dun determinante de orde 3

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Existe unha regra mnemotécnica para este cálculo, coñecida como a **regra de Sarrus**:

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & + & + & + & & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & - & - & - & & \end{array}$$

1. Con signo positivo hai tres produtos, o dos elementos da diagonal principal e os dous das diagonais paralelas a ela co correspondente vértice oposto.
2. Con signo negativo hai tres produtos, o dos elementos da diagonal secundaria e os dous das diagonais paralelas a ela co correspondente vértice oposto.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = -15$$

14. Calcula estes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ *b*) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ *c*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ *d*) $\begin{vmatrix} c & -2 & 1 \\ 0 & -3 & c \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

(cc) BY-NC

Propiedades dos determinantes

Un par de observacións para as propiedades que seguen a continuación: primeiro, todas elas se refiren a matrices cadradas, e segundo, empregaremos o termo «liñas» para referirnos ou ben a filas paralelas ou ben a columnas paralelas.

1. O determinante dunha matriz coincide co da súa trasposta.

$$det(A) = det\left(A^t\right)$$

2. Se nunha matriz todos os elementos dunha liña se multiplican por un mesmo número real, o determinante queda multiplicado por dito número.

$$det(F_1, \ldots, \lambda \cdot F_i, \ldots, F_n) = \lambda \cdot det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n)$$

$$det(C_1, \ldots, \lambda \cdot C_i, \ldots, C_n) = \lambda \cdot det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$$

3. Se unha matriz ten unha liña na cal todos os elementos son ceros, entón o determinante é cero.

4. Se todos os elementos dunha liña dunha matriz se poden descompoñer en dous sumandos, entón o seu determinante é igual á suma de dous determinantes tales que teñen nesa liña os primeiros e os segundos sumandos, respectivamente, e nas demais os mesmos elementos que o determinante inicial.

$$det(F_1, \ldots, F_i + F_i', \ldots, F_n) = det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n) + det(F_1, \ldots, F_i', \ldots, F_n)$$

$$det(C_1, \ldots, C_i + C_i', \ldots, C_n) = det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) + det(C_1, \ldots, C_i', \ldots, C_n)$$

5. Se nunha matriz se permutan dúas liñas, o determinante cambia de signo.

$$det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_j, \ldots, F_n) = -det(F_1, \ldots, F_j, \ldots, F_i, \ldots, F_n)$$

$$det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$$

6. Se unha matriz ten dúas liñas proporcionais, o seu determinante é cero.

$$det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, \lambda \cdot F_i, \ldots, F_n) = 0 = det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, \lambda \cdot C_i, \ldots, C_n)$$

7. Se unha matriz ten dúas liñas iguais, o seu determinante é cero.

$$det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_i, \ldots, F_n) = 0 = det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$$

8. Se nunha matriz unha liña é combinación lineal das demais liñas, o seu determinante é cero.

$$det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_{n-1}, \lambda_1 \cdot F_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot F_{n-1}) = 0$$

$$det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_{n-1}, \lambda_1 \cdot C_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot C_{n-1}) = 0$$

9. Se nunha matriz a unha liña se lle suma a combinación lineal de outras liñas, o seu determinante non varía.

$$det(F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_n) = det(F_1, F_2, \ldots, F_i + \lambda_1 \cdot F_1 + \lambda_2 \cdot F_2, \ldots, F_n)$$

$$det(C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n) = det(C_1, C_2, \ldots, C_i + \lambda_1 \cdot C_1 + \lambda_2 \cdot C_2, \ldots, C_n)$$

(cc) BY-NC

10. Se A, B son dúas matrices da mesma orde, o determinante do produto coincide co produto dos determinantes.

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

15. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula:

    a) $|A|$ b) $|A^t|$ c) $|2A|$ d) $|-A|$ e) $|A^2|$

16. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{-3}{2}$ calcula:

    a) $\begin{vmatrix} a & 4b \\ c & 4d \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ -5c & -5d \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{vmatrix}$

17. Resolve:

    a) Sexa unha matriz cadrada A tal que $A^2 = A$. Acha os posibles valores do $det(A)$.
    b) Sexa unha matriz B tal que $B \cdot B^t = I$. Acha os posibles valores do $det(B)$.
    c) Sexa C unha matriz cadrada tal que $C^2 - 3C = -2I$. Demostra que $det(C)$ é non nulo.
    d) Dunha matriz cadrada D sábese que $det(D) = -1$ e que $det(2D) = -16$.
    Cal é a dimensión de D?

18. Sexa M unha matriz cadrada de orde 3 que verifica $det(M) = -1$ e que $M^3 + M + I = 0$. Calcula $det(M + I)$ e $det(3M + 3I)$.

19. Xustifica que estes determinantes son nulos tendo en conta as propiedades dos determinantes.

    (a) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & -8 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 5 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

Matriz inversa

Dada unha matriz A cadrada de orde n, a súa **matriz inversa** é outra matriz A^{-1} cadrada de orde n que verifica $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.
As matrices que teñen inversa chámanse **matrices regulares**, e as que non teñen inversa denomínanse **matrices singulares**.

Condición de inversibilidade

Unha matriz A cadrada de orde n é inversible se e só se o seu determinante é distinto de cero. Simbolicamente:

$$\exists A^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0$$

(cc) BY-NC

Propiedades da matriz inversa

- Se existe a matriz inversa, entón é única.
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$
- $\left(A^{-1}\right)^{t} = \left(A^{t}\right)^{-1}$

Métodos de cálculo da matriz inversa

Para calcular a matriz inversa dunha matriz regular existen varios procedementos.

Cálculo da matriz inversa por definición

Dada unha matriz regular A, escríbese outra matriz A^{-1} da mesma orde colocando unha incógnita diferente en cada un dos seus elementos. E resólvese a ecuación matricial $A \cdot A^{-1} = I$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = 8 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}$$

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ x+4z & y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2x = 1 \\ 2y = 0 \\ x + 4z = 0 \\ y + 4t = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{8} \\ t = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Dada a gran cantidade de cálculos necesarios para a súa resolución, sobre todo segundo medra n, utilizar a definición resulta un método moi pouco eficiente.

Cálculo da matriz inversa mediante determinantes

Dada unha matriz cadrada de orde n, $A = (a_{ij})$, chámase **menor complementario** do elemento a_{ij} ao determinante da matriz de orde $n-1$ que resulta de suprimir a fila i e a columna j. Denótase por α_{ij}.

Chámase **adxunto** dese elemento a_{ij} a $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$. É dicir, trátase do menor complementario correspondente, antepoñendo un signo *máis* ou *menos* segundo a suma dos subíndices sexa par ou impar, respectivamente.

Denomínase **matriz adxunta** á matriz formada polos adxuntos dunha matriz cadrada A dada. Denótase por $Adx(A)$.

BY-NC

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-3&-2&1\\0&3&1\end{pmatrix}\qquad Adx(A)=\begin{pmatrix}-5&3&-9\\1&2&-6\\-1&-2&-7\end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11}=\begin{vmatrix}-2&1\\3&1\end{vmatrix}=-5\qquad \alpha_{12}=\begin{vmatrix}-3&1\\0&1\end{vmatrix}=-3\qquad \alpha_{13}=\begin{vmatrix}-3&2\\0&3\end{vmatrix}=-9$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot(-5)=-5\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-3)=3\qquad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot(-9)=-9$$

20. Acha a matriz adxunta de:

a) $\begin{pmatrix}3&-1&0\\-2&5&1\\1&1&4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2&1&7\\-1&5&-1\\6&3&-2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}4&2&8\\-3&-5&-1\\7&-1&3\end{pmatrix}$

Dada unha matriz regular A, a súa matriz inversa vén dada pola seguinte expresión:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adx\left(A^t\right)=\frac{1}{|A|}\cdot\left[Adx\left(A\right)^t\right]$$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&1&-2\\0&-1&3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad |A|=6+0+1-0-4-0=3\neq0\quad\Rightarrow\quad \exists A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adx\left(A^t\right)=\frac{1}{3}\cdot Adx\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\-1&-2&3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\-3&6&3\\-1&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-1&2&1\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

21. Acha a inversa destas matrices empregando determinantes:

a) $A=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&0&1\\-1&3&-1\end{pmatrix}$

(cc) BY-NC

Cálculo da matriz inversa polo método de Gauss-Jordan

Dada unha matriz regular A, a súa inversa A^{-1} pode atoparse transformando a matriz $(A|I)$ na matriz $(I|A^{-1})$ mediante operacións elementais por filas.

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&1&-2\\0&-1&3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad |A|=6+0+1-0-4-0=3\neq 0\quad\Rightarrow\quad \exists A^{-1}$$

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-1&1&0&0\\1&1&-2&0&1&0\\0&-1&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to -2\cdot F_2+F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-1&1&0&0\\0&-2&3&1&-2&0\\0&-1&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3\to -2\cdot F_3+F_2}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-1&1&0&0\\0&-2&3&1&-2&0\\0&0&-3&1&-2&-2\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to F_3-3\cdot F_1]{F_2\to F_2+F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-6&0&0&-2&-2&-2\\0&-2&0&2&-4&2\\0&0&-3&1&-2&-2\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2\to F_2\div(-2)\\ F_3\to F_3\div(-3)}]{F_1\to F_1\div(-6)}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&-1&2&-1\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{array}\right)=(I|A^{-1})\quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-1&2&1\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

22. Acha a inversa destas matrices empregando o método de Gauss-Jordan:

$$A=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&0&1\\-1&3&-1\end{pmatrix}$$

23. Calcula os valores do parámetro real m para os cales estas matrices teñen inversa.

$$A=\begin{pmatrix}1&-m\\m&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2&m&0\\0&0&m\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

24. Sexa A unha matriz cadrada de orde 2 tal que $A^{-1}=A^t$. Pode ocorrer que $det(A)=3$?

25. Sexa A unha matriz cadrada de orde n e I a matriz unidade de orde n. Demostra que de verificarse $A^2+5A=I$, entón A posúe inversa.

26. Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, calcula todos os valores de a e b para que $A^{-1}=A^t$.

27. Determina todas as matrices B da forma $\begin{pmatrix}x&y\\y&x\end{pmatrix}$ que verfiquen $B^2=4B$. Se algunha é inversible, calcula a súa inversa.

(cc) BY-NC

Rango dunha matriz

O **rango** dunha matriz calquera é o número de liñas (filas ou columnas) non nulas e linealmente independentes que ten esa matriz.

Cálculo do rango mediante o método de Gauss

Consiste en transformar a matriz dada mediante operacións elementais por filas ou por columnas, obtendo ceros axeitadamente, e observando cantas liñas non nulas quedan.

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&1&-2\\3&-1&0\end{pmatrix}\ \underset{F_3\to 2\cdot F_3-3\cdot F_1}{\overset{F_2\to -2\cdot F_2+F_1}{\longrightarrow}}\ \begin{pmatrix}2&0&-1\\0&-2&3\\0&-2&3\end{pmatrix}\ \overset{F_3\to F_3-F_2}{\longrightarrow}\ \begin{pmatrix}2&0&-1\\0&-2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

En consecuencia, $rango(A)=2$.

Cálculo do rango mediante determinantes

Dada unha matriz A de dimensión $m\times n$, chámase **menor de orde** k, con $k\leq m$, $k\leq n$ ao determinante de orde k formado polos elementos que pertencen a k filas e a k columnas de A.

O rango dunha matriz A é a orde do maior menor non nulo que se pode obter nesa matriz.

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1&-2\\1&1&-2&2\\3&-1&0&4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad |2|=2\neq 0\quad\Rightarrow\quad rango(A)\geq 1$$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1&-2\\1&1&-2&2\\3&-1&0&4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}=2\neq 0\quad\Rightarrow\quad rango(A)\geq 2$$

Como a matriz ten só 3 filas, o rango non pode valer máis de 3. Para saber se é 2 ou 3, buscamos menores de orde 3 non nulos. Pero o último cálculo demostra que a primeira e a segunda columna son linealmente independentes, e por tanto chega con probar os menores que inclúan esas dúas columnas, máis unha das outras.

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1&-2\\1&1&-2&2\\3&-1&0&4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix}2&0&-1\\1&1&-2\\3&-1&0\end{vmatrix}=0+0+1-(-3)-0-4=0$$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1&-2\\1&1&-2&2\\3&-1&0&4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix}2&0&-2\\1&1&2\\3&-1&4\end{vmatrix}=8+0+2-(-6)-0-(-4)=20$$

En consecuencia, $rango(A)=3$.

(cc) BY-NC

Propiedades do rango dunha matriz

- Se unha matriz A ten dimensión $m \times n$, entón $rango(A) \leq mn(m, n)$. É dicir, o rango non pode ser maior que o valor máis pequeno entre m e n.
- Nunha matriz cadrada de orde n, o rango é n se e só se o seu determinante é distinto de cero.
- Se o rango dunha matriz é k, entón todos os menores de orde superior a k son nulos.
- Se o rango dunha matriz é k, entón as k filas e as k columnas que compoñen ese menor son linealmente independentes entre sí, e calquera outra é combinación lineal desas k.

28. Calcula o rango destas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

29. Escribe un matriz de dimensión 3×4 que teña, respectivamente:

    a) Rango 1 *b*) Rango 2 *c*) Rango 3 *d*) Rango 4

30. Estuda o rango destas matrices en función do parámetro real m:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$$

31. Sexa A unha matriz tal que $A^3 + I = O$, sendo I a matriz identidade e O a matriz nula de orde 3.

    a) Calcula o rango de A.

    b) Calcula o determinante de A^{30}.

    c) Calcula A no caso de que sexa unha matriz diagonal.

(cc) BY-NC

Resolución de ecuacións matriciais

Unha **ecuación matricial** é aquela na cal as incógnitas e os coeficientes son matrices. Traballaremos tan só con algúns casos sinxelos que conten cunha incógnita e sexan de grao un. Bastará con despexar a incógnita para posteriormente levar a cabo os cálculos necesarios.
Para facer o despexe, é imperativo ter en conta que:

- O produto de matrices non é conmutativo, e por tanto non é o mesmo multiplicar pola esquerda que facelo pola dereita.
- Non temos definida unha división de matrices, e por conseguinte a regra do produto consistirá en multiplicar pola inversa da matriz, e non en dividir.

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ e I a matriz identidade de orde 2, resolve a ecuación $A^2 \cdot X + B \cdot X + I = C$.

Comezamos por despexar a matriz X:

$$A^2 \cdot X + B \cdot X + I = C$$
$$A^2 \cdot X + B \cdot X = C - I$$
$$(A^2 + B) \cdot X = C - I$$
$$X = (A^2 + B)^{-1} \cdot (C - I)$$

E a continuación fanse os cálculos precisos para a resolución.

$$C - I = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A^2 + B)^{-1} = \frac{1}{|A^2 + B|} \cdot Adx\left[(A^2 + B)^t\right] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

32. Despexa a matriz X nestas ecuacións matriciais:

$$B \cdot (2A + I) = A \cdot X \cdot A + B \qquad XA + A^t = 2X \qquad BXB - B = B^{-1}$$

33. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula a matriz X tal que $XA + X = 2A$.

34. Sexa M unha matriz cadrada de orde 3 tal que $M^2 = 4M$. Determina a matriz X que verifica a ecuación matricial $(M - 2I)^2 \cdot X = I$.

(cc) BY-NC

35. Acha dúas matrices X, Y cadradas de orde 2 tales que $X + 2Y = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ e $2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

36. Determina unha matriz simétrica X de orde 2 tal que $X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e o determinante da matriz $3X$ é -9.

37. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcula a matriz X que verifica $AB^tX - X = 2B$.

38. Dada a matriz $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

   a) Resolve a ecuación matricial $BX = 3A^t$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   b) Canto vale o determinante da matriz $2B^{21}$?

BY-NC