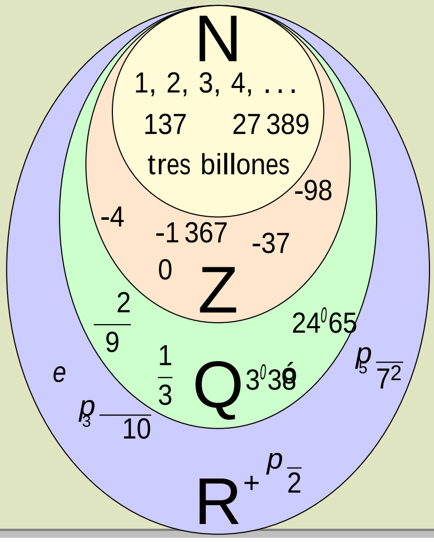
MATEMÁTICAS
orientadas a las enseñanzas
ACADÉMICAS 3

Índice

Números racionales



En cursos anteriores hemos trabajado fundamentalmente con **números naturales** (N) y **números enteros** (Z), aunque hemos ido adquiriendo alguna soltura en el manejo de **números racionales** (Q) escritos tanto en forma fraccional como en forma decimal.

En este curso continuaremos trabajando sobre lo ya conocido pero, sobre todo, avanzaremos de forma significativa en el manejo de **números reales** (R). .

Por eso iniciaremos el curso con un breve repaso de operaciones con números enteros (¡importantísimo no confundirse con los signos!) y procederemos a trabajar ya con fracciones desde el primer tema.

Operaciones con números negativos

A modo de repaso, recordemos las operaciones con números enteros.

- Para **sumar dos negativos**, sumamos su valor absoluto y al resultado le ponemos signo negativo.
- Para **sumar dos números de distinto signo**, restamos su valor absoluto y al resultado le ponemos el signo del mayor en absoluto.
- **Restar** un número es lo mismo que sumar su opuesto.
- Para **multiplicar o dividir** debemos tener en cuenta sus signos:

  Si ambos tienen el mismo signo, el resultado es positivo.

  Si tienen signos diferentes, el resultado es negativo.

Jerarquía de operaciones

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

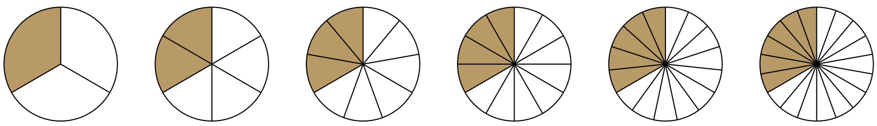
Las operaciones deben realizarse en el orden correcto.
Utilizaremos pasos intermedios siempre que sea necesario y procuraremos ser cuidadosos a la hora de operar con signos.

1. Opera:

a) 120 (16 5) [38 (6)]
b) 5 (2) 3 (1) 5 2 + 7
c) 16 [5 (9)] : (7) + 7 [5 3 (2)]
d) 24 : (2) 3 4 6 : 2 (3) (2)
e) 40 : (2) 5 6 + 6 [101 + 53 (2)]
f) (4) 3 : 2 3 23 + 5 (3) 20
g) (5 10) (5+10) 12 : [16 15 : (1) 29]
h) 3 (5 2) + 12 : (3) 4 (6 4)
i) 3^2 (4 3 2) + 6 + 2 (24 : 4)
j) [48 5 (9) : 3] 6 + 4 [19 3 (7)]
k) 2 [2 (4) 12 : (3)] (5^2 3 1)
l) 4 [2 (3 4 3)] + [4 (24 : 4)]^2 4

FRACCIONES EQUIVALENTES

Llamamos fracciones equivalentes a aquellas que representan el mismo número.
Un método para obtener fracciones equivalentes consiste en multiplicar (o dividir) numerador y denominador por el mismo número.



Una fracción es irreducible cuando el numerador y el denominador son primos entre sí (es decir, su único divisor común es 1) y por lo tanto no puede simpli carse más.

Recordemos que no son pares de números, sino cocientes de esos pares de números.
De dividir 1 entre 3 resulta lo mismo que de dividir 1 entre 3, que en ambos casos es el número negativo que corresponde a ese cociente.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

2. Simpli ca las siguientes fracciones:

a) $\frac{36}{100}$ d) $\frac{54}{80}$ g) $\frac{84}{21}$ j) $\frac{120}{104}$ m) $\frac{12}{100}$ o) $\frac{32}{128}$

b) $\frac{34}{51}$ e) $\frac{55}{121}$ h) $\frac{17}{68}$ k) $\frac{68}{80}$ n) $\frac{17}{34}$ p) $\frac{20}{45}$

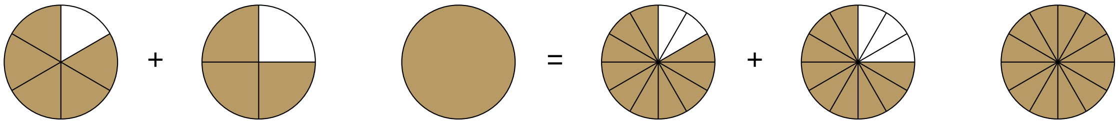
c) $\frac{81}{120}$ f) $\frac{32}{128}$ i) $\frac{20}{45}$ l) $\frac{1800}{32000}$ ñ) $\frac{84}{21}$ q) $\frac{120}{104}$

Simpli ca siempre que sea posible, los cálculos siguientes serán más fáciles.

Operaciones con fracciones

Suma y resta

Solo es posible sumar o restar aquellas fracciones que tienen el mismo denominador.
Si no lo tuviesen, procederíamos hallando fracciones equivalentes a ellas que tengan un denominador común.



$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} \quad 1 = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} \quad \frac{12}{12} = \frac{7}{12}$$

3. Opera y simpli ca:

a) $\frac{10}{11} \quad \frac{4}{7} + \frac{3}{5}$

b) $\frac{13}{12} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{5}{24}$

c) $\frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{8}$

d) $\frac{4}{15} + \frac{3}{5} \quad \frac{7}{3}$

e) $\frac{4}{7} + \frac{2}{3} \quad 5$

f) $\frac{5}{27} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{5}{3}$

g) $\frac{1}{6} \quad \frac{8}{3} + \frac{3}{20}$

h) $1 \quad \frac{15}{24} + \frac{50}{6}$

i) $\frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{4}{6}$

4. Opera y simpli ca:

a) $\frac{42}{18} + \frac{35}{20} \quad \frac{17}{42}$

b) $\frac{5}{5} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{5} \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{7}{6}$

e) $\frac{3}{5} \quad 7 \quad \frac{9}{10} + \frac{5}{12}$

f) $\frac{7}{8} \quad \frac{6}{7} + \frac{1}{14}$

g) $1 \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

h) $\frac{13}{17} + \frac{3}{15} \quad 9 + \frac{8}{20}$

i) $23 + \frac{7}{40} \quad \frac{10}{7} \quad 14$

Multiplicación y división

El producto de fracciones se obtiene multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{2}{7} \quad \frac{3}{4} = \frac{2 \quad 3}{7 \quad 4} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

El cociente de dos fracciones es igual al producto de la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{5}{6} : \frac{9}{8} = \frac{5 \quad 8}{6 \quad 9} = \frac{40}{54} = \frac{20}{27}$$

5. Opera y simpli ca:

a) $\frac{1}{5} \quad \frac{4}{7}$

b) $\frac{12}{15} \quad \frac{25}{36}$

c) $\frac{16}{5} \quad \frac{3}{90} \quad \frac{5}{11}$

d) $\frac{13}{42} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{24}{10}$

e) $\frac{3}{4} \quad \frac{11}{18} \quad 2$

f) $\frac{20}{9} \quad 5 \quad \frac{9}{11}$

g) $\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$

h) $\frac{1}{15} : \frac{6}{10}$

i) $\frac{12}{5} : \frac{4}{25}$

j) $\frac{7}{2} : (\quad 4)$

k) $8 : \frac{7}{6}$

l) $\frac{16}{5} : (\quad 24)$

6. Opera y simpli ca:

a) $\frac{3}{5}\quad\frac{4}{3}\quad\frac{6}{7}$

b) $4\quad\frac{6}{15}\quad\frac{9}{12}$

c) $\frac{12}{40}\quad(\quad 5)\quad\frac{35}{14}$

d) $\frac{8}{6}\quad\frac{17}{21}\quad\frac{1}{5}$

e) $\frac{40}{5}\quad\frac{10}{11}\quad\frac{2}{9}$

f) $20\quad\frac{7}{9}\quad 72$

g) $\frac{8}{12} : \frac{4}{24}$

h) $\frac{7}{10} : \frac{21}{10}$

i) $\frac{21}{8} : \frac{7}{8}$

j) $\frac{15}{20} : \frac{75}{16}$

k) $\frac{5}{6} : (\quad 15)$

l) $15 : \frac{5}{6}$

OPERACIONES COMBINADAS

El orden de las operaciones se mantiene en todos los conjuntos numéricos.
Utilizaremos pasos intermedios siempre que sea necesario y procuraremos ser cuidadosos a la hora de operar con signos.

Jerarquía de operaciones

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

7. Opera y simpli ca:

a) $\frac{1}{5}\quad\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\quad\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{10} : \quad\frac{2}{3}\quad\frac{2}{5}$

d) $\frac{2}{3}\quad\frac{1}{2}\ :\ \frac{1}{6}\quad\frac{2}{5}$

e) $\frac{23}{12}+\frac{1}{5} : \quad\frac{4}{5}+2$

f) $\frac{7}{4} : \quad\frac{4}{3}\quad\frac{3}{8}\quad 3$

8. Opera y simpli ca:

a) $\frac{5}{6}\quad\frac{2}{6}\quad\frac{9}{4}\quad\frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{3}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{7}{2}\quad\frac{1}{3}$

c) $\frac{5}{3}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{7}{2}\quad\frac{1}{3}$

d) $\frac{5}{36}\quad\frac{7}{16}+\frac{1}{4}:\frac{3}{5}$

e) $\frac{2}{3}\quad 5\quad\frac{3}{4}\quad\frac{7}{2}$

f) $\frac{5}{4}\quad\frac{3}{8}\quad\frac{4}{9}\quad\frac{4}{5}\quad 2$

9. Opera y simpli ca:

a) $\frac{7}{3}\quad\frac{4}{5}\quad 2\quad\frac{5}{3}$

b) $\frac{8}{3}\quad 2 : \frac{1}{3}\quad 1\quad\frac{5}{2}$

c) $3\quad\frac{4}{15}\quad\frac{7}{8}\quad 5\quad 9$

d) $1\quad\frac{3}{2}\quad 4\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{5}\quad\frac{1}{10}$

e) $\frac{3}{2}\quad\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\quad 5\quad\frac{3}{4}\quad\frac{6}{5}$

f) $1\quad\frac{3}{2}\quad 5\quad\frac{1}{2}\quad\frac{2}{3}+\frac{1}{9}$

Problemas con fracciones:

10. ¾Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa de 30 litros?

11. Para una esta hemos comprado 60 latas de refresco de $\frac{1}{3}$ de litro. ¾Cuántos litros había en total?

12. Dos hermanos se han repartido las canicas de un bote. El mayor se llevó $\frac{5}{8}$ del total y el menor las 66 restantes. ¾Cuántas canicas había en el bote?

13. Un frasco de perfume tiene una capacidad de $\frac{1}{20}$ litros. ¾Cuántos frascos de perfume pueden llenarse con el contenido de $\frac{3}{4}$ litros?

14. Breixo se come $\frac{2}{7}$ de un bizcocho y para la merienda $\frac{3}{5}$ de lo que le quedaba. ¾Qué fracción se ha comido? ¾Qué fracción ha sobrado?

15. De un depósito que contenía 600 litros de agua han sacado primero $\frac{1}{6}$ del total y después $\frac{3}{4}$ del total. ¾Cuántos litros quedan?

16. Compramos un televisor por 1300 € y pagamos $\frac{1}{4}$ al contado y el resto en 6 plazos. ¾Cuál será el importe de cada plazo?

17. En una carrera de coches el trazado tiene 372 km. ¾Cuántos kilómetros faltan para meta si ya han recorrido $\frac{9}{40}$?

18. Una persona ha cosechado durante la mañana $\frac{1}{43}$ de un campo y por la tarde la mitad del resto. Si todavía le quedan 170 hectáreas, ¾cuál es la super cie total del campo?

19. Un ganadero vende $\frac{3}{4}$ del número de reses que tiene. Más tarde $\frac{3}{4}$ del resto, quedando así 16 reses en la ganadería. ¾Cuántos animales tenía?

EXPRESIÓN DECIMAL Y FRACCIONAL

EXPRESIÓN DECIMAL DE UNA FRACCIÓN

Al dividir el numerador entre el denominador de una fracción se obtiene una expresión decimal equivalente a la propia fracción.

$\frac{10}{2} = 5$ $\frac{9}{2} = 4'5$ $\frac{2}{9} = 0'\hat{2}$ $\frac{2}{90} = 0'0\hat{2}$

Los números racionales pueden ser enteros, decimales exactos, decimales periódicos puros o decimales periódicos mixtos, tal y como ilustra el ejemplo anterior.
Pero ten en cuenta que también existen números decimales irracionales.

20. Escribe los siguientes racionales en forma decimal, dividiendo hasta la tercera cifra decimal, y clasifícalos cuando sea posible:

a) $\frac{26}{9}$	d) $\frac{48}{12}$	g) $\frac{67}{30}$	j) $\frac{91}{18}$	m) $\frac{61}{33}$
b) $\frac{45}{12}$	e) $\frac{88}{25}$	h) $\frac{108}{72}$	k) $\frac{925}{7}$	n) $\frac{47}{30}$
c) $\frac{1}{45}$	f) $\frac{44}{12}$	i) $\frac{136}{225}$	l) $\frac{60}{120}$	ñ) $\frac{333}{128}$

Fracción generatriz

La fracción generatriz de un número decimal es aquella fracción irreducible equivalente al número.

De un decimal exacto

Basta con escribir el número sin coma decimal y dividirlo por el múltiplo de 10 adecuado.

$$4'25 = \frac{425}{100} = \frac{17}{4}$$

21. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales exactos:

a) $3'5$
b) $6'8$
c) $3'9$
d) $14'07$
e) $42'08$
f) $16'94$
g) $0'001$
h) $3'025$
i) $0'025$
j) $12'50$
k) $10'10$
l) $4'95$

De un decimal periódico

Debemos multiplicar nuestro número por dos múltiplos de 10 que nos permitan obtener sendos resultados con idénticos decimales y proceder a restarlos entre si.
De este modo se simplifica la parte periódica y se puede despejar de forma sencilla.

Veámoslo con un decimal periódico puro como $x = 2'\widehat{35}$:

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 235'353535\ldots \\ x & = & 2'353535\ldots \\ \hline 99x & = & 233 \end{array}$$

Por lo tanto $x = 2'\widehat{35} = \dfrac{233}{99}$.

22. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos puros:

a) $3'\widehat{5}$
b) $6'\widehat{8}$
c) $3'\widehat{9}$
d) $14'\widehat{07}$
e) $42'\widehat{08}$
f) $16'\widehat{94}$
g) $0'\widehat{001}$
h) $3'\widehat{025}$
i) $0'\widehat{025}$
j) $12'\widehat{50}$
k) $10'\widehat{10}$
l) $4'\widehat{9}$

Veámoslo también con un decimal periódico mixto como $x = 2'3\widehat{5}$:

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 235'555555\ldots \\ 10x & = & 23'555555\ldots \\ \hline 90x & = & 212 \end{array}$$

Por lo tanto $x = 2'3\widehat{5} = \dfrac{212}{90} = \dfrac{106}{45}$.

23. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos:

a) 0'35	c) 0'39	e) 42'08	g) 0'001	i) 3'025	k) 1'25
b) 0'68	d) 14'07	f) 16'94	h) 0'001	j) 3'025	l) 1'250

FÓRMULA DE APLICACIÓN DIRECTA

La fracción generatriz de un número periódico es equivalente a:

$$\frac{\text{todas las cifras del número - las cifras no periódicas}}{\text{tantos 9 como cifras periódicas, tantos 0 como cifras decimales no periódicas}}$$

$$33'492 = \frac{33492 \quad 334}{990} = \frac{16579}{495}$$

24. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales, aplicando directamente la fórmula:

a) 1'6	d) 2'35	g) 10'42	j) 24'6	m) 3'2	o) 5'35
b) 7'67	e) 10'225	h) 4'9	k) 2'025	n) 3'20	p) 0'19
c) 4'25	f) 7'6	i) 15'15	l) 15'15	ñ) 12'17	q) 3'001

25. Realiza las operaciones siguientes expresando los números en forma de fracción:

a) 7'23 + 0'6 b) 4'72 : 0'22 c) 2'15 2'1 d) 0'75 + 0'25 1'6

APROXIMACIÓN Y ERRORES

Las cifras signi cativas de una medida son las que aportan información relevante.

- Aproximación por truncamiento : Se ignoran las cifras no signi cativas.
- Aproximación por redondeo : Se observa la primera cifra no signi cativa.

  Si es menor que 5, se actúa igual que por truncamiento.

  Si está entre 5 y 9, se suma 1 a la última cifra signi cativa.

Valor exacto	Truncamiento a centésimas
2'3	2'33
2'6	2'66

Valor exacto	Redondeo a centésimas
2'3	2'33
2'6	2'67

26. Aproxima los siguientes números a las unidades de millar, por truncamiento y por redondeo:

a) 3 125 345 b) 1 198 542 c) 15 738 928 d) 695 258

27. Aproxima los siguientes números a las décimas, por truncamiento y por redondeo:

a) $2'9876$ b) $13'9295$ c) $12'\widehat{4}$ d) $7'2\widehat{6}$ e) $4'4\widehat{15}$ f) $6'\widehat{3}$

28. Aproxima los siguientes números a las milésimas por truncamiento y por redondeo:

a) $2'9876$ b) $13'9295$ c) $12'\widehat{4}$ d) $7'2\widehat{6}$ e) $4'4\widehat{15}$ f) $6'\widehat{3}$

29. Aproxima los siguientes números a las décimas, por truncamiento y por redondeo:

a) $\frac{40}{3}$ b) $\frac{7}{18}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{5}{9}$ e) $\sqrt{7}$ f)

Al aproximar asumimos un cierto margen de error .
También hay errores que no derivan del cálculo sino de la medición, pues ni siquiera las herramientas más precisas son totalmente exactas.

Error absoluto

El error absoluto es la desviación con respecto al valor exacto, medido en valor absoluto (es decir, sin importar si el error es por exceso o por defecto).

$$e_a = |\text{valor exacto} - \text{valor aproximado}|$$

Cuando esa resta involucre fracciones, deberemos emplear la fracción generatriz del valor aproximado.

30. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las unidades de millar por truncamiento cada uno de los siguientes números.

a) 4 345 734 b) 8 945 354 c) 22 873 996 d) 423 298

31. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las unidades de millar por redondeo cada uno de los siguientes números.

a) 4 345 734 b) 8 945 354 c) 22 873 996 d) 423 298

32. Razona cuál de los dos métodos de aproximación te parece más útil.

33. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las décimas por redondeo cada uno de los siguientes números.

a) $4'345$ b) $27'5695$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{5}{9}$ e) $\frac{1}{30}$

34. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las milésimas por redondeo cada uno de los siguientes números, utilizando fracciones generatrices cuando sea conveniente.

a) $4'\widehat{32}$ b) $27'\widehat{56}$ c) $12'0\acute{2}$ d) $21'3\widehat{34}$ e) $1'1\acute{6}$

ERROR RELATIVO

No es lo mismo cometer un error 1 kg cuando pesas la harina de una tarta que cuando pesas un camión.

Por eso necesitamos una medida relativa que nos indique el error cometido en proporción al total, a la que llamaremos error relativo.

$$e_r = \frac{e_a}{\text{valor exacto}}$$

35. Calcula el error relativo cometido al redondear a las unidades de millar cada uno de los siguientes números.

a) 12 125 265 b) 3 729 613 c) 51 644 795 d) 234 512

36. Calcula el error relativo cometido al redondear a las décimas cada uno de los siguientes números.

a) $7'9834$ b) $25'4219$ c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{8}{9}$ e) $\frac{16}{3}$

37. Calcula el error relativo cometido al redondear a las milésimas cada uno de los siguientes números, utilizando fracciones generatrices cuando sea conveniente.

a) $3'\acute{6}$ b) $15'8\acute{4}$ c) $7'\widehat{54}$ d) $9'4\widehat{05}$ e) $1'2\widehat{15}$

Potencias y radicales

Potencias

Una potencia de exponente natural es una forma abreviada de escribir el producto de factores iguales.
Ese factor se llama base y el número de veces que la base se multiplica por si misma se llama exponente .

$$7^5 = 7 \quad 7 \quad 7 \quad 7 \quad 7$$
$$(\quad 10)^3 = (\quad 10) \quad (\quad 10) \quad (\quad 10)$$

Potencias de base entera

Cuando la potencia tiene base positiva, el resultado es siempre positivo.
Cuando la potencia tiene base negativa:

- si el exponente es par, el resultado es positivo.
- si el exponente es impar, el resultado es negativo.

Fíjate muy bien siempre en los signos negativos.
No es lo mismo que el signo forme parte de la base de la potencia que que esté fuera de ella.

$$(\quad 3)^2 = (\quad 3) \quad (\quad 3) = 9$$
$$3^2 = \quad 3 \quad 3 = 9$$

1. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) 7^3	d) 10^8	g) 5^4	j) 3^5	m) 2^6	o) 16^2
b) $(\quad 7)^3$	e) $(\quad 11)^2$	h) $\quad 8^3$	k) $(\quad 5)^4$	n) $(\quad 2)^6$	p) $(\quad 1)^{99}$
c) $\quad 4^4$	f) $\quad 6^2$	i) $(\quad 3)^8$	l) $\quad 13^4$	ñ) $\quad 2^6$	q) $\quad 1^{99}$

2. Al calcular una potencia de exponente 4 obtenemos como resultado 256. ¾Cuál es el valor de la base?

3. Hemos colgado un video en Youtube que se ha convertido en viral y el número de visitas se duplica cada hora.

   a) Si en el momento de colgarlo tiene solo 1 visita, expresa con una potencia las visitas que tendrá tras un día entero.

   b) Usa tu calculadora para obtener el número de visitas.

Operaciones con potencias

Potencias de la misma base

Para multiplicar potencias de la misma base basta con sumar sus exponentes.

$$7^2 \quad 7^3 = (7 \quad 7) \quad (7 \quad 7 \quad 7) = 7^5$$

Para dividir potencias de la misma base basta con restar sus exponentes.

$$3^9 : 3^4 = \frac{3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3}{3 \quad 3 \quad 3 \quad 3} = 3^5$$

Para calcular la potencia de una potencia basta con multiplicar sus exponentes.

$$(10^5)^3 = 10^5 \quad 10^5 \quad 10^5 = 10^{15}$$

No hay ninguna regla para la suma ni para la resta de potencias.

4. Escribe como una única potencia:

a) $3^2 \quad 3^5 \quad 3^4$	d) $(\ \ 10)^5 \quad (\ \ 10)^2 : (\ \ 10)^4$	g) $6^9 \quad (6^{15} : 6^{12})^2$
b) $7^6 : 7^2 : 7$	e) $(5^2)^3 : 5^5$	h) $(10^8 : 10^5)^3 \quad 10^7$
c) $12^{15} \quad 12^3 : 12^9$	f) $9^5 \quad (9^2 \quad 9^3)^2$	i) $(4^5 \quad 4^6)^2 : (4^2 \quad 4^4)^3$

Potencias del mismo exponente

La potencia de un producto es igual al producto de potencias.

$$(12 \quad 5)^3 = 12^3 \quad 5^3$$

La potencia de un cociente es igual al cociente de potencias.

$$(15 : 3)^4 = 15^4 : 3^4$$

5. Escribe como una única potencia:

a) $7^4\ \ 2^4\ \ 3^4$
b) $2^2\ \ 3^2\ \ (\ \ 1)^2$
c) $4^6\ \ 6^6 : 8^6$
d) $(\ \ 15)^3 : 5^3$
e) $9^7\ \ 8^7 : 6^7$
f) $(\ \ 20)^5 : 10^5\ \ (\ \ 1)^5$
g) $8^4\ \ 3^4 : 6^4$
h) $9^6 : (\ \ 15)^6\ \ 25^6$
i) $36^{\ 4}\ \ (\ \ 2)^{\ 4} : 24^{\ 4}$

6. Factoriza los números compuestos y escribe como una única potencia:

a) $9^8 : 3^9$
b) $8^3\ \ 2^5$
c) $(8^3)^2\ \ 16^2$
d) $3^5\ \ 9^6 : 27^2$
e) $25^4 : 125\ \ 5^6$
f) $(\ \ 4)^7 : (\ \ 2)^5$

POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

Toda potencia de exponente 0 procede de una división de potencias iguales, por eso siempre tiene valor 1.

$$12^0 = \frac{12^5}{12^5} = 1$$

Toda potencia de exponente negativo es igual a la inversa de la potencia con dicho exponente en valor absoluto.

$$\frac{1}{3^2} = \frac{3^0}{3^2} = 3^{\ 2}$$

7. Calcula:

a) $4^{\ 3}$
b) $9^{\ 2}$
c) $17^{\ 1}$
d) $(\ \ 3)^{\ 2}$
e) $2^{\ 6}$
f) $(\ \ 1)^{\ 19}$
g) $15^{\ 2}$
h) $(\ \ 2)^{\ 8}$
i) $3^{\ 4}$
j) $1^{\ 13}$
k) $2^{\ 8}$
l) $(\ \ 4)^{\ 3}$

8. Calcula:

a) $10^{\ 1}$
b) $10^{\ 2}$
c) $10^{\ 3}$
d) $10^{\ 6}$
e) 10^0
f) $10^{\ 12}$

9. Expresa como una única potencia:

a) $7^{\ 3}\ \ 7^0\ \ 7^5$
b) $5^{\ 6} : 5^{\ 4}$
c) $12^{\ 7} : 12^5\ \ 12^{20}$
d) $\frac{1}{7^2}\ \ 7^5 : 7^{\ 6}$
e) $3^9\ \ 3^{\ 7} : (3^2\ \ 3^{\ 3})^2$
f) $2^{\ 6} : 2^{\ 10}\ \ 2$
g) $(4^3 : 4^{\ 3})^{\ 4}\ \ (4^{\ 3}\ \ 4^{\ 1})^5$
h) $(6^4\ \ 6^{\ 1})^{\ 2}\ \ (6^2)^3 : 6$
i) $((\ \ 3)^4\ \ (\ \ 3)^2)^3 : (3^4\ \ 3)^3$

10. Expresa como una única potencia y calcula:

a) $\dfrac{(3^3)^{\ 2}\ \ 3^8\ \ 3}{(3^4\ \ 3^{\ 2})^2}$
b) $\dfrac{2^3\ \ 2^{\ 5}\ \ 2^4}{2^0\ \ 2^{\ 2}}$
c) $\dfrac{(5^{\ 2})^{\ 3}\ \ 5^5\ \ 5^{\ 10}}{((5^2)^{\ 1})^3\ \ 5^4}$

La potencia de una fracción es la que resulta de elevar el numerador y el denominador al exponente dado.

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{3} = \frac{(\;\,7)^3}{9^3}$$

Recuerda que una potencia de exponente negativo es igual a la inversa de la potencia con exponente en valor absoluto.

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{\;\,4} = \left(\frac{10}{3}\right)^{4}$$

11. Desarrolla como cociente de potencias y calcula:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2}$ c) $\left(\frac{\;1}{2}\right)^{4}$ e) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\;2}$ g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\;4}$

b) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3}$ d) $\left(\frac{\;5}{15}\right)^{3}$ f) $\left(\frac{4}{7}\right)^{\;3}$ h) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\;1}$

12. Calcula:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\;3} \left(\frac{2}{3}\right)^{0} \left(\frac{2}{3}\right)^{5}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\;6} : \left(\frac{1}{5}\right)^{\;4}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\;7} : \left(\frac{3}{4}\right)^{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{20}$

d) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2} \left(\frac{1}{7}\right)^{\;5} : \left(\frac{1}{7}\right)^{\;6}$

e) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\;6} : \left(\frac{4}{3}\right)^{\;10} \left(\frac{4}{3}\right)$

f) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2} : \left(\frac{1}{2}\right)^{\;3}\right]^{3} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\;4}\right]^{4}$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica es una forma de escribir los números que acomoda valores demasiado grandes (100 000 000 000) o pequeños (0 000 000 000 01) para ser escritos de manera convencional.

Los números expresados en notación científica constan de dos factores:

- un número con una única cifra entera
- una potencia de base 10

Expresión convencional	Notación científica
400 000	$4 \; 10^{5}$
32 000 000	$3\,2 \; 10^{7}$
0 000 5	$5 \; 10^{\;4}$
0 000 000 027	$2\,7 \; 10^{\;8}$

13. Escribe en notación científica:

a) 12 000 000 c) 0'000 000 37 e) 15 320 000 000 g) 0'000 004 236

b) 365 800 000 000 d) 0'004 075 f) 1 320 000 000 h) 0'000 000 017

14. Escribe en notación decimal:

a) $3'24 \cdot 10^{6}$ b) $4'26 \cdot 10^{8}$ c) $5'78 \cdot 10^{-8}$ d) $2'98 \cdot 10^{-7}$

15. Me han hecho un análisis de sangre, y el resultado dice que tengo 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3.

a) Expresa en notación científica los glóbulos rojos que hay en cada mm^3.

b) Expresa en notación científica los glóbulos rojos que tendré en total, teniendo en cuenta que tengo aproximadamente 4'5 litros de sangre.

16. Utiliza la calculadora para operar en notación científica:

a) $3 \cdot 10^{21} + 1'2 \cdot 10^{20}$ c) $(1'435 \cdot 10^{17}) \cdot (7'286 \cdot 10^{-15})$

b) $2'25 \cdot 10^{-15}$ $3'17 \cdot 10^{-13}$ d) $(5'25 \cdot 10^{12}) : (2'5 \cdot 10^{9})$

17. Se estima que el volumen de agua de los océanos es de 1 285 600 000 km^3 y el volumen de agua dulce 35 millones de km^3.
Escribe esas cantidades en notación científica y expresa la proporción de agua dulce.

18. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente $9'109 \cdot 10^{-31}$ kg.
Teniendo en cuenta que el hidrógeno cuenta con un único electrón, ¿qué masa tiene el núcleo del átomo de hidrógeno?

RADICALES

La raíz cuadrada es la operación inversa a la potencia de exponente 2.

La raíz cúbica es la operación inversa a la potencia de exponente 3.

La raíz cuarta es la operación inversa a la potencia de exponente 4.

Y así sucesivamente.

$$\sqrt[n]{x} = a \iff a^n = x$$

El número que está dentro del símbolo de raíz ($\sqrt{x}$) se llama **radicando** y el número pequeño que aparece en el exterior (n) se llama **índice**. Cuando el índice es 2 no es necesario indicarlo.

> No existen raíces cuadradas reales de **números negativos**, pero sí raíces cúbicas, quintas y de cualquier otro índice impar.

Las raíces de índice par, cuando existen, pueden tomar dos valores opuestos.
Si no se nos especifica un signo concreto debemos asumir que se buscan ambos resultados.

$$5^2 = 25 \rightarrow \sqrt{25} = \pm 5$$

19. Calcula las siguientes raíces cuadradas, cuando sea posible, e indica todas las soluciones posibles:

a) $\sqrt{49}$	d) $\sqrt{2\,500}$	g) $\sqrt{12\,100}$	j) $\sqrt{0}$
b) $\sqrt{225}$	e) $\sqrt{8\,100}$	h) $\sqrt{22\,500}$	k) $\sqrt{-49}$
c) $\sqrt{400}$	f) $\sqrt{10\,000}$	i) $\sqrt{16\,000\,000}$	l) $\sqrt{-121}$

20. Calcula las siguientes raíces, cuando sea posible, e indica todas las soluciones posibles:

a) $\sqrt[3]{1}$ b) $\sqrt[3]{-1}$ c) $\sqrt[4]{16}$ d) $\sqrt[4]{-16}$ e) $\sqrt[5]{32}$ f) $\sqrt[5]{-32}$

En ocasiones el cálculo de una raíz es demasiado complicado, pues el resultado puede ser un número irracional.
Por ello dejaremos el **radical** indicado y realizaremos las operaciones y simplificaciones que sea posible sin intentar expresarlo en forma decimal.

POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL

Los radicales de índice n se corresponden con potencias de exponente $\frac{1}{n}$.

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Si el radical tiene un exponente basta aplicar las propiedades de las operaciones de potencias para simplificarlo.

$$\sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$$

21. Transforma las siguientes potencias en radicales:

a) $5^{\frac{1}{6}}$ b) $2^{\frac{1}{5}}$ c) $8^{\frac{3}{4}}$ d) $7^{\frac{2}{3}}$ e) $10^{-\frac{2}{3}}$ f) $3^{-\frac{5}{2}}$

22. Convierte los siguientes radicales en potencias de exponente fraccionario y simplifica la fracción:

a) $\sqrt[4]{3^{12}}$ b) $\sqrt[16]{9^{8}}$ c) $\sqrt[10]{7^{15}}$ d) $\sqrt[4]{3^{12}}$

23. Calcula, transformando en potencia o radical cuando sea preciso:

a) $\sqrt[3]{11^{6}}$ b) $16^{0,5}$ c) $\sqrt{81^{0,5}}$ d) $\sqrt{32^{0,6}}$

Simplificación de radicales

Para simplificar un radical, se expresa en forma de potencia de exponente fraccionario y se halla la fracción irreducible del exponente.

$$\sqrt[10]{3^{5}} = 3^{\frac{5}{10}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

24. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[8]{7^{2}}$ b) $\sqrt[10]{2^{4}}$ c) $\sqrt[6]{11^{12}}$ d) $\sqrt[21]{3^{7}}$ e) $\sqrt[6]{5^{3}}$ f) $\sqrt[15]{13^{10}}$

25. Factoriza los radicandos y simplifica:

a) $\sqrt[4]{64}$ b) $\sqrt[2]{1024}$ c) $\sqrt[5]{1024}$ d) $\sqrt[4]{1024}$ e) $\sqrt[2]{729}$ f) $\sqrt[3]{729}$

Operaciones con radicales como potencias

Teniendo en cuenta que los radicales son potencias de exponente racional, es lógico pensar que podemos emplear todas las reglas de operaciones para potencias.
Pero en este caso debemos tener muy claras las reglas de operaciones con fracciones.

Radicales con el mismo radicando

Para multiplicar radicales con el mismo radicando debemos sumar las inversas de sus índices.

$$\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{7^{5}}$$

Para dividir radicales con el mismo radicando debemos restas las inversas sus índices.

$$\sqrt[4]{3} : \sqrt[8]{3} = 3^{\frac{1}{4}} : 3^{\frac{1}{8}} = 3^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{3}$$

26. Multiplica los siguientes radicales y simplifica cuando sea posible:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3^{3}}$ b) $\sqrt[3]{5^{2}} \cdot \sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[6]{7^{2}}$ d) $\sqrt[3]{11} \cdot \sqrt[6]{11^{4}}$

27. Divide los siguientes radicales y simplifica cuando sea posible:

a) $\sqrt{3} : \sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt[4]{7} : \sqrt[6]{7}$ d) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[6]{2}$

La potencia de un radical es igual al radical de la potencia.

$$\left(\sqrt{10^3}\right)^5 = \left(10^{\frac{3}{2}}\right)^5 = 10^{\frac{15}{2}} = \sqrt{10^{15}}$$

La raíz de un radical se calcula multiplicando los índices.

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$$

28. Simplifica las siguientes potencias de radicales:

a) $\left(\sqrt{10}\right)^4$ b) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^2$ c) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$ d) $\left(\sqrt[6]{7^5}\right)^3$

29. Opera las siguientes raíces de radicales:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}}$ b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{9}}$ c) $\sqrt{\sqrt[4]{7}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{15}}$

Radicales con el mismo índice

El radical de un producto es igual al producto de radicales.

$$\sqrt[3]{10} = (2 \cdot 5)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}$$

El radical de un cociente es igual al cociente de radicales.

$$\sqrt[4]{\frac{20}{3}} = \left(\frac{20}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{20^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{3}}$$

30. Factoriza los radicandos y convierte en producto de radicales:

a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt[3]{60}$ c) $\sqrt[3]{24}$ d) $\sqrt{225}$

31. Realiza las siguientes operaciones, siempre que sea posible:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ b) $\sqrt[4]{3} : \sqrt[4]{27}$ c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5}$ d) $\sqrt[3]{7} : \sqrt[4]{2}$

Extracción de factores de un radical

Otra forma de hacer más manejable un radical es extrayendo los factores que sea posible. Cuando el exponente del radicando es mayor que el índice, lo separamos en dos partes: una de ellas ha de ser múltiplo del índice. Esa parte podrá simplificarse a un número entero.

$$\sqrt[4]{13^{11}} = \sqrt[4]{13^8 \cdot 13^3} = \sqrt[4]{13^8} \cdot \sqrt[4]{13^3} = 13^2 \cdot \sqrt[4]{13^3}$$

32. Extrae los factores del radical que sea posible:

a) $\sqrt{11^7}$ b) $\sqrt[5]{7^{12}}$ c) $\sqrt[4]{2^9}$ d) $\sqrt[3]{5^9}$ e) $\sqrt{3^9}$ f) $\sqrt[5]{3^{6}}$

33. Factoriza y extrae factores del radical:

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt[3]{32}$ c) $\sqrt[5]{64}$ d) $\sqrt{729}$ e) $\sqrt[4]{729}$ f) $\sqrt[3]{625}$

En un caso general, factorizamos el radicando y aplicamos la propiedad del producto de potencias del mismo exponente.

$$\sqrt[3]{2^5 \cdot 5^3 \cdot 7^8} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^6 \cdot 7^2} = 2 \cdot 7^2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 6 \cdot 7^2}$$

34. Extrae factores del radical:

a) $\sqrt{2^{17} \cdot 5^{20} \cdot 7^{15}}$ c) $\sqrt[3]{2^{30} \cdot 7^{54} \cdot 11^{14}}$ e) $\sqrt[3]{2^{18} \cdot 13^2 \cdot 7^{20}}$

b) $\sqrt{2^{25} \cdot 3^8 \cdot 13^{17}}$ d) $\sqrt[3]{2^{24} \cdot 3^{18} \cdot 5^{15}}$ f) $\sqrt[6]{5^{28} \cdot 17^{15} \cdot 29^{12}}$

35. Factoriza y extrae factores del radical:

a) $\sqrt{75}$ c) $\sqrt[3]{48}$ e) $\sqrt{1375}$ g) $\sqrt{24}$ i) $\sqrt{1620}$ k) $\sqrt[3]{3240}$

b) $\sqrt{162}$ d) $\sqrt[4]{80}$ f) $\sqrt[3]{432}$ h) $\sqrt{87}$ j) $\sqrt[4]{104}$ l) $\sqrt[4]{405}$

Suma y resta de radicales

Las reglas de las operaciones con potencias no facilitan ningún método para sumar o restar radicales.

Pero en aquellos casos en los que los radicales sean semejantes (es decir, mismo radicando y mismo índice) podemos aplicar un razonamiento algebraico para extraer factor común y realizar la operación.

$$5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (5 + 7)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

Si no son semejantes no podremos operar, y debemos dejar la operación indicada.

36. Realiza las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{6}+2\sqrt{6}$ b) $5\sqrt{2}-9\sqrt{2}$ c) $3\sqrt[3]{25}-7\sqrt[3]{25}$ d) $\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{5}+5\sqrt[3]{5}$

37. Plantea cuidadosamente y opera:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\sqrt[3]{7}+\dfrac{\sqrt[3]{7}}{4}$ c) $\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{5}-\dfrac{\sqrt[4]{5}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}+3\sqrt{15}$

38. Extrae factores de los radicales y opera cuando sea posible:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}$ b) $\sqrt[3]{88}-\sqrt[3]{297}$ c) $\sqrt{45}-\sqrt[3]{40}$ d) $\sqrt{12}+\sqrt{18}$

SUCESIONES

Una sucesión es una secuencia infinita y ordenada de números.

$$\{2; 4; 6; 8; 10; 12; \ldots\}$$

Llamamos término a cada uno de los elementos de una sucesión.
Para representar los diferentes términos de una sucesión se utiliza un subíndice que indica su posición en en la sucesión.

Posición	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Término	$a_1 = 2$	$a_2 = 4$	$a_3 = 6$	$a_4 = 8$	$a_5 = 10$

1. a) Representa (con el formato del primer ejemplo) la sucesión de los números naturales impares.
   b) ¿Cuál es el término en quinta posición? ¿Y en décima posición?
2. a) Representa la sucesión de números racionales cuyo numerador son números naturales y cuyo denominador es siempre 4.
   b) ¿Cuál es el término en cuarta posición? ¿Y en sexta posición? ¿Y en vigésima?

Se llama término general de una sucesión al término que ocupa el lugar n-ésimo y se escribe con la letra que denote a la sucesión y subíndice n.

$$a_n = 2n \qquad b_n = \frac{1}{n} \qquad c_n = n^3$$

El término general, cuando somos capaces de obtenerlo, es una herramienta que facilita enormemente el trabajo con sucesiones.
Para hallar el término en la posición 1 basta con sustituir la n por 1, para la posición 2 la sustituimos por 2, etc.

$$a_n = \frac{n^2}{3}$$

$$n = 1 \rightarrow a_1 = \frac{1^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{3^2}{3} = 3$$

3. Halla los primeros diez términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 1 \quad n$ c) $c_n = (3 + \ n)^2$ e) $e_n = n^2$ g) $g_n = n^2 + n \quad 1$

b) $b_n = n + 4$ d) $d_n = (\quad 1)^n$ f) $f_n = \frac{1}{n}$ h) $h_n = \quad n^2$

4. ¾Cuál es el término general de las siguientes sucesiones?

a) f 1; 2; 3; 4; : : : g   e) f 2; 4; 8; 16: : : g   i) f 0; 1; 4; 9; : : : g

b) f 1; 2; 4; 8; : : : g   f) f 4; 9; 16; 25; : : : g   j) f 10; 5; 0;   5; : : : g

c) f 1; 4; 9; 16; : : : g   g) f 10; 15; 20; 25; : : : g   k) f 2;   4; 8;   16; : : : g

d) f 2; 3; 4; 5; : : : g   h) f 5; 10; 20; 40; : : : g   l) f   1;   4;   9;   16; : : : g

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Las progresiones aritméticas son un tipo particular de sucesiones que se caracterizan por que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.
La diferencia suele representarse con una letra d, y puede ser un valor real cualquiera.

$$a_n = \text{f } 2; \underset{+3}{\;} 5; \underset{+3}{\;} 8; \underset{+3}{\;} 11; \underset{+3}{\;} 14; : : : \text{ g} \qquad d = 3$$

5. Comprueba si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas:

a) f 1; 2; 3; 4; : : : g   e) f 2; 4; 8; 16: : : g   i) f 0; 1; 4; 9; : : : g

b) f 1; 2; 4; 8; : : : g   f) f 4; 9; 16; 25; : : : g   j) f 10; 5; 0;   5; : : : g

c) f 1; 4; 9; 16; : : : g   g) f 10; 15; 20; 25; : : : g   k) f 2;   4; 8;   16; : : : g

d) f 2; 3; 4; 5; : : : g   h) f 5; 10; 20; 40; : : : g   l) f   1;   4;   9;   16; : : : g

El término general de una progresión aritmética puede calcularse a partir de su primer término y su diferencia.

$$a_n = \text{f } 2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14;\ : : : \text{ g } ! \quad \begin{matrix} a_1 = 2 \\ d = 3 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 2 + \ d = 5 \\ a_3 &= 2 + 2\ d = 8 \\ a_4 &= 2 + 3\ d = 11 \\ a_5 &= 2 + 4\ d = 14 \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir que su término general ha de tener la misma estructura.

$$a_n = a_1 + (n \quad 1) \quad d$$

6. Halla el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
b) $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$
c) $\{10, 15, 20, 25, \ldots\}$
d) $\{10, 5, 0, -5, \ldots\}$
e) $\{-10, 0, 10, 20, \ldots\}$
f) $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\}$

7. ¿Cuál es el primer término de una progresión aritmética cuyo quinto término tiene valor 3 y cuya diferencia es $d = 2$? Escribe su término general.

8. ¿Cuál es el primer término de una progresión aritmética de la cual conocemos el milésimo término $a_{1000} = 232'7$ y la diferencia $d = 0'1$? Escribe su término general.

9. Halla el término general de las progresiones aritméticas de las que conocemos los siguientes datos y utilízalo para calcular a_{100}:

a) $a_{20} = 10,\ d = 1$
b) $a_{15} = 2,\ d = -1$
c) $a_{30} = 100,\ d = 2$
d) $a_{25} = 78,\ d = -2$
e) $a_{25} = 16,\ a_{26} = 19$
f) $a_{25} = 25,\ a_{35} = 55$

Suma de términos

En ocasiones es necesario sumar una cantidad finita de términos de una sucesión. Si esa cantidad fuese lo suficientemente pequeña podríamos hacerlo directamente, pero con frecuencia se trata de una cantidad tan grande que sería muy poco práctico.

Digamos que queremos calcular los m primeros términos de una sucesión y a esa suma le llamaremos S_m.

$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} + a_m$$

Como la suma es conmutativa, es lo mismo sumarlos en ese orden que justo al contrario.

$$S_m = a_m + a_{m-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

Entonces es claro que si sumo una expresión a la otra lo que obtengo es el doble de la suma.

$$\begin{array}{rcccccccccc} S_m & = & a_1 & + & a_2 & + \ldots + & a_{m-1} & + & a_m \\ S_m & = & a_m & + & a_{m-1} & + \ldots + & a_2 & + & a_1 \\ \hline 2\cdot S_m & = & (a_1 + a_m) & + & (a_2 + a_{m-1}) & + \ldots + & (a_{m-1} + a_2) & + & (a_1 + a_m) \end{array}$$

Para que esto resulte de utilidad necesitamos darnos cuenta que en realidad todas esas parejas de sumandos tienen el mismo valor:

$$\begin{aligned} a_1 + a_m &= 2\cdot a_1 + (m-1)\cdot d \\ a_2 + a_{m-1} &= 2\cdot a_1 + (m-1)\cdot d \\ a_i + a_{m-i+1} &= 2\cdot a_1 + (m-1)\cdot d \quad \forall i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Así que en realidad se trata de m sumandos iguales, a los que por simplicidad nos referiremos como $a_1 + a_m$.

$$2\cdot S_m = (a_1 + a_m)\cdot m$$

Y con solo despejar llegamos a una expresión cómoda para la suma de los m primeros términos de una progresión aritmética:

$$S_m = \frac{(a_1 + a_m) \cdot m}{2}$$

10. Suma los 500 primeros términos de la progresión aritmética $a_n = \{5; 7; 9; 11; \dots\}$.
11. Suma los 150 primeros términos de la progresión aritmética $a_n = \{20; 17; 14; 11; \dots\}$
12. Suma los 300 primeros términos de la progresión aritmética $a_n = \{\frac{7}{8}; \frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{1}{2}; \dots\}$
13. Suma los 100 primeros números pares.
14. Suma los 200 primeros múltiplos de 5.
15. Suma los números impares menores que 100.
16. Suma los múltiplos de 3 menores que 1000.
17. Suma los múltiplos de 9 mayores que 1000 y menores que 2000.

Problemas:

18. El primer piso de un edificio está a 4'2 metros de altura y la distancia entre dos pisos consecutivos es de 3'6 metros. ¿A qué altura está el décimo piso?
19. Entrenando un ejercicio de resistencia he decidido aumentar progresivamente el tiempo que le dedico. La primera sesión lo realicé durante 10 minutos y cada semana medio minuto más que la anterior. Al cabo de un año, ¿cuál será mi sesión de entrenamiento de este ejercicio?
20. La dosis inicial de un medicamento es de 100 mg, y se reduce en 5mg en cada una de las dosis siguienes. Si un paciente tiene que tomar 12 dosis, ¿cuántos miligramos toma en total?

Progresión geométrica

Las progresiones geométricas son un tipo particular de sucesiones que se caracterizan por que la razón entre dos términos consecutivos es constante.
La razón suele representarse con una letra r, y puede ser un valor real cualquiera.

$$a_n = \{3 \xrightarrow{\cdot 2} 6 \xrightarrow{\cdot 2} 12 \xrightarrow{\cdot 2} 24 \xrightarrow{\cdot 2} 48; \dots\} \qquad r = 2$$

21. Comprueba si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas:

a) $\{2; 3; 4; 5; \dots\}$	d) $\{10; 15; 20; 25; \dots\}$	g) $\{8; 4; 2; 1; \dots\}$
b) $\{2; 4; 8; 16 \dots\}$	e) $\{5; 10; 20; 40; \dots\}$	h) $\{10; 5; 0; -5; \dots\}$
c) $\{100; 10; 1; 0'1; \dots\}$	f) $\{3; 1'5; 0'75; 0'375; \dots\}$	i) $\{2; -4; 8; -16; \dots\}$

El término general de una progresión geométrica puede calcularse a partir de su primer término y su razón.

$$a_n = \{3, 6, 12, 24, 48, \ldots\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 3 \cdot 2 = 6 \\ a_3 &= 3 \cdot 2^2 = 12 \\ a_4 &= 3 \cdot 2^3 = 24 \\ a_5 &= 3 \cdot 2^4 = 48 \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir que su término general ha de tener la misma estructura.

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

22. Halla el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) $\{2, 10, 50, 250, \ldots\}$
b) $\{3, 9, 27, 81, \ldots\}$
c) $\{100, 10, 1, \frac{1}{10}, \ldots\}$
d) $\{3, 1'5, 0'75, 0'375, \ldots\}$
e) $\{2, -4, 8, -16, \ldots\}$
f) $\{\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, 3, -6, \ldots\}$

23. ¿Cuál es el primer término de una progresión geométrica cuyo quinto término tiene valor 64 y cuya razón es $r = 2$? Escribe su término general.

24. ¿Cuál es el primer término de una progresión geométrica cuyo décimo término tiene valor 10 y cuya razón es $r = \frac{1}{3}$? Escribe su término general.

25. Halla el término general de las progresiones geométricas de las que conocemos los siguientes datos y utilízalo para calcular a_{50}. Exprésalo en notación científica si es necesario.

a) $a_3 = 16$, $r = 2$
b) $a_5 = 45$, $r = 2$
c) $a_6 = 10$, $r = -1$
d) $a_9 = \frac{1}{81}$, $a_{10} = \frac{1}{243}$
e) $a_7 = 0'00032$, $r = -0'2$
f) $a_8 = 8$, $a_{10} = 2$

Suma de términos

Queremos calcular la suma S_m de los m primeros términos de una sucesión.

$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} + a_m$$

Si esa sucesión es una progresión geométrica necesitamos aplicar algún razonamiento que aproveche sus propiedades, por eso optamos por multiplicar por la razón r que convertirá cada término en el siguiente.

$$r \cdot S_m = a_2 + a_3 + \ldots + a_m + a_{m+1}$$

Podemos observar que tenemos dos sumas de m elementos en las que solo hay diferencia en un par de ellos, por lo tanto restar ambas expresiones nos permitirá eliminar muchas de ellas.

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
r \cdot S_m & = & & & a_2 & + & \dots & + & a_m & + & a_{m+1} \\
S_m & = & a_1 & + & a_2 & + & \dots & + & a_m & & \\
\hline
(r-1) \cdot S_m & = & -a_1 & & & & & & & + & a_{m+1}
\end{array}
$$

Y con solo despejar llegamos a una expresión cómoda para la suma de los m primeros términos de una progresión aritmética:

$$\boxed{S_m = \frac{a_{m+1} - a_1}{r - 1}}$$

Teniendo en cuenta que $a_{m+1} = a_1 \cdot r^n$ es posible emplear la expresión equivalente:

$$S_m = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

26. Suma los 100 primeros términos de la progresión geométrica $a_n = \{4, 12, 36, 108, \dots\}$.
27. Suma los 30 primeros términos de la progresión geométrica $a_n = \{24, 12, 6, 3, \dots\}$
28. Suma los 100 primeros términos de la progresión geométrica $a_n = \{3, -3'3, 3'63, -3'993, \dots\}$
29. Suma las 30 primeras potencias de base 2.
30. Suma las 40 primeras potencias de base 3.

Problemas:

31. La población de un cierto país ha aumentado durante 5 años, en progresión geométrica, de 200 000 a 322 102 personas. ¿Cuál ha sido la razón del aumento?
32. Una bacteria tiene un ciclo reproductivo por el cual se duplica cada 20 minutos. Si en una muestra de tierra hay aproximadamente 40 millones de bacterias, ¿cuántas habrá al cabo de tres horas?
33. Una pelota de goma cae desde una altura de 40 metros y en cada rebote sube el 40 % de la altura anterior. Halla la altura que alcanza en el octavo rebote.
34. Hoy hay 17 casos en nuestra localidad de una enfermedad altamente contagiosa, se estima que cada persona infectará a otras tres y que además ocurrirá en las primeras 24 horas.
    a) ¿Cuántos nuevos contagiados esperamos tener el séptimo día?
    b) Si en ese tiempo no ha sido dado de alta ninguno de los casos, ¿cuántos infectados habrá en total?

Aplicaciones a la aritmética financiera

Una de las aplicaciones más inmediatas de las progresiones aritméticas y geométricas se da en el campo de las transacciones bancarias, en donde se utilizan intereses simples e intereses compuestos dependiendo del caso.

INTERÉS SIMPLE

El **interés simple** (i) es el beneficio que origina una cantidad de dinero denominada **capital inicial** (C_0) a un **rédito anual** del r % tras un tiempo t (expresado en años) si dicho beneficio se retira al final de cada período de tiempo sin reinvertirlo.

Como cada año se recibe el interés correspondiente $C_0 \cdot r$, que es siempre el mismo, está claro que el **capital final** después de t años (C_t) sigue una progresión aritmética.

$$C_t = C_0 + C_0 \cdot r \cdot t$$

En esa expresión a menudo se saca factor común para indicarla como:

$$C_t = C_0 \cdot (1 + r \cdot t)$$

35. Calcula el capital final de depósitos de interés simple tras cinco años. ¿Cuál es el interés (beneficio) en cada uno de ellos?

    a) $C_0 = 120\,000$ € $\quad r = 1'2$ %
    b) $C_0 = 80\,000$ € $\quad r = 0'9$ %
    c) $C_0 = 19\,000$ € $\quad r = 0'6$ %
    d) $C_0 = 15\,000$ € $\quad r = 0'45$ %

36. He depositado $150\,000$ € en un déposito a un $r = 0'6$ % de interés simple. Calcula el número de años que tardaré en conseguir al menos el siguiente interés:

    a) $1\,800$ € b) $2\,700$ € c) $36\,000$ € d) $50\,000$ €

INTERÉS COMPUESTO

Cuando el interés que se obtiene al final de cada período de inversión no se retiran sino que se añaden al capital y se reinvierten nos encontramos con el concepto de **interés compuesto**.
Ente casa es necesario observar que cada año se obtiene un interés diferente, pero que siempre depende directamente del capital depositado ese año.

$$\begin{aligned}
C_0 &\rightarrow C_1 = C_0 + C_0 \cdot r = C_0 \cdot (1 + r) \\
C_1 &\rightarrow C_2 = C_1 + C_1 \cdot r = C_1 \cdot (1 + r) \\
C_2 &\rightarrow C_3 = C_2 + C_2 \cdot r = C_2 \cdot (1 + r)
\end{aligned}$$

Resulta entonces evidente que se trata de una progresión geométrica de razón $(1 + r)$, y que por lo tanto el **capital final** después de t años (C_t) puede expresarse como:

$$C_t = C_0 (1 + r)^t$$

37. Calcula el capital final de depósitos de interés compuesto tras cinco años. ¿Cuál es el interés (beneficio) en cada uno de ellos?

    a) $C_0 = 120\,000$ € $\quad r = 1'2$ %
    b) $C_0 = 80\,000$ € $\quad r = 0'9$ %
    c) $C_0 = 19\,000$ € $\quad r = 0'6$ %
    d) $C_0 = 15\,000$ € $\quad r = 0'45$ %

POLINOMIOS

Una expresión algebraica es es un conjunto de cantidades numéricas y literales relacionadas entre si mediante operaciones.
Las letras que utilizamos no son más que signos para representar cantidades desconocidas, por eso las llamamos incógnitas.

> Mi hermano tiene un año menos que yo, y mi tía el triple de edad que él.
>
> Mi edad $\rightarrow$ x
> La edad de mi hermano $\rightarrow$ $x - 1$
> La edad de mi tía $\rightarrow$ $3\cdot(x-1)$

El valor numérico de una expresión algebraica es el resultado obtenido al sustituir las variables por un número determinado.

$$x^2 - x^3 \text{ para } x = -1 \rightarrow (-1)^2 - (-1)^3 = 1 - (-1) = 2$$

1. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $3x + 7$ para $x = 2$
   b) $x^2 - 1$ para $x = \frac{2}{3}$
   c) $t\cdot(t-1)$ para $t = 0'5$
   d) $\dfrac{a+2}{a^2}$ para $a = -1$
   e) $x\cdot y + 3$ para $x = 2$; $y = 5$
   f) $x\cdot(y+3)$ para $x = 2$; $y = 5$

Un polinomio es una expresión algebraica formada por la suma de varios monomios no semejantes, a los que llamamos términos.
Cada uno de los términos tiene un grado, que corresponde al exponente de su incógnita (si solo tiene una) o a la suma de los exponentes de todas las incógnitas (si tiene varias).

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 7x - 17$$

A los polinomios se les suele nombrar con una letra mayúscula y, entre paréntesis, las incógnitas involucradas en él.

- El grado de un polinomio es el mayor de los grados de sus términos.
- El término principal es aquel de mayor grado.
- El término independiente es aquel de grado cero.

2. Identi ca el término independiente, el término principal y el grado de los siguientes polinomios:

a) $x^4 + 2x^2 \quad 3x + 7$	e) $x \quad x^2 + x^3$	i) $0{'}4x^5 \quad 3{'}5x^2 + 0{'}12$
b) $5x \quad 7x^3 + 111$	f) $\quad 5x^{10} + x^9 \quad 4x^4$	j) $\frac{1}{2}x \quad \frac{3}{4}$
c) $4x^3 \quad 2x$	g) $xy + 7x \quad 2y + 4$	k) 15
d) $7x^2 + 12x \quad 1$	h) $\quad 3x^2 + 2x^5 + 8$	l) $2^3x^8 + 3^7x^5 + 12^{15}$

3. Ordena los siguientes polinomios de tal modo que el grado de sus términos sea descendiente:

a) $x \quad x^4 + 4$	c) $2x \quad x^4 + 2$	e) $5x^2 + 3x \quad 11x^5 + 2$
b) $1 + x \quad x^4 + 2x^2$	d) $3 + 7x^6$	f) $12x + 1 \quad x^2$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

En las sumas (o restas) de polinomios se suman (o restan) los monomios semejantes que los componen.

	$P(x) =$		x^2	$+7x$	2
	$Q(x) =$	$12x^3$		$+4x$	9
$P(x)$	$Q(x) =$	$12x^3$	$+x^2$	$+3x$	$+7$

4. Dados los polinomios $P(x) = 6x^2 + 5x \quad 5$, $Q(x) = \quad 3x^2 \quad 6x + 7$, $R = 3x^2 \quad 2$, realiza las siguientes operaciones:

a) $P(x) + Q(x)$	d) $P(x) \quad R(x)$	g) $P(x) + Q(x) + R(x)$
b) $P(x) \quad Q(x)$	e) $Q(x) + R(x)$	h) $P(x) \quad Q(x) + R(x)$
c) $P(x) + R(x)$	f) $Q(x) \quad R(x)$	i) $Q(x) \quad R(x) \quad P(x)$

5. Halla el valor numérico de las expresiones algebraicas anteriores cuando $x = 0$.

6. Dados los polinomios $P(x) = \quad x^2 + 2x + 7$, $Q(x) = 5x^2 \quad 2x + 7$, $R = 4x^2 \quad 5$, realiza las siguientes operaciones:

a) $P(x) + Q(x)$	d) $P(x) \quad R(x)$	g) $P(x) + Q(x) + R(x)$
b) $P(x) \quad Q(x)$	e) $Q(x) + R(x)$	h) $P(x) \quad [Q(x) + R(x)]$
c) $P(x) + R(x)$	f) $Q(x) \quad R(x)$	i) $Q(x) \quad [R(x) \quad P(x)]$

7. Halla el valor numérico de las expresiones algebraicas anteriores cuando $x = \frac{1}{2}$.

En el producto de un polinomio por un monomio se aplica la propiedad distributiva, es decir, se multiplica cada término del polinomio por el monomio.

$$3x^2 \quad (4x^3 \quad 2x) = 3x^2 \quad 4x^3 \quad 3x^2 \quad 2x = 12x^5 \quad 6x^3$$

8. Realiza las siguientes operaciones:

a) $4 \quad (2x^3 + 3x^2 \quad 5x + 1)$

b) $(\quad 5) \ (\quad 8x^4 + x^2 \quad 3x + 1)$

c) $2x \quad (15x^3 + 6x^2 \quad \frac{1}{2}x)$

d) $(\quad 10x^3) \ (0^{0}1x^2 \quad x + 10)$

e) $\frac{1}{3}x^2 \quad (15x^3 + 6x^2 \quad 9)$

f) $\frac{4}{3}x \quad (\frac{6}{4}x^5 \quad \frac{9}{4}x^3 \quad \frac{1}{3})$

En los productos de polinomios se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio. La expresión obtenida debe simpli carse sumando los monomios semejantes que se obtengan.

$$\begin{aligned} P(x) &= \ 2x^2 + 3x \quad 1 \\ Q(x) &= \ 5x + 7 \\ P \quad Q(x) &= \ 10x^3 + 7x^2 + 15x^2 + 21x \quad 5x \quad 7 \\ &= \ 10x^3 + 22x^2 + 16x \quad 7 \end{aligned}$$

9. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(x + 1) \quad (x + 2)$

b) $(2x + 3) \quad (4x \quad 1)$

c) $(\quad 5x + 7) \quad (x^2 \quad 2)$

d) $(2x^2 + 1) \quad (3x^3 \quad 5)$

e) $(x^2 \quad 1) \quad (x^3 + x \quad 1)$

f) $(3x^3 + \frac{1}{2}) \quad (2x^4 \quad 6x)$

10. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(x^2 + x + 1) \quad (x^2 \quad 3x + 2)$

b) $(2x^3 \quad 5x + 3) \quad (4x^2 + 5x \quad 1)$

c) $(\quad 5x^3 + 7x^2 + 1) \quad (4x^2 \quad 7x \quad 2)$

d) $(2x^2 \quad 8x + 1) \quad (3x^3 + 8x \quad 5)$

e) $(x^4 \quad 2x^2 + 3) \quad (3x^2 + 7x \quad 4)$

f) $(x^4 + 3x) \quad (x^4 \quad 3x)$

11. Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas anteriores cuando $x = \frac{2}{3}$.

12. Realiza las siguientes operaciones, teniendo en cuenta que una potencia es la multiplicación de un factor por sí mismo tantas veces como indica el exponente:

a) $(x + 1)^2$

b) $(x \quad 1)^2$

c) $(2x + 1)^2$

d) $(2x \quad 1)^2$

e) $(3x + 4)^2$

f) $(3x \quad 4)^2$

g) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} \quad ^2$

h) $\frac{1}{3}x \quad \frac{2}{5} \quad ^2$

El cuadrado de la suma NO es igual a la suma de los cuadrados.
El cuadrado de la resta NO es igual a la resta de los cuadrados.

Para calcular el cuadrado de una suma, debemos multiplicar la suma por sí misma.
Si lo hacemos mediante el procedimiento habitual del producto observamos claramente que obtenemos tres términos, que siempre tienen la sigueinte relación:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

13. Desarrolla utilizando identidades notables:

a) $(3x+4)^2$
b) $(8x+5)^2$
c) $(5+2x)^2$
d) $(3x^2+5x)^2$
e) $(x^3+7x^2)^2$
f) $(4x^4+3x^3)^2$
g) $(9x^5+7x^3)^2$
h) $(x^6+x^4)^2$
i) $(3x^3+4x^6)^2$
j) $(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3})^2$
k) $(\frac{1}{4}x+\frac{3}{8})^2$
l) $(\frac{3}{5}x^2+\frac{2}{3})^2$

Para calcular el cuadrado de una resta procedemos de modo análogo:

$$(a \quad b)^2 = a^2 \quad 2ab + b^2$$

14. Desarrolla utilizando identidades notables:

a) $(3x \quad 4)^2$
b) $(8x \quad 5)^2$
c) $(5 \quad 2x)^2$
d) $(3x^2 \quad 5x)^2$
e) $(x^3 \quad 7x^2)^2$
f) $(4x^4 \quad 3x^3)^2$
g) $(9x^5 \quad 7x^3)^2$
h) $(x^6 \quad x^4)^2$
i) $(3x^3 \quad 4x^6)^2$
j) $(\frac{1}{2}x \quad \frac{1}{3})^2$
k) $(\frac{1}{4}x \quad \frac{3}{8})^2$
l) $(\frac{3}{5}x^2 \quad \frac{2}{3})^2$

Existe otra identidad notable que se corresponde al producto de una suma por una resta que tienen términos análogos.

$$(a+b)(a \quad b) = a^2 \quad b^2$$

15. Desarrolla utilizando identidades notables:

a) $(3x+4)(3x \quad 4)$
b) $(8x+5)(8x \quad 5)$
c) $(5+2x)(5 \quad 2x)$
d) $(3x^2+5x)(3x^2 \quad 5x)$
e) $(x^3+7x^2)(x^3 \quad 7x^2)$
f) $(4x^4+3x^3)(4x^4 \quad 3x^3)$
g) $(9x^5+7x^3)(9x^5 \quad 7x^3)$
h) $(x^6+x^4)(x^6 \quad x^4)$
i) $(3x^3+4x^6)(3x^3 \quad 4x^6)$
j) $(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3})(\frac{1}{2}x \quad \frac{1}{3})2$
k) $(\frac{1}{4}x \quad \frac{3}{8})(\frac{1}{4}x+\frac{3}{8})$
l) $(\frac{3}{5}x^2+\frac{2}{3})(\frac{3}{5}x^2 \quad \frac{2}{3})$

La utilidad principal de las identidades notables es la descomposición de polinomios complejos en potencias o productos de binomios.

16. Halla la identidad notable que corresponde a cada polinomio:

a) $25x^2 + 20x + 4$	d) $100x^4 + 100x^2 + 25$	g) $\frac{4}{25}x^2 + 2x + \frac{25}{4}$
b) $64x^2 \quad 96x + 36$	e) $9x^6 \quad 12x^5 + 4x^4$	h) $\frac{1}{9}x^2 \quad \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$
c) $100x^2 \quad 16$	f) $49x^8 \quad 25x^4$	i) $\frac{100}{49}x^2 \quad \frac{1}{9}$

17. Comprueba si los siguientes polinomios corresponden a una identidad notable, y en caso a rmativo hállala:

a) $x^2 + 6x \quad 3$	c) $25x^2 \quad 10x + 1$	e) $9x^5 \quad 6x^3 + 1$
b) $4x^2 + 20x + 9$	d) $9x^4 \quad \frac{1}{4}$	f) $0'01x^4 + 2x^2 + 100$

División de polinomios

En los cocientes de un polinomio entre un monomio se divide cada término entre el monomio.

$$(12x^5 \quad 6x^3) : 3x^2 = 12x^5 : 3x^2 \quad 6x^3 : 3x^2 = 4x^3 \quad 2x$$

18. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(4x^3 + 7x^2 \quad 8x) : x$	f) $(2x^4 \quad 4x^3 + 8x^2 \quad 12x) : (\quad 2x)$
b) $(18x^3 \quad 27x^2 \quad 30x + 81) : 3$	g) $(\quad 36x^{12} + 24x^8 \quad 48x^4) : (\quad 12x^4)$
c) $(6x^8 + 12x^5) : (3x^3)$	h) $(x^4 + 6x^3 \quad 7x^2) : (2x)$
d) $(4x^4 \quad 16x^3 + 8x^2) : 2x^2$	i) $(\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{5}{2}x) : (\frac{1}{2}x)$
e) $(10x^4 + 20x^3 \quad 15x^2) : (5x)$	j) $(2x^6 + 3x^5 \quad 4x^4 + x^3) : (\frac{2}{3}x^2)$

Extracción de factor común

Si los términos de un polinomio tienen divisores comunes puede aplicarse la propiedad distributiva para expresarlo como producto de un factor común   por un polinomio de grado menor.

$$\begin{aligned} A &= 8x^4 + 2x^3 \quad 6x \\ &= 2x\ (4x^3 + x^2 \quad 3) \end{aligned}$$

19. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

a) $x^5 + 7x^3 \quad 4x^2$	d) $2x^4 + 8x^2 \quad 4x$	g) $\frac{x}{5} \quad \frac{x^2}{2}$
b) $2x^3 + 12x + 8$	e) $75x^4 + 15x^3 \quad 25x^2$	h) $\frac{3}{16}x^4 \quad \frac{3}{8}x^3 \quad \frac{9}{4}$
c) $3x^2 \quad 5x$	f) $\quad 9x^5 + 6x^4 \quad 12x^3$	i) $2x^2 + 3xy$

DIVISIÓN EN CAJA

Para dividir un polinomio entre otro podemos emular el mismo método que utilizamos para dividir números. Para ello es fundamental colocar los términos de ambos polinomios ordenados y dejar un hueco para aquellos términos nulos que pudiese haber en el dividendo.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + x^2 \boxed{+0x} \quad 1 & x^2 \quad 3 \\ \hline & \end{array}$$

Primero hemos de preguntarnos por qué monomio he de multiplicar el divisor para obtener el mayor de los términos del dividendo.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + x^2 \qquad 1 & x^2 \quad 3 \\ \cline{2-2} & 2x \longleftarrow \end{array}$$

Al multiplicar 2x por x^2 obtendremos $2x^3$

A continuación multiplicamos el término hallado por todo el divisor, y lo restaremos del dividendo. Para asegurarnos de hacer la resta correctamente, colocamos cada término debajo de aquel que tenga el mismo grado.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 \qquad\quad 1 & x^2 \quad 3 \\ \cline{2-2} 2x^3 \qquad +6x \quad & 2x \longrightarrow 2x \quad (x^2 \quad 3) = \boxed{2x^3 \quad 6x} \\ \cline{1-1} x^2 + 6x \quad 1 & \end{array}$$

cambiamos el signo para restar

Repetimos el procedimiento paso a paso hasta llegar a un polinomio de grado inferior al divisor. Ese es el resto.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 \qquad\quad 1 & x^2 \quad 3 \\ \cline{2-2} 2x^3 \qquad +6x \quad & 2x + 1 \\ \cline{1-1} x^2 + 6x \quad 1 & \\ x^2 \qquad +3 & \\ \cline{1-1} 6x + 2 & \longrightarrow \text{resto} \end{array}$$

20. Realiza las siguientes divisiones, identi ca el cociente y el resto:

a) $(x^3 \quad x^2 \quad 17x + 20) : (x \quad 4)$

b) $(6x^3 + x^2 + x + 2) : (3x + 2)$

c) $(4x^4 \quad 3x^2 + 2x \quad 3) : (x^2 + 2x \quad 1)$

d) $(4x^3 \quad 3x^2 + x + 5) : (2x + 3)$

e) $(x^3 \quad 7x^2 + 6) : (x^2 \quad 5x + 1)$

f) $(x^3 \quad 5x^2) : (x \quad 5)$

21. Realiza las siguientes divisiones, operando cuidadosamente las expresiones racionales:

a) $(3x^3 \quad 4x^2 \quad 5x + 2) : \frac{x}{2} \quad 1$

b) $(3x^3 + 8x^2 + 2x \quad 4) : (x + 2)$

c) $(3x^3 \quad 2x^2 \quad 12x + 8) : x \quad \frac{2}{3}$

d) $(6x^4 \quad 11x^2 + 5) : (x^2 \quad 1)$

REGLA DE RUFFINI

La regla de Ruf ni es un método que permite dividir de forma sencilla un polinomio cualquiera entre binomios de la forma $x \quad a$, siendo a un número conocido.

Para ello primero escribiremos los coe cientes del dividendo (asegurándonos de poner un 0 como coe ciente de los términos nulos) y el valor de a a su izquierda.
Veámoslo con un ejemplo: Efectuaremos la división $(2x^3 + x^2 \quad 1) : (x \quad 3)$.

$$\begin{array}{r|rrrr l} & 2 & 1 & 0 & 1 & \longleftarrow \text{coe cientes del dividendo} \\ \text{entre } (x \quad 3) \longrightarrow 3 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Bajamos el coe ciente más a la izquierda, lo multiplicamos por a y colocamos el resultado en la siguiente columna.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & & 6 & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

A continuación sumamos los dos números de la columna, y nuevamente multiplicamos por a para obtener el valor siguiente.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & & 6 & 21 & \\ \hline & 2 & 7 & & \end{array}$$

Repetimos el procedimiento hasta llegar a la última columna.
El último valor que obtenemos es el resto de la división, los anteriores corresponden a los coe cientes del cociente.

$$\begin{array}{r|rrr|r l} & 2 & 1 & 0 & 1 & \\ 3 & & 6 & 21 & 63 & \\ \hline \text{coe cientes de } 2x^2 + 7x + 21 \longleftarrow & 2 & 7 & 21 & \boxed{62} & \longrightarrow \text{resto} \end{array}$$

22. Haz las siguientes divisiones utilizando la regla de Ru ni y escribe el cociente como un polinomio:

a) $(x^3 \quad x^2 \quad 17x + 20) : (x \quad 4)$

b) $(x^3 \quad 5x^2) : (x \quad 5)$

c) $(3x^3 + 8x^2 + 2x \quad 4) : (x + 2)$

d) $(7x^3 + 2x^2 + 3x \quad 5) : (x \quad 7)$

e) $(3x^3 \quad 2x^2 \quad 12x + 8) : \; x \quad \frac{2}{3}$

f) $(3x^4 \quad 5x^2 + x \quad 2) : (x \quad 1)$

g) $(2x^3 + 3x^2 \quad 6x \quad 5) : (x + 6)$

h) $(x^4 \quad 2x^3 \quad 1) : (x \quad 4)$

i) $(x^4 + 8x^3 \quad 2x^2 \quad 15x + 8) : (x + 8)$

j) $x^3 + \frac{17}{5}x^2 \quad \frac{19}{5}x \quad 2 \; : \; x + \frac{2}{5}$

El orden de las operaciones se mantiene en todos los conjuntos numéricos y también ha de respetarse a la hora de realizar operaciones en lenguaje algebraico.

Jerarquía de operaciones

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

23. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(x + 3)^2 \quad 2(3x \quad 4)^2$

b) $(2x + 3)(2x \quad 3) \quad 4x(x \quad 2)$

c) $[(15x + 6x^2)(2x \quad 1)] : (3x)$

d) $[(4x + 1)(5x + 2) \quad 2(x + 1)^2] : x$

24. Dados los polinomios $P(x) = 3x^2 \quad 4$, $Q(x) = 6 \quad 5x$, $R = 2x^2 + 5x$ realiza las siguientes operaciones:

a) $3 \ P(x) \quad 2 \ Q(x)$

b) $P(x) \ \ Q(x) + R(x)$

c) $P(x) \ \ [Q(x) + R(x)]$

d) $[Q(x)]^2 + P(x)$

e) $R(x) : x + Q(x)$

f) $R(x) \quad [P(x)]^2$

FACTORIZACIÓN

Deseamos escribir los polinomios como un producto de factores irreducibles, del mismo modo que factorizamos números naturales como producto de factores primos.

Los polinomios irreducibles más sencillos son los de primer grado, es decir, monomios nx o bien binomios x a.

Los monomios son factores fáciles de obtener, pues extraer factor común es un proceso directo, pero a la hora de dividir entre un binomio x a necesitamos conocer el valor a adecuado para realizar la división exacta.

FACTORIZACIÓN UTILIZANDO LA REGLA DE RUFFINI

Para empezar debemos tener en cuenta que los únicos valores enteros que puede tomar a son divisores (positivos y negativos) del término independiente, pues son los que nos permiten obtener un cero en el resto.

	1	2	9	18
2		2	0	18
	1	0	9	0

Divisores de 18:
1, 2, 3, 6, 9, 18

Es importante tener en cuenta que el polinomio puede tener otros factores del tipo $x \quad a$ donde a sea un número racional no entero, pero no tenemos ninguna regla que nos permita prever cuáles pueden ser esos valores.

TEOREMA DEL FACTOR

Un resultado útil a la hora de elegir cuáles de los posibles divisores del término independientes nos permitirán factorizar el polinomio es el teorema del resto pues indica que el resto de dividir un polinomio $P(x)$ entre $x \quad a$ tiene siempre valor $P(a)$.

$$P(x) : (x \quad a) = Q(x) + P(a)$$

Una consecuencia directa es que el binomio $x \quad a$ será factor de $P(x)$ únicamente si $P(a) = 0$. Es el llamado teorema del factor .

Por lo tanto antes de aplicar la regla de Ruf ni comprobaremos si los divisores del término independiente nos permitirán obtener una división con resto cero.

25. Factoriza los siguientes polinomios aplicando la regla de Ru ni:

a) $x^3 + 2x^2 \quad 9x \quad 18$

b) $2x^3 \quad 9x^2 \quad 6x + 5$

c) $x^3 \quad x^2 \quad 21x + 45$

d) $2x^4 + 5x^3 \quad 3x^2 \quad 8x + 4$

e) $3x^4 \quad 17x^3 + 9x^2 + 41x + 12$

f) $2x^5 \quad 14x^4 + 38x^3 \quad 50x^2 + 32x \quad 8$

g) $x^4 \quad 14x^3 + 60x^2 \quad 50x \quad 125$

h) $x^4 \quad 72x^2 + 1296$

PROCEDIMIENTO GENERAL DE FACTORIZACIÓN

Aunque no hay un procedimiento único para la factorización de cualquier polinomio, siempre será recomendable empezar por aquellos métodos que permiten simpli carlo de la forma más sencilla.
Además debemos tener en cuenta que no todas las herramientas valen para todos los casos.

Herramientas a utilizar

1. Extracción de factor común
2. Identidades notables
3. División utilizando la regla de Ru ni

26. Factoriza los siguientes polinomios extrayendo factor común y utilizando identidades notables:

a) $x^4 \quad 4x^2$

b) $x^5 + 6x^4 + 9x^3$

c) $9x^3 \quad 6x^2 + x$

d) $4x^7 + 4x^6 + x^5$

e) $25x^4 + 20x^3 + 4x^2$

f) $\frac{1}{100}x^3 + \frac{3}{50}x^2 + \frac{9}{10}x$

27. Para factorizar cada uno de los siguientes polinomios deberás utilizar dos herramientas diferentes:

a) $x^4 \quad x^3 \quad 2x^2$

b) $4x^3 \quad 3x + 1$

c) $18x^2 + 60x + 50$

28. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^4 \quad 4x^3 \quad 3x^2 + 18x$

b) $x^4 \quad 2x^3 \quad 8x^2$

c) $4x^4 \quad 16x^3 + 13x^2 \quad 3x$

d) $9x^4 + 51x^3 + 67x^2 + 29x + 4$

e) $x^3 \quad 5x^2 \quad 29x + 105$

f) $9x^3 \quad 27x^2 \quad x + 3$

g) $25x^4 \quad 70x^3 + 44x^2 \quad 8x$

h) $x^4 \quad 2x^3 \quad 48x^2$

ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Llamamos solución de la ecuación a los valores de las incógnitas para los cuales la igualdad es cierta.
Para comprobar si un valor es solución de una ecuación, debemos hallar el valor numérico de ambos miembros y comprobar si son iguales.

1. Comprueba si el valor indicado es solución de la ecuación:

a) $3x^2 \quad 5x + 2 = 0$ para $x = 1$

b) $2 \quad (3x \quad 5) \quad 4x = \quad 6$ para $x = 2$

c) $\frac{x \quad 1}{3} \quad 2x = \quad 7$ para $x = 4$

d) $3x^2 + x \quad 2 = 0$ para $x = \frac{2}{3}$

e) $2x \quad 8 + 3 \quad (3x \quad 1) = 0$ para $x = 1$

f) $\frac{x \quad 1}{3} \quad \frac{x+2}{5} = 0$ para $x = 2$

g) $\frac{x \quad 1}{3} \quad \frac{x+2}{5} = 0$ para $x = \quad 2$

h) $6x^2 \quad x + 1 = 0$ para $x = \frac{1}{3}$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una ecuación de primer grado es aquella equivalente a la ecuación formada por un polinomio de primer grado igual a cero.

Para resolver una ecuación de primer grado sencilla:

1. Realizamos todas las operaciones que sean precisas, como por ejemplo multiplicar un monomio por un polinomio entre paréntesis.

2. Aplicamos la regla de la suma de tal modo que los términos con incógnita estén en un miembro y los términos sin incógnita en el otro.

3. Operamos y utilizamos la regla del producto para despejar la incógnita.

Si llegamos a una ecuación del tipo $0x = 0$, nuestra ecuación tiene in nitas soluciones pues cualquier valor de x la cumple.

Si llegamos a una ecuación del tipo $0x = n^o$, nuestra ecuación no tiene solución puesto que es imposible al multiplicar por 0 obtener otro número.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis:

a) $2 \quad (x \quad 1) + 3 = 9$

b) $4 \quad (x + 2) = 3 \quad (x + 7)$

c) $5x \quad 4 \quad (2x \quad 7) = 13$

d) $6 \quad (2x \quad 3) = 10 \quad (2x \quad 5)$

e) $3 \quad (6x \quad 10) \quad 5 \quad (2 \quad 4x) = 25x \quad 1$

f) $2\,(7x \quad 1) \quad 3\,(3x \quad 6) \quad 5\,(11x + 6) = 196$

Para resolver una ecuación con denominadores, multiplicamos ambos lados de la igualdad por un múltiplo de dichos denominadores, preferiblemente el mínimo común múltiplo.

$$\frac{2\cdot(3x+7)}{5}+\frac{5\cdot(x-3)}{2}=-1$$

$$10\cdot\frac{2\cdot(3x+7)}{5}+10\cdot\frac{5\cdot(x-3)}{2}=10\cdot(-1)$$

$$4\cdot(3x+7)+25\cdot(x-3)=-10$$

$$12x+28+25x-75=-10$$

$$12x+25x=-10-28+75$$

$$37x=37$$

$$x=\frac{37}{37}=1$$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con denominadores:

a) $\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+\frac{x}{9}=7$

b) $\frac{x-3}{2}+\frac{2x-5}{2}=5$

c) $\frac{7x-1}{2}-\frac{4x-6}{2}=7$

d) $3x-\frac{1}{4}=2x+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}$

e) $\frac{2x-3}{5}+1=4x+4$

f) $\frac{3x-1}{2}+\frac{5x+7}{4}=-7$

g) $\frac{5x+7}{4}-\frac{2x+1}{3}=2$

h) $\frac{6-x}{5}+\frac{3x-1}{6}-\frac{2x-3}{4}=\frac{1}{12}$

i) $x-2-\frac{5x+7}{6}=\frac{10-4x}{9}$

j) $\frac{9x-1}{12}+\frac{6x+6}{8}-\frac{3x}{10}=\frac{16}{15}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores:

a) $\frac{5-(3x-5)}{4}-\frac{7x+3}{8}=2$

b) $\frac{3-(4x+1)}{7}-\frac{6-(x-3)}{5}=3$

c) $3-(2x-4)+\frac{5x+1}{6}=\frac{1}{4}$

d) $\frac{2(3x-1)}{3}+\frac{5x-6}{6}=\frac{138}{9}$

e) $\frac{2x-8}{5}+\frac{3(x+2)}{6}=3$

f) $\frac{5(2x-1)}{3}-\frac{x-4}{3}=2$

g) $\frac{3(2x-8)}{4}-2(6-4x)=\frac{5}{2}$

h) $\frac{3(2x+2)}{10}-\frac{7(2x-5)}{15}-\frac{x-6}{6}=\frac{29}{15}$

i) $\frac{3(5x-1)}{2}-\frac{7(3x-4)}{3}=\frac{1}{6}-\frac{11(x-1)}{6}$

j) $\frac{2(x+3)}{5}+\frac{3(x-6)}{2}=\frac{2}{5}+\frac{10(2x+1)}{6}$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado es aquella equivalente a la ecuación formada por un polinomio de segundo grado igual a cero.

En general escribimos las ecuaciones de segundo grado como

$$ax^2+bx+c=0$$

donde a, b y c son tres números cuyo único requisito es que $a\neq 0$.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

Las ecuaciones incompletas son aquellas que tiene un término nulo.

CASO $ax^2 + c = 0$

Para resolver ecuaciones de este tipo despejamos de manera análoga a lo que hacíamos con las de primer grado, teniendo en cuenta que siempre habrá o bien 2 posibles soluciones (una positiva y otra negativa) o bien ninguna en absoluto.

$$3x^2 \quad 48 = 0$$
$$3x^2 = 48$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \quad 4$$

CASO $ax^2 + bx = 0$

Para resolver ecuaciones de este tipo extraemos factor común x y resolvemos separadamente las ecuaciones asociadas a cada factor.

$$9x^2 \quad 6x = 0$$
$$x \ (9x \quad 6) = 0$$

. &

$$\boxed{x = 0} \qquad\qquad 9x \quad 6 = 0$$
$$9x = 6$$
$$x = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $x^2 \quad 16 = 0$
b) $x^2 + 8x = 0$
c) $5x^2 \quad 20 = 0$
d) $7x^2 + 24x = 0$
e) $5x^2 + 20 = 0$
f) $2x^2 + 50x = 0$
g) $3x^2 \quad 27 = 0$
h) $7x^2 \quad 28x = 0$
i) $5x^2 + 30x = 0$
j) $x^2 \quad 8x = 0$
k) $4x^2 \quad 100 = 0$
l) $18x^2 \quad 9x = 0$
m) $10x^2 \quad 160 = 0$
n) $3x^2 \quad 75 = 0$
ñ) $6x^2 + 12x = 0$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $x^2 \quad \frac{16}{121} = 0$
b) $\frac{1}{2}x^2 \quad 8 = 0$
c) $\frac{2}{3}x^2 \quad \frac{2}{27} = 0$
d) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4} = 0$
e) $x^2 \quad \frac{1}{3}x = 0$
f) $\frac{3}{4}x^2 + x = 0$
g) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = 0$
h) $\frac{9}{5}x^2 \quad \frac{3}{25}x = 0$

CASO GENERAL

En general cualquier ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ puede resolverse utilizando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{b \quad \sqrt{b^2 \quad 4ac}}{2a}$$

Dependiendo de los valores que tome el radical $b^2 \quad 4ac$ podemos tener dos, una o ninguna solución.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

   a) $x^2 - x - 6 = 0$
   b) $-x^2 + 2x + 3 = 0$
   c) $x^2 - 2x - 8 = 0$
   d) $6x^2 + 18x + 12 = 0$
   e) $3x^2 - 9x + 12 = 0$
   f) $3x^2 - 9x - 30 = 0$
   g) $2x^2 + 4x + 2 = 0$
   h) $x^2 - 5x - 14 = 0$
   i) $x^2 - 3x + 2 = 0$
   j) $x^2 - 20x + 100 = 0$
   k) $2x^2 + 4x = 0$
   l) $2x^2 - 4 = 0$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con coeficiones racionales:

   a) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$
   b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$
   c) $15x^2 + 7x - 2 = 0$
   d) $3x^2 - x - \frac{2}{3} = 0$
   e) $x^2 - \frac{11}{10}x - \frac{3}{5} = 0$
   f) $x^2 - 0'01 = 0$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones, identificando los coeficientes y escribiendo la fórmula en cada uno de los casos:

   a) $3x^2 - 3x - 18 = 0$
   b) $x^2 + 8x + 16 = 0$
   c) $9x^2 - 24x + 16 = 0$
   d) $5x^2 - 7x - 6 = 0$
   e) $x^2 - 7x + 10 = 0$
   f) $-x^2 - 7x - 10 = 0$
   g) $2x^2 - 18 = 0$
   h) $4x^2 + 12x + 19 = 0$
   i) $9x^2 - 30x + 25 = 0$
   j) $-2x^2 - 16x - 32 = 0$
   k) $20x^2 - 60x + 45 = 0$
   l) $6x^2 - 11x - 10 = 0$

Resolución de ecuaciones por factorización

Para resolver ecuaciones por factorización es necesario utilizar un concepto sencillo: el único producto cuyo resultado es cero es aquel en que alguno de los factores es cero.
Al fin y al cabo, si todos fuesen distintos de cero entonces el resultado no podría ser cero.

Por lo tanto si tenemos una expresión algebraica como la siguiente:

$$(x-4)\cdot(x+3)\cdot(2x-3)\cdot(x^2+1)=0$$

Sabemos que la única forma en la que se puede cumplir esa igualdad es que alguno de sus factores sea cero. Eso dará a lugar a distintas ecuaciones sencillas que procederá a resolver.

$$(x-4)\cdot(x+3)\cdot(2x-3)\cdot(x^2-1)=0$$

$x-4=0$	$x+3=0$	$2x-3=0$	$x^2+1=0$
$x=4$	$x=-3$	$x=\frac{3}{2}$	Sin solución real.

Como en el tema anterior aprendimos a factorizar polinomios, el procedimiento que realizaremos consistirá en factorizar primero para poder resolver ecuaciones sencillas.

Ejemplo completo

Queremos resolver la ecuación $6x^5 + 5x^4 - 14x^3 + x^2 + 2x = 0$.
Para ello factorizaremos el polinomio:

1. Extrayendo factor común $x \cdot (6x^4 + 5x^3 - 14x^2 + x + 2) = 0$
2. Aplicando identidades notables, que en este caso no es posible.
3. Utilizando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 5 & -14 & 1 & 2 \\ 1 & & 6 & 11 & -3 & -2 \\ \hline & 6 & 11 & -3 & -2 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r|rrrr} & 6 & 11 & -3 & -2 \\ -2 & & -12 & 2 & 2 \\ \hline & 6 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto obtenemos factores lo suficientemente sencillos

$$x \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (6x^2 - x - 1) = 0$$

y basta con solucionar la ecuación asociada a cada factor:

- $\boxed{x = 0}$
- $x - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = 1}$
- $x + 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = -2}$
- $6x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6} = \dfrac{1 \pm 5}{12} = \begin{cases} \nearrow \dfrac{6}{12} = \boxed{\dfrac{1}{2}} \\ \searrow \dfrac{-4}{6} = \boxed{\dfrac{-2}{3}} \end{cases}$

10. Resuelve por factorización:

a) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

b) $x^4 - 4x^2 = 0$

c) $2x^3 - 9x^2 - 6x + 5 = 0$

d) $x^5 + 6x^4 + 9x^3 = 0$

e) $x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0$

f) $9x^3 - 6x^2 + x = 0$

11. Resuelve por factorización:

a) $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 18x = 0$

b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 = 0$

c) $4x^4 - 16x^3 + 13x^2 - 3x = 0$

d) $3x^3 - 9x^2 + 2x - 6 = 0$

e) $9x^4 + 51x^3 + 67x^2 + 29x + 4 = 0$

f) $2x^5 - 14x^4 + 38x^3 - 50x^2 + 32x - 8 = 0$

g) $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$

h) $5x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 3x = 0$

12. Resuelve por factorización:

a) $x^3 \quad 5x^2 \quad 29x + 105 = 0$

b) $9x^3 \quad 27x^2 \quad x + 3 = 0$

c) $4x^3 \quad 3x + 1 = 0$

d) $18x^2 + 60x + 50 = 0$

e) $9x^4 \quad 12x^3 \quad 17x^2 + 8x + 4 = 0$

f) $2x^4 + 5x^3 \quad 3x^2 \quad 8x + 4 = 0$

g) $4x^7 + 4x^6 + \ x^5 = 0$

h) $2x^4 \quad 12x^3 + 17x^2 + 6x \quad 9 = 0$

13. Resuelve por factorización:

a) $3x^4 \quad 17x^3 + 9x^2 + 41x + 12 = 0$

b) $25x^4 + 20x^3 + 4x^2 = 0$

c) $25x^4 \quad 70x^3 + 44x^2 \quad 8x = 0$

d) $\frac{1}{100}x^3 + \ \frac{3}{50}x^2 + \ \frac{9}{10}x = 0$

e) $6x^4 + 5x^3 \quad 33x^2 + 18x = 0$

f) $x^4 \quad 2x^3 \quad 48x^2 = 0$

g) $x^4 \quad 14x^3 + 60x^2 \quad 50x \quad 125 = 0$

h) $\frac{x^4}{27} + \ \frac{2x^3}{9} + \ \frac{29x^2}{81} + \ \frac{4x}{27} + \ \frac{2}{9} = 0$

Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones interrelacionadas.
Una solución de un sistema de ecuaciones es un conjunto de valores numéricos (uno por cada incógnita) para los cuales todas las igualdades son ciertas.

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 1 \\ 2x + 5y &= \quad 7 \end{aligned}$$

Tipos de soluciones

Una solución de un sistema de dos ecuaciones lineales está compuesta de dos valores, uno para cada una de las incógnitas: $x = 1\,;\,y = \quad 1$.

Estas soluciones deben comprobarse sistemáticamente tras la resolución de un sistema, sustituyendo dichos valores en ambas ecuaciones y comprobando que se cumplen las igualdades.

$$\begin{aligned} 4 \quad 1 + 3 \quad (\quad 1) &= 1 \\ 2 \quad 1 + 5 \quad (\quad 1) &= \quad 7 \end{aligned}$$

1. Comprueba si $x = 3$, $y = 1$ es solución de los siguientes sistemas:

a) $\begin{aligned} 3x + y &= 10 \\ x + 3y &= 6 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 4x + 3y &= 1 \\ 2x + 5y &= \quad 7 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 6x + 2y &= 20 \\ 3x + 9y &= 18 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3x + y &= 10 \\ 2x + 4y &= 16 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 3x \quad y &= \quad 10 \\ 2x + 6y &= 12 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}y &= 5 \\ \tfrac{1}{2}x \quad \tfrac{3}{2}y &= 3 \end{aligned}$

Si llegamos a una ecuación del tipo $0x = 0$, nuestro sistema tiene in nitas soluciones puesto que ambas ecuaciones son equivalentes.

Si llegamos a una ecuación del tipo $0x = n^{o}$, nuestro sistema no tiene solución puesto que ambas ecuaciones son incompatibles.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Resolución por sustitución

1. Despeja una variable (la de tu elección) en una de las ecuaciones (la de tu elección).
2. Sustituye el valor obtenido en la otra ecuación.
3. Resuelve la ecuación de primer grado obtenida, hallando el valor de una de las incógnitas.
4. Sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones originales (o en el despeje) para obtener el valor de la otra incógnita.
5. Comprueba la solución en ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x + 5y = \quad 7 \end{cases} \quad ! \quad \boxed{y = \frac{1 \quad 4x}{3}}$$

$$2x + 5y = \quad 7$$

$$2x + 5\,\frac{1 \quad 4x}{3} = \quad 7$$

$$6x + 5(1 \quad 4x) = \quad 21$$

$$6x + 5 \quad 20x = \quad 21$$

$$6x \quad 20x = \quad 21 \quad 5$$

$$26x = \quad 26$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$y = \frac{1 \quad 4x}{3} = \frac{1 \quad 4\;1}{3} = \frac{1 \quad 4}{3} = \frac{\quad 3}{3}$$

$$\boxed{y = \quad 1}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 4x + 2y = 18 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \quad y = 1 \\ 3x \quad 3y = \quad 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x \quad y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x \quad 3y = 9 \\ 4x \quad 3y = 18 \end{cases}$

3. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x \quad 3y = \quad 1 \\ 5x \quad 7y = \quad 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x \quad 7y = 5 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \quad 2y = 1 \\ 3x + 2y = \quad 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x \quad 2y = 20 \\ 5x \quad 6y = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 8x \quad 2y = 5 \\ 6x \quad 5y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$

4. Intenta resolver los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \quad y = 12 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 19 \\ 5x^2 \quad 4y^2 = \quad 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

Resolución por igualación

1. Despeja una variable (la de tu elección) en ambas ecuaciones.
2. Iguala ambas expresiones algebraicas.
3. Resuelve la ecuación de primer grado obtenida, obteniendo el valor de una de las incógnitas.
4. Sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones originales (o en el despeje) para obtener el valor de la otra incógnita.
5. Comprueba la solución en ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 & ! \quad y = \dfrac{1 \quad 4x}{3} \\ 2x + 5y = \quad 7 & ! \quad y = \dfrac{\quad 7 + 2x}{5} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1 \quad 4x}{3} = \frac{\quad 7 + 2x}{5}}$$

$$5(1 \quad 4x) = 3(\quad 7 + 2x)$$

$$5 \quad 20x = \quad 21 + 6x$$

$$\quad 20x \quad 6x = \quad 21 \quad 5$$

$$\quad 26x = \quad 26$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$y = \frac{1 \quad 4x}{3} = \frac{1 \quad 4 \quad 1}{3} = \frac{1 \quad 4}{3}$$

$$\boxed{y = \quad 1}$$

5. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 4x + 2y = 18 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \quad y = 1 \\ 3x \quad 3y = \quad 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x \quad y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x \quad 3y = 9 \\ 4x \quad 3y = 18 \end{cases}$

6. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación:

a) $\begin{cases} 2x \quad 3y = \quad 1 \\ 5x \quad 7y = \quad 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x \quad 7y = 5 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \quad 2y = 1 \\ 3x + 2y = \quad 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x \quad 2y = 20 \\ 5x \quad 6y = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 8x \quad 2y = 5 \\ 6x \quad 5y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$

7. Intenta resolver los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 19 \\ 5x^2 \quad 4y^2 = \quad 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \quad y = 12 \end{cases}$

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Resolución por reducción

1. Multiplica cada una de las ecuaciones por un número adecuado, de tal modo que los coe cientes de una de las incógnitas sean opuestos.
2. Suma ambas expresiones.
   Si el paso anterior se realizó de forma correcta, una de las incógnitas se anulará.
3. Resuelve la ecuación de primer grado obtenida, obteniendo el valor de una de las incógnitas.
4. Sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones originales para obtener el valor de la otra incógnita.
5. Comprueba la solución en ambas ecuaciones

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 & ! \;^{1} \\ 2x + 5y = \quad 7 & ! \;^{2} \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 4x + 3y = 1 \\ 4x + 10y = \quad 14 \\ \hline 0x + 13y = \quad 13 \end{array} \; ! \quad \boxed{y=-1}$$

$$4x + 3(\quad 1) = 1 \;! \quad 4x \quad 3 = 1 \;! \quad 4x = 1 + 3 \;! \quad 4x = 4 \;! \quad x = \frac{4}{4} \;! \quad \boxed{x = 1}$$

8. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 4x + 2y = 18 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \quad y = 1 \\ 3x \quad 3y = \quad 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x \quad y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x \quad 3y = 9 \\ 4x \quad 3y = 18 \end{cases}$

9. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción:

a) $\begin{cases} 2x \quad 3y = \quad 1 \\ 5x \quad 7y = \quad 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x \quad 7y = 5 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \quad 2y = 1 \\ 3x + 2y = \quad 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x \quad 2y = 20 \\ 5x \quad 6y = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 8x \quad 2y = 5 \\ 6x \quad 5y = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$

10. Intenta resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 19 \\ 5x^2 \quad 4y^2 = \quad 11 \end{cases}$

MÉTODO GRÁFICO

La solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas corresponde con las coordenadas del punto de intersección de sus grá cas representadas en el plano.

Para resolver un sistema grá camente utilizaremos la calculadora grá ca de Geogebra .

El punto de intersección de las dos rectas tiene coordenadas (1;   1) por lo tanto la solución a nuestro sistema es: $x = 1$, $y = \quad 1$.

11. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método grá co:

a) $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x \quad y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 4x + 2y = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \quad y = 1 \\ 3x \quad 3y = \quad 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x \quad 3y = 9 \\ 4x \quad 3y = 18 \end{cases}$

12. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 19 \\ 5x^2 \quad 4y^2 = \quad 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \quad y = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 \quad 2y + 1 = \quad x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$

PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES

Procedimiento para resolución de problemas

1. Indica los distintos datos y su relación con las incógnitas.
2. Plantea dos ecuaciones que relacionen esos datos.
3. Resuelve el sistema por el método de tu elección.
4. Comprueba el resultado: debe ser solución de ambas ecuaciones y además un valor factible para el problema.
5. Relee el problema y contesta a la pregunta con una frase breve.

Resuelve siguiendo los pasos indicados.

13. La suma de dos números es 157 y su diferencia es 41. ¿De qué numeros se trata?

14. La edad de María es el cuádruple que la de su hija. Dentro de 20 años, la edad de María será el doble que la de su hija. ¿Qué edad tienen?

15. Tengo 24 monedas repartidas en dos huchas. Si paso 5 monedas de una hucha a la otra, tendré el mismo número de monedas en cada una. ¿Cuántas monedas hay en cada hucha?

16. Teniendo en cuenta que una garrafa de una bebida equivale a 5 botellas y que tres garrafas y 7 botellas suman 11 litros, ¿qué capacidad tiene cada garrafa y cada botella?

17. Paloma ha vendido 50 docenas de huevos en el mercado. A la mañana los vendía a 3 € la docena, pero a la tarde la ha rebajado 2 € por no estar tan frescos.
Si ha ganado 138 €, ¿cuántas docenas ha vendido por la mañana y cuántas por la tarde?

18. Por la mezcla que 8 litros y 3 litros de vino de distintas calidades se ha pagado un total de 30 €.
Si por comprar un litro de cada uno pagaríamos 5 €, calcula el precio de cada tipo de vino.

19. Un vendedor mezcla dos variedades de café. El kilo de la primera variedad cuesta 3'60 € y el kilo de la segunda cuesta la mitad.
Si ha obtenido 20kg de la mezcla y el precio es de 2'43 € por kilo, ¿qué cantidad ha utilizado de cada variedad?

20. Para elaborar un kilo de chocolate con una pureza del 75 % se han mezclado dos cacaos, uno puro al 90 % y otro puro al 50 %. ¿Cuánto han utilizado de cada uno de ellos?

21. Un móvil y una tableta cuestan 500 €, pero una empresa de telefonía me ofrece el móvil con un 50 % de descuento y la tableta con un 15 % de descuento si acepto un contrato de permanencia.
Con esa oferta el precio se queda en 320 €.
¿Cuál era el precio original de cada artículo?

Problemas con sistemas no lineales:

22. Halla dos números positivos cuya diferencia sea 7 y la suma de sus cuadrados sea 3809.

23. Tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 25 m, y uno de sus catetos es 5 m mayor que el otro. Enuncia el teorema de Pitágoras y halla la longitud de ambos catetos.

24. Alquilar un autobús para ir de excursión cuesta 800e. Si fuesen 10 personas más, el precio se reduciría en 4e por persona. ¾Cuánto cuesta la excursión? ¾Cuántas personas van?
PISTA: Llámale x al número de personas y e al precio por persona.

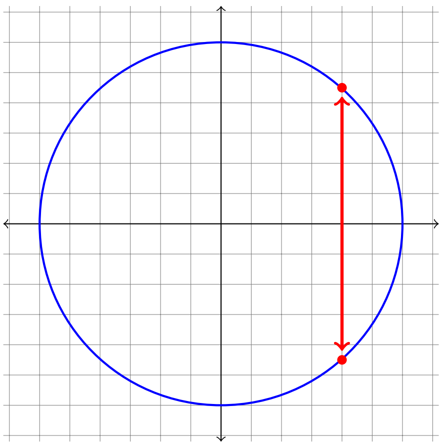
GRÁFICAS Y FUNCIONES

CONCEPTO DE FUNCIÓN

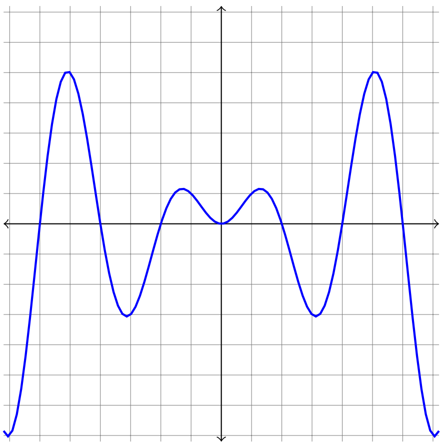
Una función es una relación entre los elementos de dos conjuntos tal que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un único valor del conjunto final.

Las funciones numéricas que estudiaremos en este tema relacionan dos magnitudes, por eso pueden representarse como parejas de números $(x; y)$, es decir, como puntos en un plano cartesiano.
En este caso, para ser función debe asegurarse que para cada valor de la coordenada x existe un único valor de la coordenada y, o lo que es lo mismo, que para cada x existe un único punto en la gráfica.

> En una función puede haber múltiples valores x para los cuales su imagen sea la misma y, es decir, puede haber muchos puntos a la misma altura.

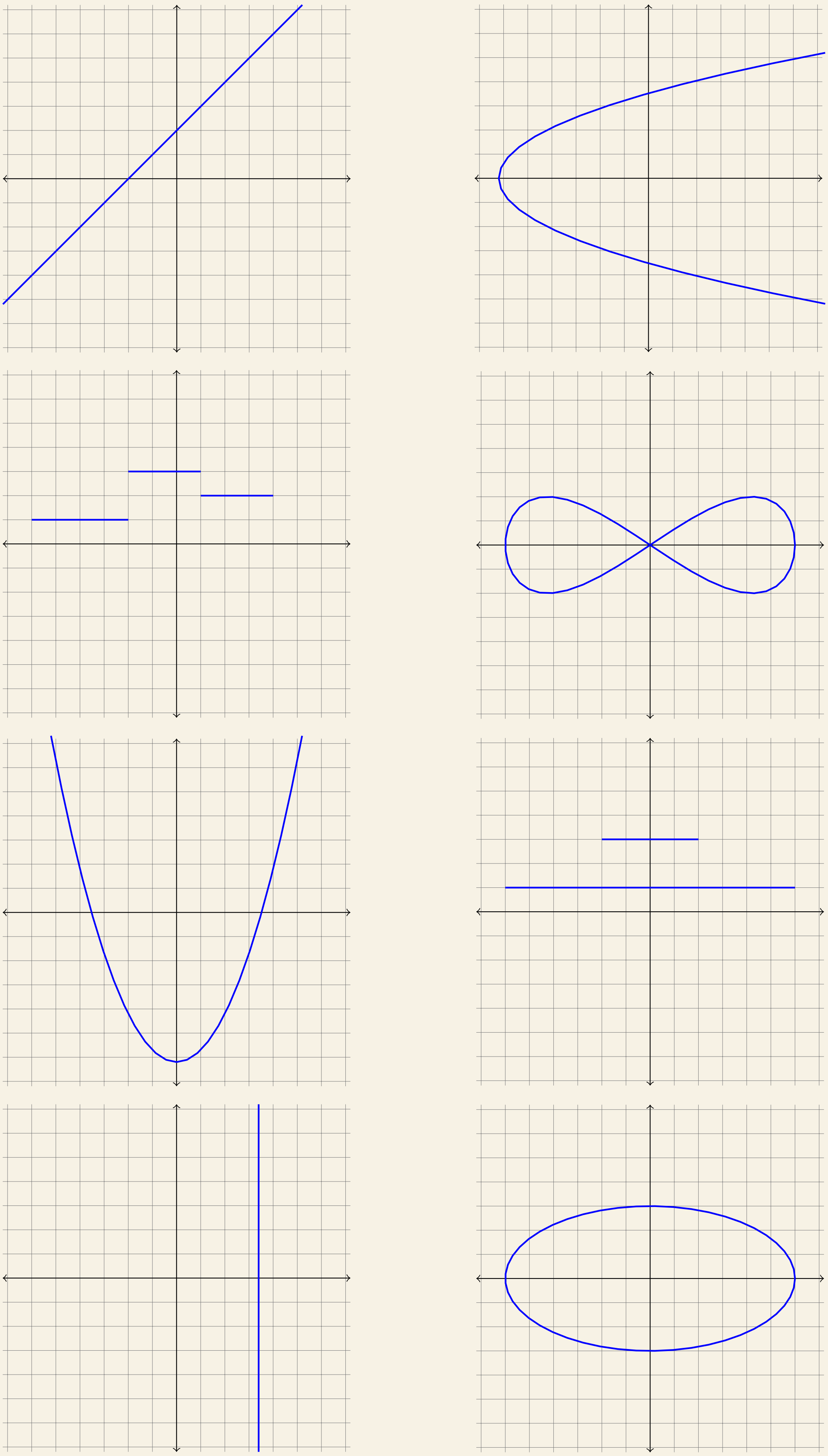


Si hay dos puntos con el mismo valor de x (es decir, están en la misma recta vertical) entonces NO es función.



Aún así, una función puede tener formas bastante complicadas.
Observa los puntos a la misma altura.

1. Indica si las siguientes grá cas corresponden a una función:



FÓRMULAS, TABLAS Y GRÁFICAS

Las funciones expresan la relación entre dos magnitudes.
Esa relación puede describirse algebraicamente (con una fórmula), a través de una serie de datos numéricos (con una tabla de datos) o bien utilizando un representación visual de los mismos (con una gráfica).

Tomemos por ejemplo la siguiente expresión:

Cada kilo de manzanas cuesta 1'90 €.

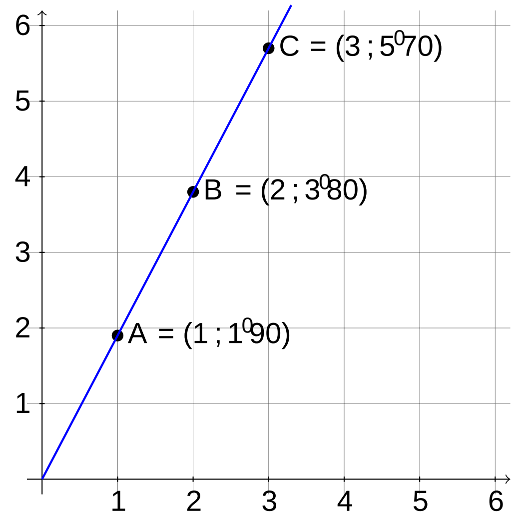
Para poder hallar la fórmula de la función debemos tener claro cuáles son las dos magnitudes involucradas (en este caso, peso y precio) y relacionarlas mediante una expresión algebraica:

peso → x
precio → $y = f(x)$ → $\boxed{f(x) = 1'90\,x}$

A partir de esta función podemos rellenar una tabla de valores, sustituyendo valores de x en la fórmula para obtener valores de y:

x (kg)	1	2	3
y (€)	1'90	3'80	5'70

Los pares $(x; y)$ de la tabla de valores se pueden representar en un plano, y al unirlos de la forma apropiada nos dará una gráfica que describe nuestra función:



2. Construye la tabla de valores y representa la gráfica de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x$ b) $f(x) = \ x + 1$ c) $f(x) = 2x \ \frac{1}{2}$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x \ 1$

3. Construye la tabla de valores de las siguientes funciones, asegurándote de tomar varios valores positivos y varios negativos, y represéntala gráficamente:

   a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(x) = (x + 1)^2$ d) $f(x) = 3x^2 + 4$

4. La base de un rectángulo mide el doble que la altura. Llamaremos x a la altura e y al perímetro del rectángulo.

   a) Escribe la función que permite obtener el perímetro a partir de la altura.
   b) Representa en unos ejes cartesianos la gráfica que relaciona el perímetro con la altura.

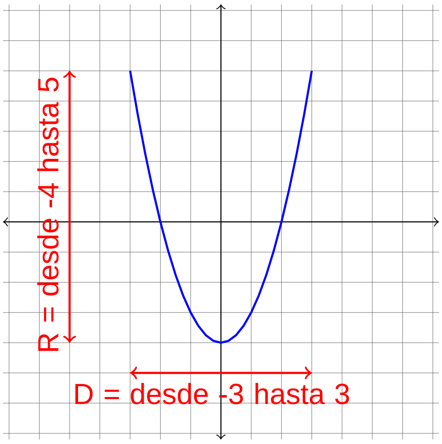
5. La base de un rectángulo mide 1cm más que la altura. Llamaremos x a la altura e y al área del rectángulo.

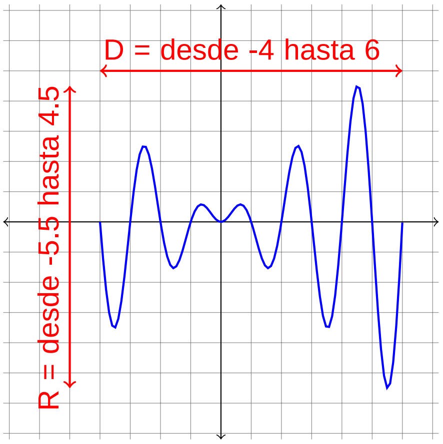
   a) Escribe la función que permite obtener el área a partir de la altura.
   b) Construye una tabla de valores para los siguientes valores de x: -4, -3,-2, -1, 0, 1, 2, 3.
   c) Representa en unos ejes cartesianos la gráfica que relaciona el área con la altura.

ESTUDIO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

DOMINIO Y RECORRIDO

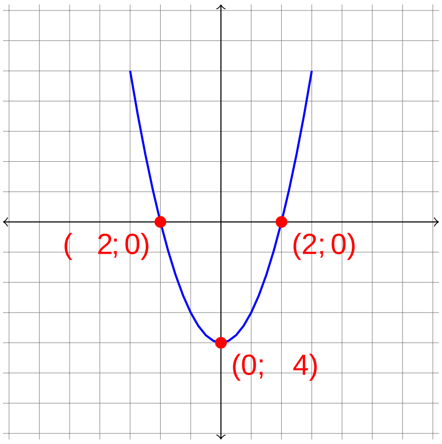
El dominio de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (x), es decir, de izquierda a derecha .
El recorrido de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente (y), es decir, de abajo a arriba .

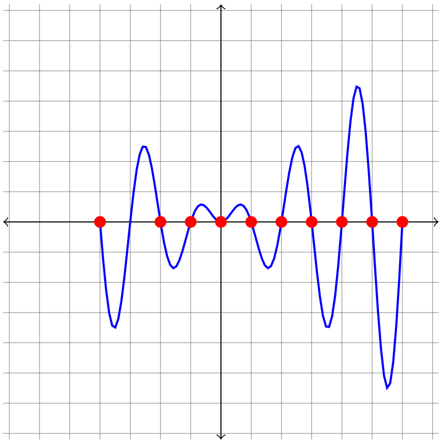




PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

Para conocer y representar la grá ca de una función es conveniente conocer los puntos de corte con los ejes coordenados, es decir, aquellos puntos en los que la función pasa exactamente por cada uno de los ejes.





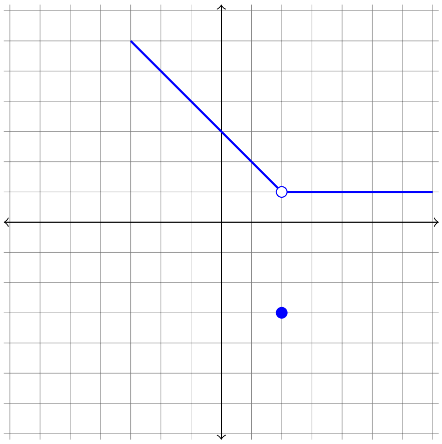
- Los puntos de corte con el eje horizontal tienen siempre la segunda coordenada nula: (x; 0)
- Como mucho puede haber un punto de corte con el eje vertical , y tiene siempre la primera coordenada nula: (0; y)

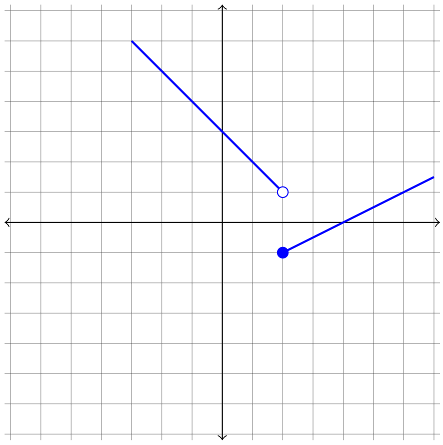
CONTINUIDAD

Una función es **continua** si su grá ca podría dibujarse sobre un papel sin levantar el lápiz en ningún momento. En caso contrario decimos que tiene una **discontinuidad** y la clasi camos en dos tipos diferentes:

Discontinuidad evitable: Hay un punto colocado en una posición que no es la adecuada para ser continua.

Discontinuidad de salto: Hay un salto vertical (hacia arriba o hacia abajo, pero no hacia los lados) entre un trozo de línea y el siguiente.

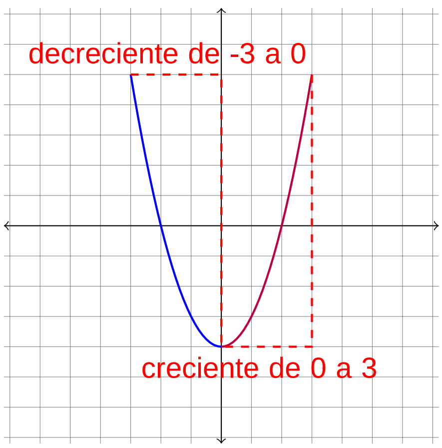


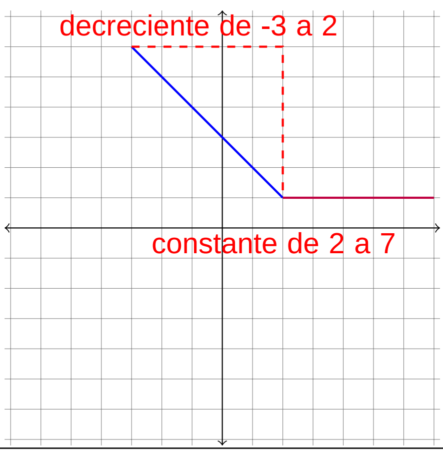


MONOTONÍA

El estudio de la **monotonía** consiste en observar en qué intervalos la función es creciente, decreciente o constante.

- **Creciente:** al aumentar el valor de la variable independiente también aumenta el valor de la variable dependiente.
  En la grá ca, cuando nos movemos a la derecha también nos movemos hacia arriba.
- **Decreciente:** al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el valor de la variable dependiente.
  En la grá ca, cuando nos movemos a la derecha también nos movemos hacia abajo.
- **Constante:** la variable dependiente toma siempre el mismo valor.
  En la grá ca resulta un segmento horizontal.

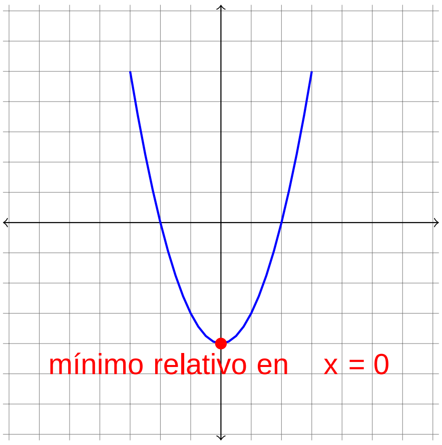


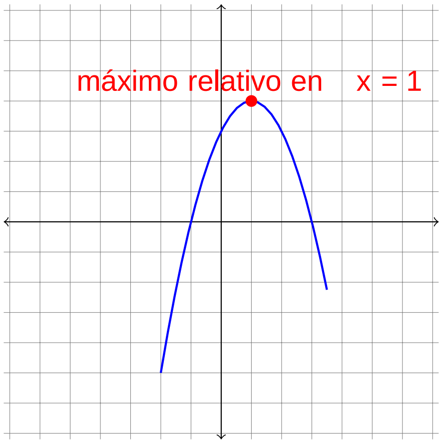


Extremos

Los extremos relativos de una función son aquellos puntos en los que la grá ca muestra un punto más elevado o más bajo que aquellos a su alrededor.

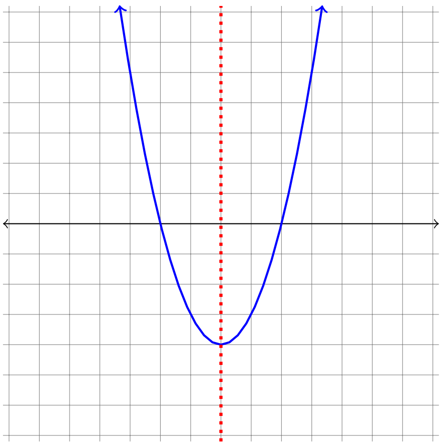
- Máximo: A su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente. Parece la cima de una colina.
- Mínimo: A su izquierda la función es decreciente y a su derecha creciente. Parece el punto más bajo de un valle.



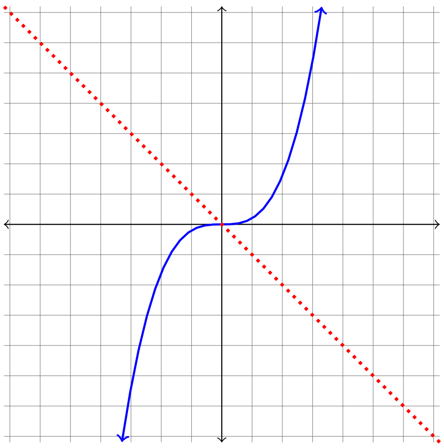


Simetría

Decimos que una función presenta una simetría cuando una de sus mitades es el re ejo exacto de la otra, con respecto a una recta que hace las veces de espejo y que llamamos eje de simetría .
En este curso estudiaremos dos tipos de simetrías:

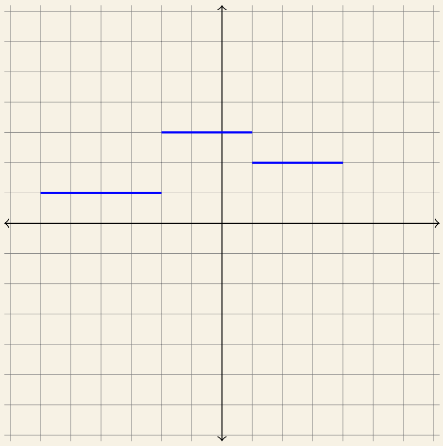


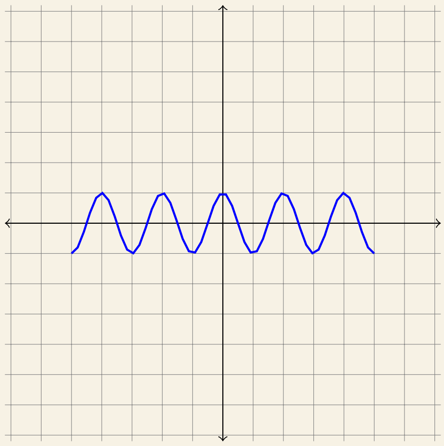
Una función par es aquella en la que el eje de simetría es el eje de coordenadas vertical $x = 0$, por lo que la grá ca a la izquierda de dicho eje es igual a la grá ca a la derecha.

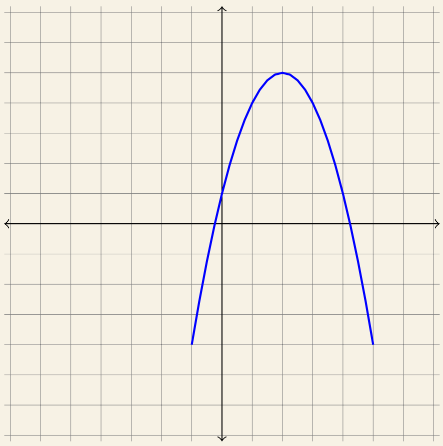


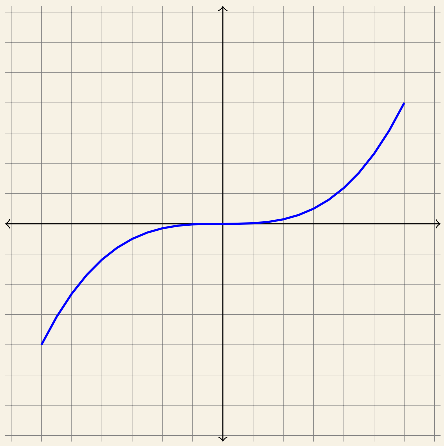
Una función impar a aquella en la que el eje de simetría esla recta y = x, por lo que la grá ca a la izquierda del eje vertical es justamente la opuesta a la grá ca a la derecha.

6. Estudia las características de las siguientes grá cas de funciones:









7. Representa en Geogebra las siguientes funciones y estudia sus características:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = \quad 3x^3$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d) $f(x) = x^4$

e) $f(x) = \quad 3x^4$

f) $f(x) = \dfrac{x^3}{5} + 4$

g) $f(x) = jxj$

h) $f(x) = j2x \quad 3j$

i) $f(x) = j2xj \quad 3$

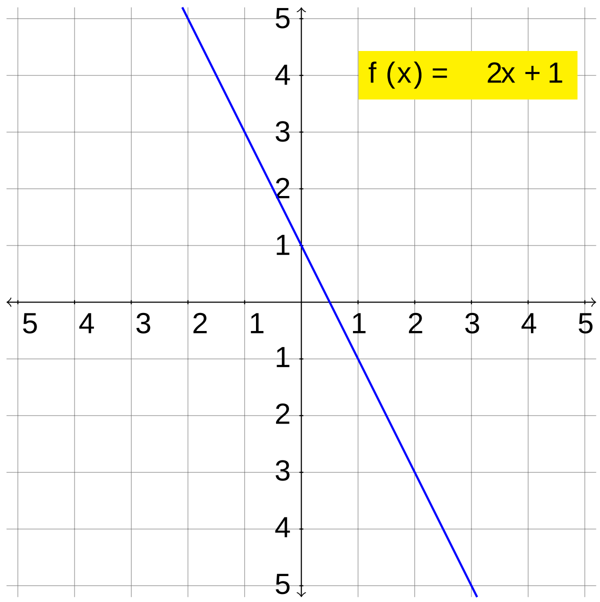
j) $f(x) = x^4 \quad 5x^2$

k) $f(x) = x^5 \quad 3x^3$

l) $f(x) = x^7 + 3x^4 \quad 5x^2 + 1$

Funciones lineales y cuadráticas

Función lineal



Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = mx + n$ donde m y n son dos números conocidos.
Le llamamos lineal porque su grá ca se corresponde con una línea recta.

> Las rectas verticales **no** son la grá ca de ninguna función.

1. Construye la tabla de valores y representa la grá ca de las siguientes funciones lineales:

   a) $f(x) = x + 3$ c) $f(x) = 3x$ e) $f(x) = 2$ g) $f(x) = x + 4$

   b) $f(x) = x \quad 3$ d) $f(x) = 3x$ f) $f(x) = 4x \quad 1$ h) $f(x) = 1 \quad x$

2. Comprueba si el punto $P = (3\,;2)$ pertenece a alguna de las siguientes rectas:

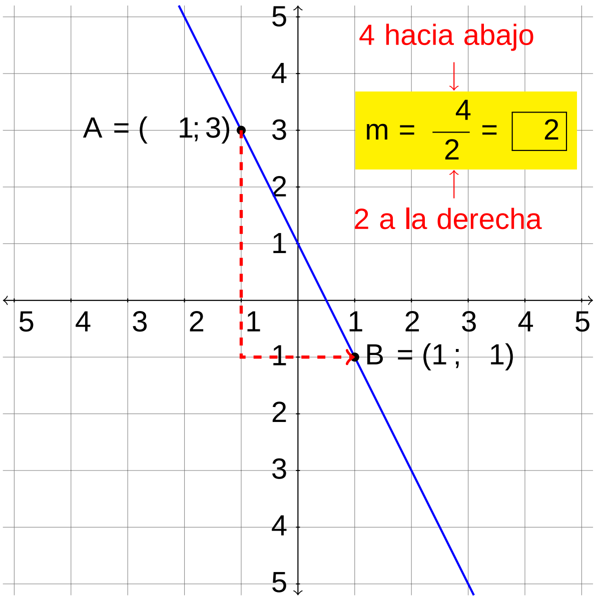
   a) $f(x) = x + 1$ b) $f(x) = 2x \quad 3$ c) $f(x) = 7 \quad 3x$ d) $f(x) = 3x \quad 7$

Pendiente y ordenada de la recta

La **pendiente** representa la inclinación de la recta y corresponde al valor m.

Para calcularla necesitaremos dos puntos de la recta, y observar cuánto nos trasladamos hacia arriba por cada punto que nos trasladamos hacia la derecha.
Es decir, es la diferencia entre las coordenadas verticales dividida entre la diferencia de las coordenadas horizontales:

$$m = \frac{y_B \quad y_A}{x_B \quad x_A}$$



- Si la pendiente es positiva (m > 0) la función lineal es creciente.
- Si la pendiente es cero (m = 0) la función lineal es constante.
- Si la pendiente es negativa (m < 0) la función lineal es decreciente.

3. Indica si las siguientes funciones son crecientes, decrecientes o constantes:

   a) f (x) = x + 3 c) f (x) = 3 x e) f (x) = 2 g) f (x) = x + 4

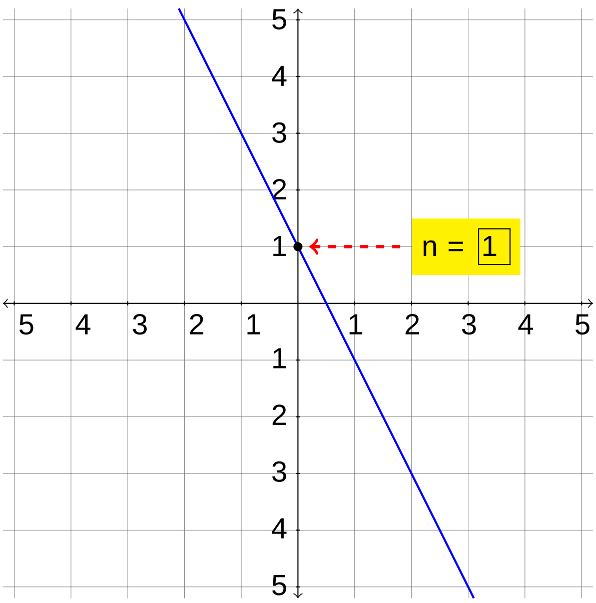
   b) f (x) = x 3 d) f (x) = 3x f) f (x) = 4 x 1 h) f (x) = 1 x

4. Calcula la pendiente de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos. ¾Son crecientes, decrecientes o constantes?

   a) A = (3 ; 4), B = (2 ; 5) d) G = (2 ; 1), H = (5 ; 3)

   b) C = (3 ; 4), D = (4 ; 3) e) I = (4; 3), J = (5; 0)

   c) E = (0 ; 0), F = (2; 4) f) K = (2; 4), L = (2 ; 4)



El término independiente (también llamado ordenada respecto al origen) representa la altura a la que se encuentra la recta y corresponde al valor n.
Para hallarlo solo necesitaremos observar el punto de la recta que corta al eje vertical.

Si no dispongo de la grá ca, puedo tomar la expresión f (x) = mx + n, con m ya conocida, y sustituir las coordenadas de uno de los puntos conocidos.

Consideremos la recta que pasa por los puntos $A = (-3; 2)$ y $B = (-4; 5)$.

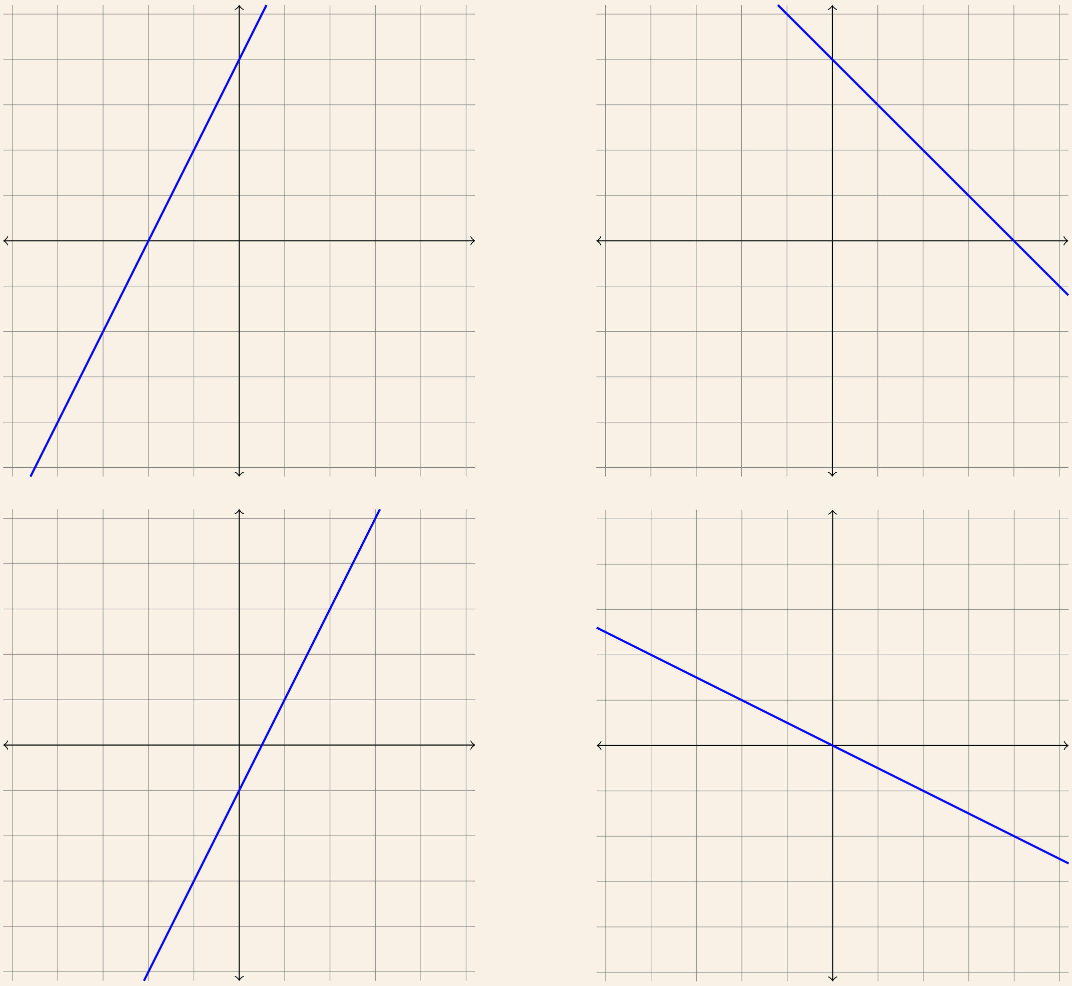
Su pendiente es $m = \dfrac{5-2}{-4-(-3)} = \dfrac{3}{-1} = -3$, por lo tanto tiene una expresión del tipo $f(x) = -3x + n$.

Para hallar el valor de n sustituyo la coordenadas del punto A $(x = -3,\ f(x) = 2)$. Podría hacerlo también con las del punto B o cualquier otro punto de la recta.

$2 = -3 \cdot (-3) + n \Rightarrow 2 = 9 + n \Rightarrow n = -7$

Por lo tanto la expresión algebraica de la recta será $\boxed{f(x) = -3x - 7}$.

5. Observa las siguientes gráficas y deduce cuál es su expresión algebraica ($f(x) = mx + n$):



6. Halla la expresión algebraica ($f(x) = mx + n$) de las funciones lineales que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, utilizando la fórmula de obtención de la pendiente:

a) $A = (0; 1)$, $B = (2; 3)$

b) $C = (3; 4)$, $D = (2; 3)$

c) $P = (-5; 3)$, $Q = (-3; 3)$

d) $R = (1; 7)$, $S = (-1; 3)$

e) $F = (3; 1)$, $G = (2; -1)$

f) $I = (0; 0)$, $J = (-5; -3)$

Problemas:

7. Un grifo vierte 36 litros de agua cada minuto.

   a) Escribe la función que relaciona el volumen de agua con las horas que está el grifo abierto.

   b) ¾Cuánto tiempo tardará en llenar una piscina de 2 m x 3 m x 10 m?

8. Hemos ido al mercado y hemos visto que los chinchos están a 4'50e el kilo, mientras que la lubina está a 21e el kilo.

   a) Escribe las funciones que relacionan el precio con los kilogramos comprados.

   b) Elabora tablas de valores y representa las dos grá cas.

   c) ¾Cuál es la pendiente? ¾Y la ordenada en el origen?

9. En una tienda de ropa han empezado las rebajas haciendo un descuento del 20 % en todos los artículos de temporada.

   a) ¾Cuál es el precio de un artículo que antes valía 60e ? ¾Y de otro de 70e ?

   b) Escribe la función que relaciona el precio original con el precio rebajado.

10. He contratado una potencia eléctrica de 4'6 kW en una compañía cuyo precio del término de potencia es de 0'1233e /kW/día (que representa una cantidad ja que he de pagar todos los meses). Además me cobran un promedio de 0'15252e por cada kWh consumido.

    a) Escribe la función que relaciona la cantidad a pagar en la factura mensual con los kWh consumidos.

    b) Elabora una tabla de valores y represéntela grá camente.

    c) ¾Cuál es la pendiente? ¾Y la ordenada en el origen?

11. Quiero sacarme el carnet de conducir y he comparado las ofertas de tres autoescuelas diferentes. Representa las tres opciones grá camente (en un mismo dibujo) y decide cuál es más ventajosa.

    a) Una me cobra una matrícula de 40e, más 25e por cada clase práctica.

    b) Otra no me cobra matrícula, pero en cambio cada clase práctica cuesta 30e.

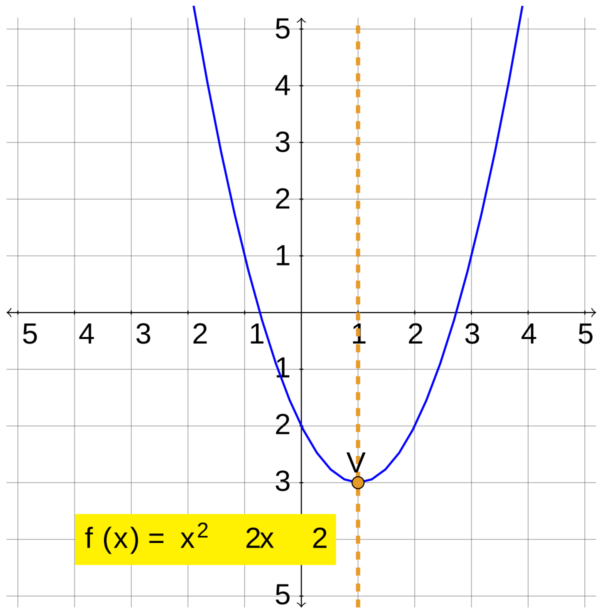
    c) La última me hace una oferta: por 550e puedo hacer todas las prácticas que quiera.

12. Hemos abierto un pozo con una abertura de 3 m^2.

    a) Si tiene una profundidad de x metros, ¾cuál será el volumen de agua que puede contener?

    b) ¾Qué profundidad debe tener para alcanzar una capacidad de 5 000 litros?

Función cuadrática



Una función cuadrática es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son números conocidos.

Su grá ca se corresponde a una parábola vertical.

La parábola, como gura geométrica, puede tener orientación vertical, horizontal o con cualquier otro grado de inclinación.

Pero las únicas que son grá cas de funciones son las verticales.

Todas las funciones cuadráticas tienen un único extremo relativo que llamaremos vértice.

Además esas funciones siempre tienen un eje de simetría que es la recta vertical que pasa por su vértice.

Por ese motivo localizar el vértice es fundamental para estudiar una parábola.

Orientación de la parábola

El coe ciente a nos da información respecto a la orientación (hacia arriba o hacia abajo) y la amplitud (más abierta o más cerrada) de la parábola.

13. Elabora una tabla de valores para $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ y representa las siguientes funciones lineales:

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 2x^2$ c) $f(x) = x^2$ d) $f(x) = 2x^2$

¾Qué conclusiones puedes sacar sobre la información que nos da el parámetro a?

LOCALIZACIÓN DEL VÉRTICE

El modo más sencillo de localizar el vértice es utilizando los puntos de corte con el eje horizontal, es decir, los que obtenemos a partir de resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Si hay un único punto de corte con el eje horizontal, está claro que ese punto debe ser el vértice de la parábola.

14. Halla el punto de corte con el eje horizontal para localizar el vértice de las siguientes funciones cuadráticas:

    a) $f(x) = x^2 \quad 2x + 1$ c) $f(x) = 4x^2 \quad 4x + 1$

    b) $f(x) = \quad x^2 + 4x \quad 4$ d) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$

    Utilízalo como referencia para elaborar una tabla de valores que te permita representarlas grá - camente.

Si hay dos puntos de corte con el eje horizontal entonces deben ser simétricos el uno de otro con respecto al eje de simetría.
Eso implica que el eje de simetría (y por ende el vértice) debe estar justo en el punto medio entre ambos puntos de corte.

15. Halla los puntos de corte con el eje horizontal para localizar el vértice de las siguientes funciones cuadráticas:

    a) $f(x) = x^2 \quad 1$ c) $f(x) = x^2 + x \quad 6$

    b) $f(x) = \quad x^2 + 4x \quad 3$ d) $f(x) = \quad 4x^2 \quad 4x + 3$

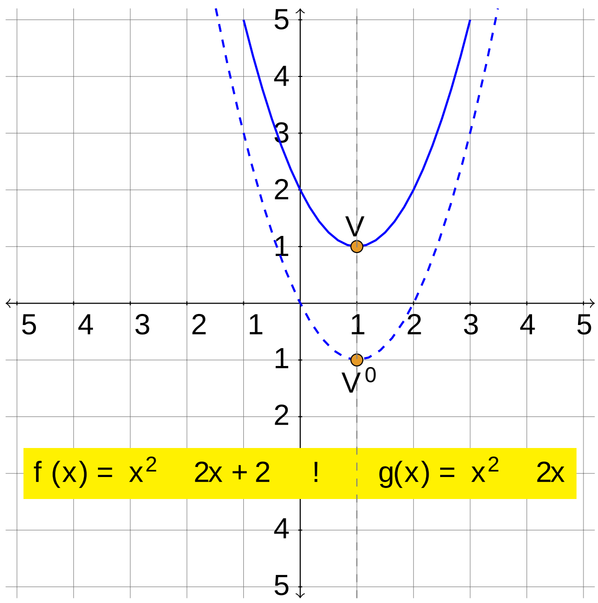
    Elaborar sus tablas de valores y represéntalas grá camente.

¿Y si no hay puntos de corte con el eje horizontal?

Entonces si $a > 0$ sabemos que la grá ca está toda por encima del eje horizontal, y si $a < 0$ sabemos que está toda por debajo.

Podemos trasladarla hacia abajo o arriba, obteniendo una nueva parábola cuyo vértice tendrá la misma coordenada x, y de la cual podamos obtener puntos de corte con facilidad.

Un punto de la parábola muy sencillo de calcular es el $(0; c)$, por lo tanto sabemos que si trasladamos la parábola justamente c obtendremos una nueva parábola adecuada.



16. Halla el vértice de las siguientes funciones cuadráticas, elabora una tabla con al menos dos valores menores y dos mayores que el vértice, y finalmente represéntalas:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 10$

b) $f(x) = 16x^2 - 8x + 5$

c) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$

d) $f(x) = -2x^2 - 5x - 5$

Este razonamiento puede extenderse a cualquier parábola. Incluso aquellas que tienen puntos de corte con el eje pueden ser trasladadas.

Así para hallar el vértice de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + x$ podremos siempre buscar los puntos de corte con el eje horizontal de la parábola trasladada $g(x) = ax^2 + bx$.

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Como el vértice tendrá por coordenada x justamente el punto medio de esas dos soluciones, podemos obtener una expresión general:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

17. Halla el vértice de las siguientes funciones cuadráticas, elabora una tabla de valores y finalmente represéntalas:

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

b) $f(x) = -5x^2 + 6x + 3$

c) $f(x) = x^2 - 2$

d) $f(x) = -3x^2 + 9x - 7$

18. En una distribuidora de material de oficina venden el paquete de cien bolígrafos por 27 €. Se plantean realizar una promoción según la cual por cada paquete adicional descontarán 1'5 € en el precio de cada unidad.

a) Si llamamos x al número de paquetes que adquiere un cliente, ¿cuál será el precio unitario al que se le cobrarán? ¿Y cuál será el total a facturar?

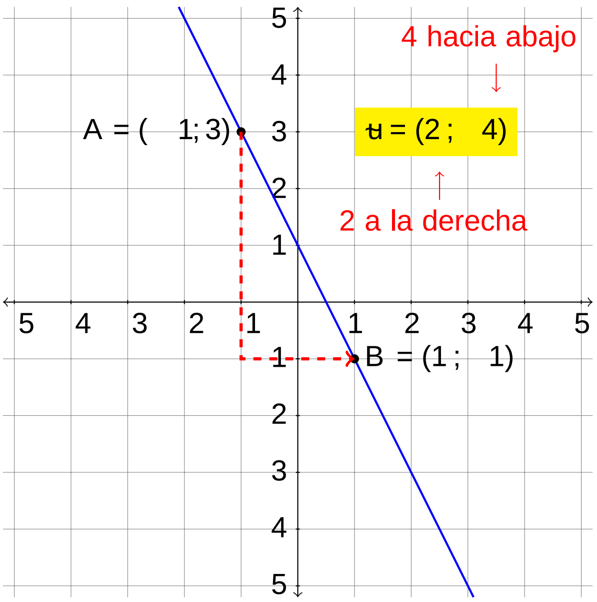
b) Si sabemos que el coste de fábrica es de 16 € por paquete, ¿cuál es el beneficio obtenido por la venta de x paquetes?

c) Estudia la función obtenida y decide si esa promoción es viable, y en caso afirmativo ¿cuál será el máximo descuento asumible?

RECTAS EN EL PLANO

Entendemos una recta como una colección in nita de puntos que se extiende en una determinada dirección. Necesitamos por lo tanto de nir formalmente qué es una dirección, concepto a partir del cual podremos dar ecuaciones para describir cualquier recta.

DIRECCIÓN DE LA RECTA



Para de nir la dirección en la que se extiende una recta, simplemente observamos dos puntos cualesquiera y cuanti camos el movimiento con respecto a ambas coordenadas.

Si los puntos A = (1; 3) y B = (1 ; 1) pertenecen a la recta, con respecto a la primera coordenada nos hemos movido desde -1 hasta 1 (es decir, 2 unidades) y con respecto a la segunda coordenada nos hemos movido desde 3 hasta -1 (es decir, -4 unidades).
Para e que nos hemos movido en la dirección (2; 4):

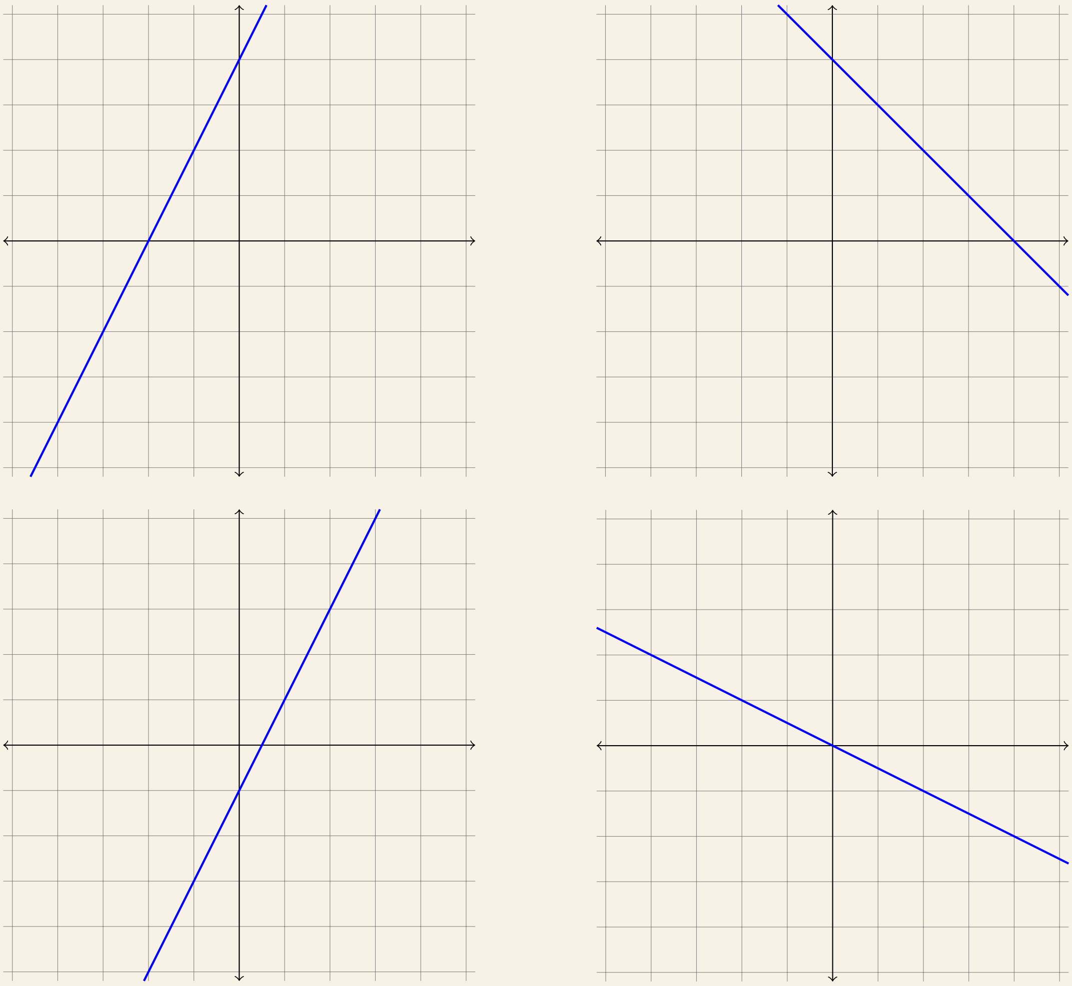
19. Halla la dirección de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos:

a) A = (0 ; 1), B = (2 ; 3)
b) C = (3 ; 4), D = (2 ; 3)
c) E = (1; 3), F = (4 ; 3)
d) G = (3 ; 1), H = (2 ; 1)
e) I = (0 ; 0), J = (5; 3)
f) K = (3 ; 4), L = (3 ; 7)
g) M = (1 ; 7), N = (1; 3)
h) P = (5; 3), Q = (3; 2)

La recta tiene in nitos puntos, y si tomo otros dos puntos arbitrarios de la misma recta obtendré unas coordenadas distintas para la dirección de la misma.

Llamamos vector a cada pareja de coordenadas que indica una dirección, y todos los vectores que podamos hallar para la dirección de una recta son equivalentes entre sí.
Eso quiere decir simplemente que son proporcionales, un vector puede ser el doble, o el triple, o la décima parte de otro vector que indique la misma dirección.

20. Obtén un vector que indique la dirección de cada una de estas rectas:



21. Dibuja en tu cuaderno una recta vertical. ¿Cuál es su dirección?

PENDIENTE DE LA RECTA

La dirección de una recta está íntimamente relacionada con su pendiente, y es muy sencillo obtener la una a partir de la otra.

$$\vec{u} = (x_B - x_A ; y_B - y_A) \quad \rightarrow \quad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

22. Estas son las direcciones de varias rectas. Halla su pendiente:

a) $\vec{a} = (-3 ; 4)$ b) $\vec{b} = (6 ; -8)$ c) $\vec{c} = (4 ; 3)$ d) $\vec{d} = (0 ; 1)$

23. ¿Qué ocurre si intentas obtener la pendiente de una recta vertical?

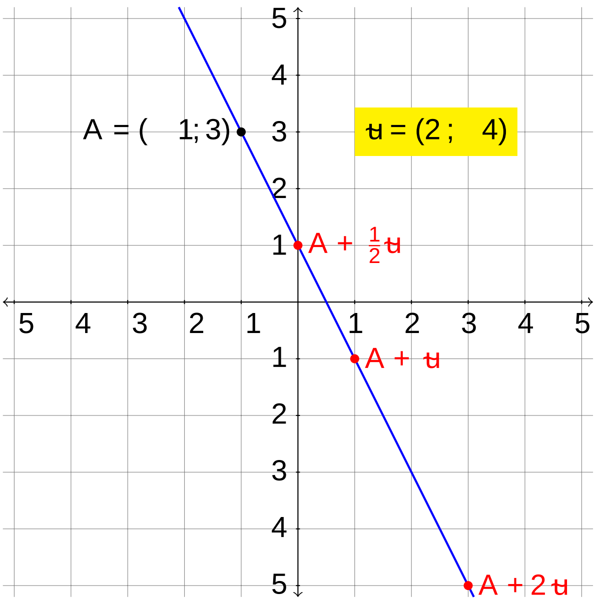
24. Estas son las pendientes de varias rectas. Halla un vector con coordenadas enteras que dé su dirección.

a) $m = 2$ b) $m = -2$ c) $m = 0'5$ d) $m = -0'25$

ECUACIONES DE LA RECTA

Para describir algebraicamente una recta necesitamos conocer al menos un punto que pertenezca a ella y además su dirección. Esos datos nos permiten expresar una ecuación que deben cumplir todos los puntos de la recta.

ECUACIÓN VECTORIAL



La forma más sencilla de plantear una ecuación de la recta es tomar un punto de referencia y a partir de ahí movernos en la dirección de la recta tanto como el vector, o dos veces el vector, o media vez el vector, etc.

Esa «cantidad de veces» el vector puede ser cualquier número, y lo caracterizaremos con el parámetro t que puede tomar cualquier valor real.

$$(x; y) = (x_A ; y_A) + t\ (x_u ; y_u)$$

$$(x; y) = (\ \ 1; 3) + t\ (2;\ \ 4)$$

25. Halla la ecuación vectorial de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos:

a) A = (0 ; 1), B = (2 ; 3)

b) C = (3 ; 4), D = (2 ; 3)

c) E = (1; 3), F = (4 ; 3)

d) G = (3 ; 1), H = (2 ; 1)

e) I = (0 ; 0), J = (5; 3)

f) K = (3 ; 4), L = (3 ; 7)

g) M = (1 ; 7), N = (1; 3)

h) P = (5; 3), Q = (3; 2)

26. ¾Existe algún valor del parámetro t para el que el punto R = (3 ; 5) pertenezca a cada una de las rectas anteriores?

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

La ecuación vectorial se puede reescribir, observando por un lado lo que ocurre con la coordenada x y por otro lado lo que ocurre con la coordenada y.

$$\begin{cases} x = x_A + t\ x_u \\ y = y_A + t\ y_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \ \ 1 + 2t \\ y = 3\ \ 4t \end{cases}$$

27. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, con las que ya trabajamos en ejercicios anteriores:

a) A = (0 ; 1), B = (2 ; 3)
b) C = (3 ; 4), D = (2 ; 3)
c) E = (1; 3), F = (4 ; 3)
d) G = (3 ; 1), H = (2 ; 1)
e) I = (0 ; 0), J = (5; 3)
f) K = (3 ; 4), L = (3 ; 7)
g) M = (1 ; 7), N = (1; 3)
h) P = (5; 3), Q = (3; 2)

28. ¾Existe algún valor del parámetro t para el que el punto S = (3; 1) pertenezca a cada una de las rectas anteriores?

ECUACIÓN CONTINUA

Utilizar un parámetro es útil para plantear ecuaciones, pero comprobar si un punto pertenece a una recta resulta complejo. Por eso intentaremos librarnos de él, utilizando el método de igualación (que vimos en el tema de sistemas de ecuaciones).

$$\frac{y \quad y_A}{y_u} = \frac{x \quad x_A}{x_u}$$

$$\frac{y \quad 3}{4} = \frac{x + 1}{2}$$

29. Halla la ecuación continua de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, utilizando las ecuaciones paramétricas que ya has obtenido, en aquellos casos en los que sea posible:

a) A = (0 ; 1), B = (2 ; 3)
b) C = (3 ; 4), D = (2 ; 3)
c) E = (1; 3), F = (4 ; 3)
d) G = (3 ; 1), H = (2 ; 1)
e) I = (0 ; 0), J = (5; 3)
f) K = (3 ; 4), L = (3 ; 7)
g) M = (1 ; 7), N = (1; 3)
h) P = (5; 3), Q = (3; 2)

30. ¾A cuáles de las rectas anteriores pertenece el punto T = (5 ; 5)?

31. a) ¾Qué tipos de rectas no tienen ecuación continua? ¾Por qué?
b) ¾Qué ecuación sencilla podría describir esas rectas?

ECUACIÓN PUNTO - PENDIENTE

La ecuación continua ya facilita mucha información pero podemos simpli carla multiplicando por el coe ciente y_u, obteniendo la pendiente $m = \frac{y_u}{x_u}$ en el otro miembro de la ecuación.

$$y \quad y_A = m\ (x \quad x_A)$$

$$y \quad 3 = \quad 2\ (x + 1)$$

Además es posible calcular la ecuación punto-pendiente incluso para rectas horizontales, a pesar de no haber obtenido previamente la ecuación continua.

32. Halla la ecuación punto-pendiente de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, utilizando la ecuación continua que ya has obtenido:

a) A = (0 ; 1), B = (2 ; 3)

b) C = (3 ; 4), D = (2 ; 3)

c) G = (3 ; 1), H = (2 ; 1)

d) I = (0 ; 0), J = (5; 3)

e) M = (1 ; 7), N = (1; 3)

f) P = (5; 3), Q = (3; 2)

33. La recta que pasa por los puntos E = (1; 3) y F = (4 ; 3) es horizontal y por lo tanto no tiene ecuación continua. ¾Cuál es su ecuación punto-pendiente?

34. La recta que pasa por los puntos K = (3 ; 4) y L = (3 ; 7) tampoco tiene ecuación continua, pero en este caso no se puede calcular la punto-pendiente. ¾Por qué?

35. ¾A cuáles de las rectas anteriores pertenece el punto U = (11; 7)?

ECUACIÓN EXPLÍCITA

Bastaría despejar la variable y de la ecuación de la recta para obtener una ecuación que coincide con la expresión que hemos visto en el tema de funciones lineales.

$$y = m\ x + n$$

$$y = \quad 2x + 1$$

A diferencia de todas las demás ecuaciones, la explícita es única. Independientemente de los puntos tomados, obtendremos siempre la misma ecuación.

36. Halla la ecuación explícita de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos:

a) A = (0 ; 1), B = (2 ; 3)

b) C = (3 ; 4), D = (2 ; 3)

c) E = (1; 3), F = (4 ; 3)

d) G = (3 ; 1), H = (2 ; 1)

e) I = (0 ; 0), J = (5; 3)

f) M = (1 ; 7), N = (1; 3)

g) P = (5; 3), Q = (3; 2)

37. ¾A cuáles de las rectas anteriores pertenece el punto V = (1; 0)?

ECUACIÓN GENERAL

Esta ecuación puede obtenerse a partir de la continua, la punto-pendiente o la explícita. Basta operar y reordenar los términos de manera adecuada.

$Ax + By + C = 0$	$2x + y - 1 = 0$

38. Halla la ecuación general de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, utilizando alguna de las ecuaciones obtenidas anteriormente:

a) $A = (0;1)$, $B = (2;3)$

b) $C = (3;4)$, $D = (2;3)$

c) $E = (-1;3)$, $F = (4;3)$

d) $G = (3;1)$, $H = (2;-1)$

e) $I = (0;0)$, $J = (-5;-3)$

f) $M = (1;7)$, $N = (-1;3)$

g) $P = (-5;3)$, $Q = (-3;2)$

39. ¾A cuáles de las rectas anteriores pertenece el punto $V = (7;-4)$?

40. Observa cada una de las ecuaciones generales que has obtenido y también la pendiente de esas rectas. ¾Puedes encontrar alguna relación?

Una vez conocidas todas las ecuaciones de la recta, es importante entender la información que nos ofrecen y saber trasladarla a otra de las ecuaciones.

41. Escribe todas las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:

a) $A = (4;6)$, $B = (3;8)$

b) $C = (-3;-4)$, $D = (-5;-2)$

c) $E = (4;7)$, $F = (8;7)$

d) $G = (-2;9)$, $H = (-2;6)$

42. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta $3x + 2y - 5 = 0$.

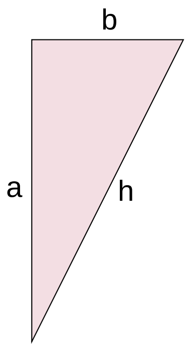
43. Escribe la ecuación general de la recta $\frac{y-5}{2} = \frac{x-3}{5}$.

44. Escribe la ecuación punto-pendiente de la recta $y = 4x + 2$.

45. Escribe la ecuación explícita de la recta $3x + 2y + 8 = 0$.

GEOMETRÍA PLANA

TEOREMA DE PITÁGORAS



Uno de los teoremas clásicos de la geometría es el teorema de Pitágoras, aplicado a triángulos rectángulos .

Para entenderlo, debemos conocer los nombres de las partes de un triángulo rectángulo:

- La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto, y es siempre el mayor de los tres.
- Los catetos son los lados contiguos al ángulo recto.

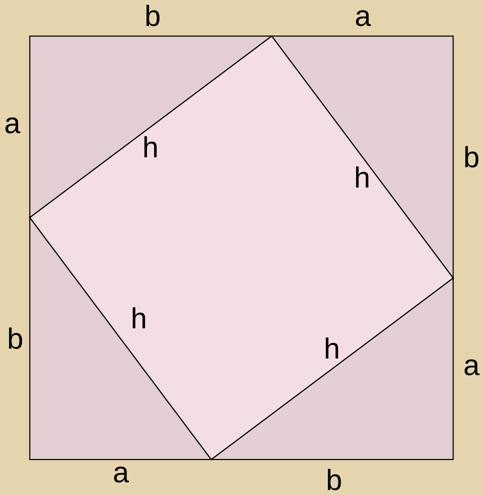
Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Intenta demostrar el teorema de Pitágoras:

46. En la siguiente gura hay cuatro triángulos rectángulos iguales que encierran un cuadrado:



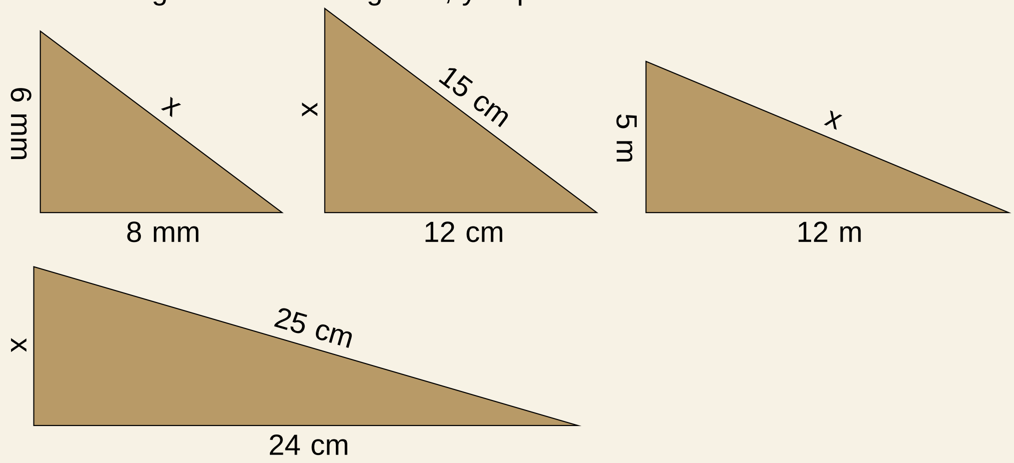
a) Halla el área del cuadrado grande, teniendo en cuenta que su lado mide $a + b$.
½Recuerda las identidades notables!

b) Halla el área del los rectángulos y el área del cuadrado pequeño.

c) El área del cuadrado grande es igual al área de los cuatro triángulos más el área del cuadrado pequeño.
Escribe algebraicamente esa igualdad.

d) Despeja h^2.
¾Qué expresión obtienes?

47. Halla la longitud de las incógnitas, y exprésalas en las unidades adecuadas:



El teorema de Pitágoras nos permite conocer características de otras guras, dividiéndolas en triángulos rectángulos convenientes.

48. ¾Cuánto mide la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1 metro?

49. Halla la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 3 metros.

50. Calcula la longitud del lado de un rombo sabiendo que su diagonal mayor mide 80 cm y su diagonal menor mide 60 cm.

51. Calcula la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 4 cm.

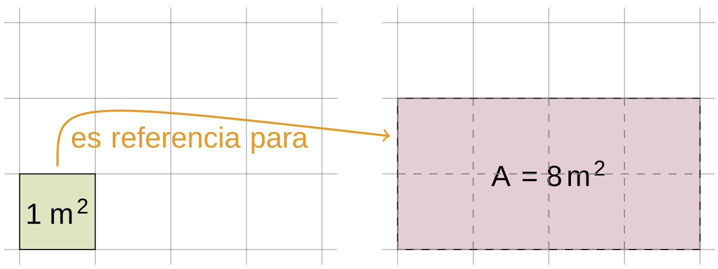
Perímetro y área

El perímetro de un polígono es la medida del contorno que rodea a la gura. Se calcula sumando todos los lados de la gura, y se expresa en unidades de longitud (metro, centímetro, kilómetro, etc.).

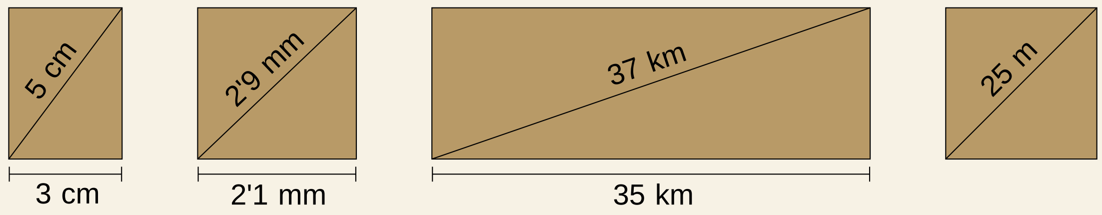
El área de un polígono es la medida de la extensión que ocupa la gura. Se calcula tomando como referencia una gura cuadrada de lado 1 unidad, y se expresa en cuadrados de unidades de longitud (m^2, cm^2, km^2, etc.)

Área del rectángulo

El área de un rectángulo se obtiene por composición de múltiples cuadrados de lado unitario, por lo que puede calcularse multiplicando base por altura.



52. Aplica el teorema de Pitágoras y calcula el perímetro y el área de las siguientes guras:



53. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo cuya base mide 1'5 metros y cuya altura mide el triple que la base.

54. La diagonal de un rectángulo mide 1 metro más que uno de sus lados. El otro lado mide 5 metros. Ayúdate de un dibujo para expresarlo algebraicamente.
Calcula el perímetro y el área del rectángulo.

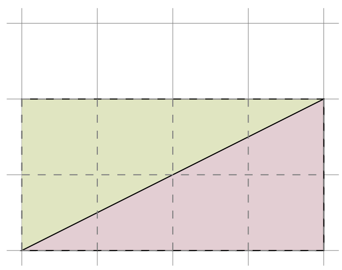
55. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo cuya base mide 1 cm más que su altura y cuya diagonal mide 29 centímetros.

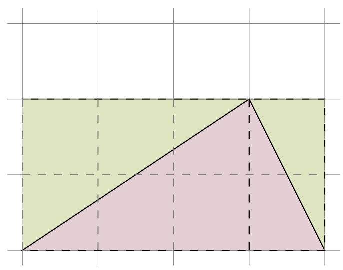
56. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo cuya altura mide 11 centímetros y cuya base es 1 centímetro menor que la diagonal.

Área del triángulo

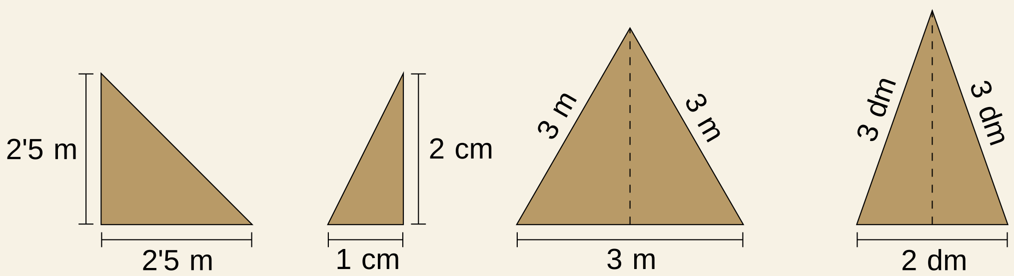
Un triángulo ocupa la mitad de super cie que un rectángulo con la misma base y altura. Este hecho es muy evidente cuando se trata de un triángulo rectángulo.

Cuando hablamos de otros triángulos la observación no es directa, pero si los dividimos en dos partes trazando su altura podemos ver que también es la mitad del rectángulo correspondiente.

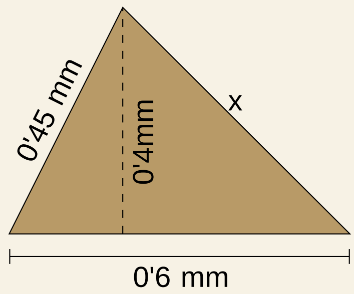




57. Aplica el teorema de Pitágoras y calcula el perímetro y el área de las siguientes guras:



58. ¾Cuál es el perímetro de este triángulo?



En este ejercicio necesitarás hallar un valor adicional para poder calcular la longitud del lado desconocido.

Eso implica aplicar el teorema de Pitágoras en varias ocasiones.

59. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 centímetros y uno de sus catetos 10 centímetros.

a) Utiliza el teorema de Pitágoras para hallar la longitud del otro cateto.

b) Halla el perímetro y el área del triángulo.

60. Calcula el perímetro y el área de los siguientes triángulos rectángulos:

a) Un cateto mide 4 cm y el otro 3 cm.

b) Un cateto mide 40 m y la hipotenusa mide 41 m.

c) Un cateto mide 8 mm y la hipotenusa mide 17 mm.

d) Un cateto mide 12 cm y el otro 35 cm.

e) Un cateto mide 60 m y la hipotenusa mide 61 m.

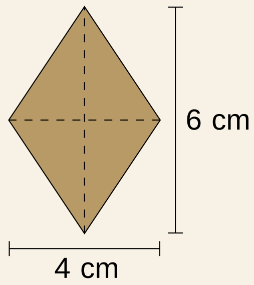
f) Un cateto mide 20 cm y el otro 21 cm.

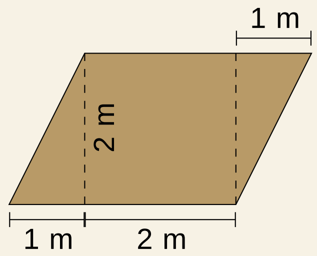
61. Halla el perímetro y el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 7 decímetros.

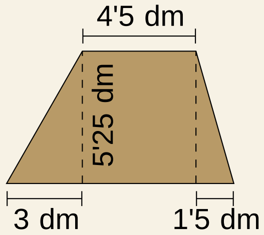
Área de otros polígonos

Conocido el modo en que se calculan el área de un rectángulo y el área de un triángulo, ya podemos hallar la de cualquier otra gura poligonal descomponiéndola en rectángulos y triángulos convenientes.

62. Calcula el perímetro y el área de las siguientes guras:

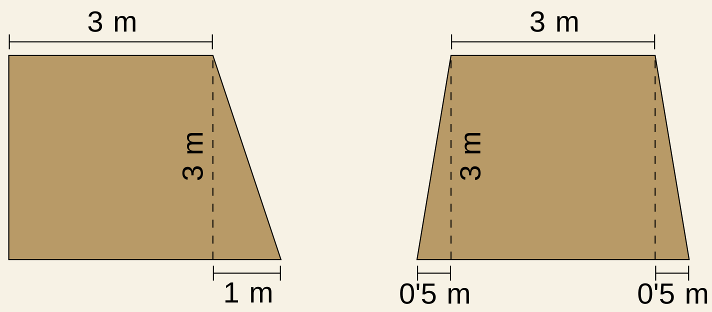


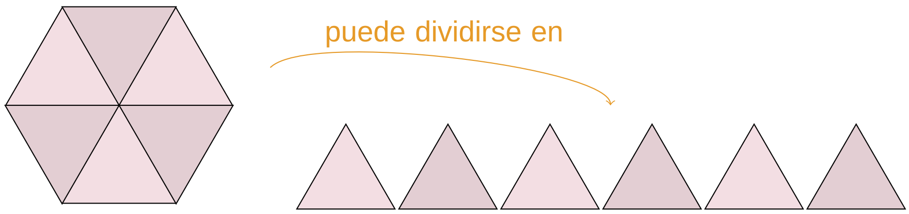




63. El lado de un rombo mide 12'5 cm y una de sus diagonales 15 cm. Calcula su perímetro y su área.

64. Compara el perímetro y el área de estos dos trapecios:





Un caso particular son los polígonos regulares, que pueden dividirse en tantos triángulos iguales como lados tienen.
Cada uno de esos triángulos tiene como base uno de los lados del polígono y como altura la apotema, de modo que su área es:

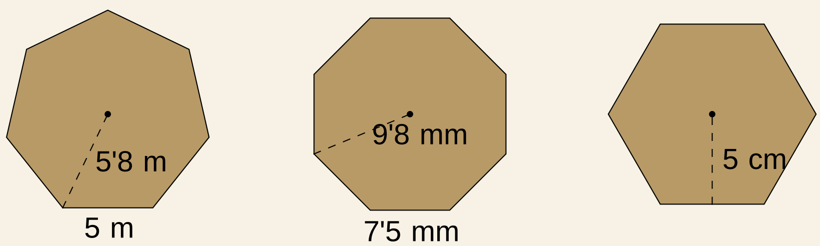
$$A_T = \frac{\text{lado} \quad \text{apotema}}{2}$$

Y por lo tanto el área total del polígono es:

$$A = \text{n}^{\text{o}} \text{ lados} \quad \frac{\text{lado} \quad \text{apotema}}{2}$$

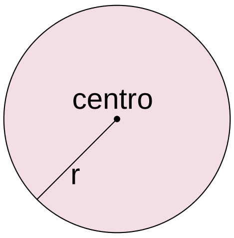
El hexágono regular está formado por 6 triángulos equiláteros.
Por eso el lado del hexágono es igual a su radio.

65. Calcula el perímetro y el área de las siguientes guras:



66. Halla el lado de un pentágono regular de 61'5 cm^2 de área y 4'1 cm de apotema.

67. Averigua la apotema de un hexágono regular de área 93'5 cm^2.



El perímetro de un círculo , es decir, la longitud de la circunferencia, viene dada en función de su radio por la expresión 2 r .

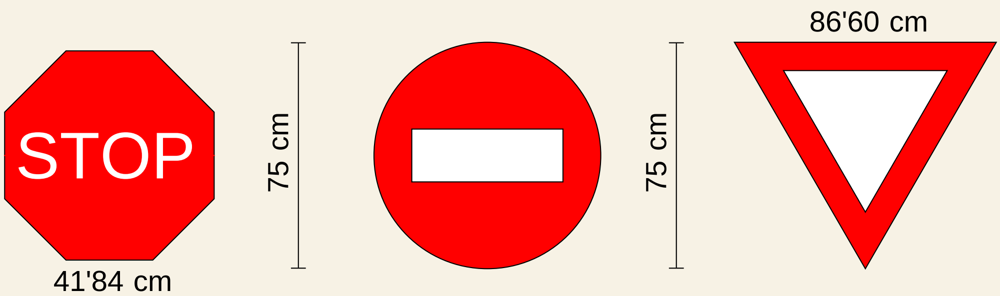
El área de un círculo también viene dada en función de su radio, por la expresión r ^{2}.

es un número irracional, es decir, tiene in nitas cifras decimales no periódicas.
Para evitar errores de utilizaremos el valor que nos facilita la calculadora.

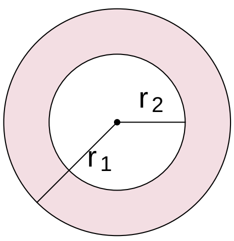
68. Halla el perímetro y el área de un círculo cuyo radio mide 2 metros.

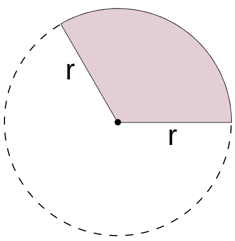
69. Halla el perímetro y el área de un círculo cuyo diámetro mide 2 metros.

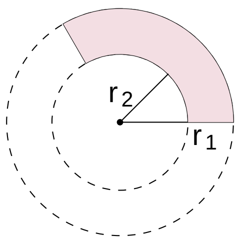
70. Compara la super cie de distintas señales de trá co, todas de la misma altura, para saber cuánto aluminio se necesita para su fabricación:



71. Halla el área de un círculo en el cual se puede inscribir un cuadrado de lado 3 centímetros.







El área de una corona circular es la diferencia del área del círculo grande menos el área del círculo pequeño.

$$A = A_{grande} \quad A_{pequeño}$$

El área del sector circular es una porción (¡recuerda la razón de proporción!) del círculo completo, que tiene un ángulo total de 360 ^{o}.

$$A = \frac{ángulo}{360} \quad A_{círculo}$$

El área del trapecio circular se calcula empleando primero el razonamiento de la corona y a continuación el del sector.

72. Calcula el área de una corona circular cuyos radios miden 3 y 5 metros.

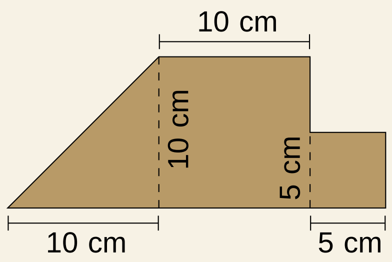
73. Calcula el perímetro y el área de un semicírculo de radio 4 metros.

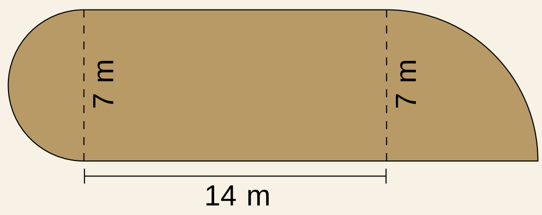
74. Calcula el perímetro y el área de un cuarto de corona circular cuyos radios miden 1 y 3 metros.

FIGURAS COMPUESTAS

Como el estudio de rectángulos y triángulos es sencillo, para hallar el área de otras figuras poligonales es conveniente descomponerlas en esas figuras.
Si la figura tiene alguna parte circular, lógicamente esa se descompondrá aparte.

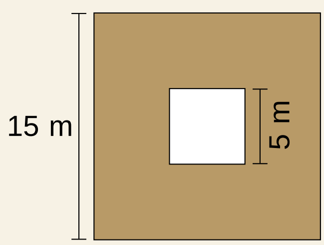
75. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:

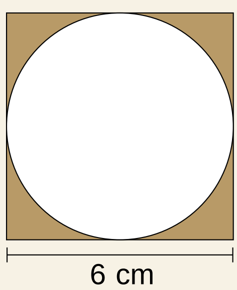


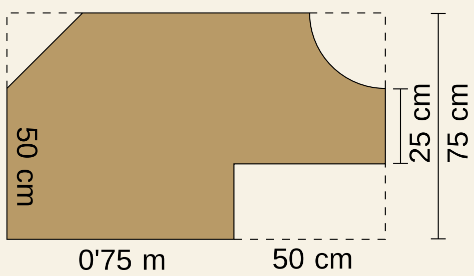


En ocasiones las figuras tienen huecos, bien sean interiores o estén justo en un borde. En ese caso podemos restarle a una figura grande el área del borde.

76. Calcula el área de las siguientes figuras:



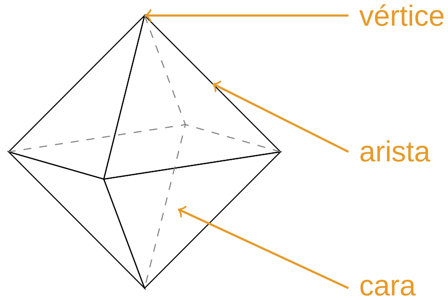




CUERPOS GEOMÉTRICOS

POLIEDROS

Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por 4 o más polígonos.



- Llamamos caras a cada uno de los polígonos que limitan al poliedro.
- Llamamos aristas a los lados de dichos polígonos. Cada arista es común a dos caras.
- Llamamos vértices a los puntos extremos de los lados. En cada vértice concurren varias aristas.

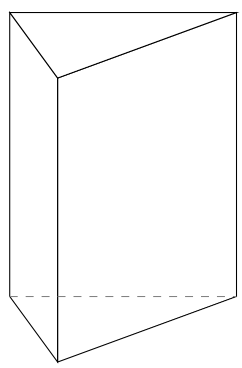
El área de un poliedro es la suma de las áreas de sus caras.
Para calcularlo de forma sencilla consideraremos su desarrollo plano.

El volumen de un poliedro es el espacio que ocupa.
Para calcularlo necesitamos conocer el área de la base y la altura del poliedro.

> Las unidades de volumen con las que trabajaremos serán los metros cúbicos (m^3) y sus múltiplos, así como los litros (l) y sus múltiplos.
>
> $$1\ l = 1\ dm^3$$

PRISMAS

Un prisma es un poliedro formado por dos bases poligonales iguales unidas mediante caras laterales que son paralelogramos.
Los hexaedros (o cubos) y los ortoedros son casos particulares de prismas.



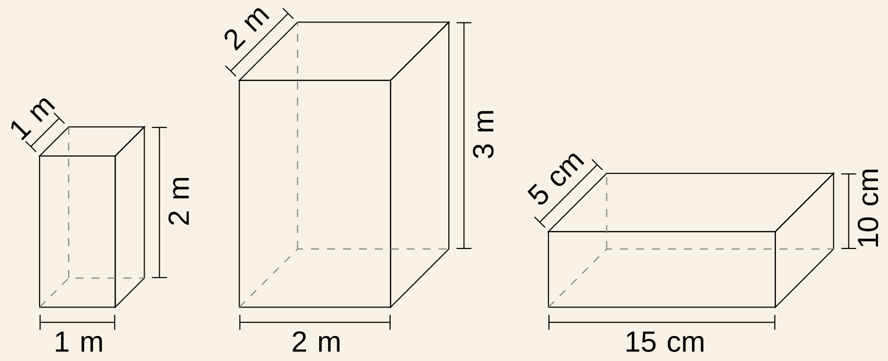
El área de un prisma es la suma del área de sus bases y caras laterales.
El volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

$$V = A_{base}\ \text{altura}$$

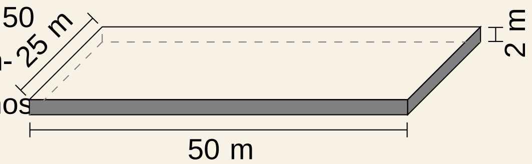
1. Halla el área y el volumen de los cubos cuyas aristas midan:

   a) 5 cm   b) 25 mm   c) 10 cm   d) 1'1 dm

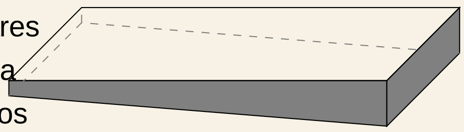
2. Halla la longitud de la arista de un cubo cuya área es 12 cm^2 y calcula su volumen.
3. Calcula el área y el volumen de los siguientes ortoedros:



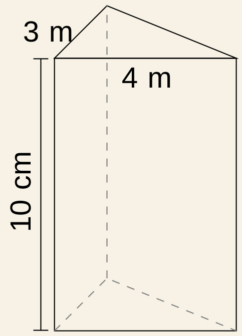
4. Las dimensiones de una piscina olímpica son 50 m de largo, 25 m de ancho y 2 m de profundidad. ¾Cuántos litros de agua necesitaremos para llenarla?



5. Las dimensiones de otra piscina son similares (50 m de largo, 25 m de ancho) pero la profundidad va de 2 m a 6 m. ¾Cuántos litros de agua necesitaremos para llenarla?



6. Calcula el área y el volumen de los siguientes prismas triangulares:



7. Esboza un dibujo de un prisma de 10 cm de altura y cuya base es un rombo con diagonal mayor 24 cm y diagonal menor 18 cm. Calcula su área y su volumen.
8. Calcula el área y el volumen de un prisma de 15 cm de altura y que tiene por base un rectángulo de lados 2 y 3 cm.
9. Calcula el área y el volumen de un prisma recto de 3 m de altura y que tiene por base un triángulo equilátero de 2 m de arista.

10. Calcula el área y el volumen de un prisma de 20 cm de altura y cuya base es un triángulo rectángulo con catetos 5 y 7 cm.

11. Calcula el área y el volumen de un prisma de 10 cm de altura y cuya base es un hexágono regular de lado 4 cm.

12. Calcula el área y el volumen de un prisma de 10 cm de altura y cuya base es un polígono irregular de perímetro 35 cm y área 25 cm^2.

13. Un tetrabrick de leche mide 7 cm de ancho, 7 cm de fondo y 20 cm de alto.

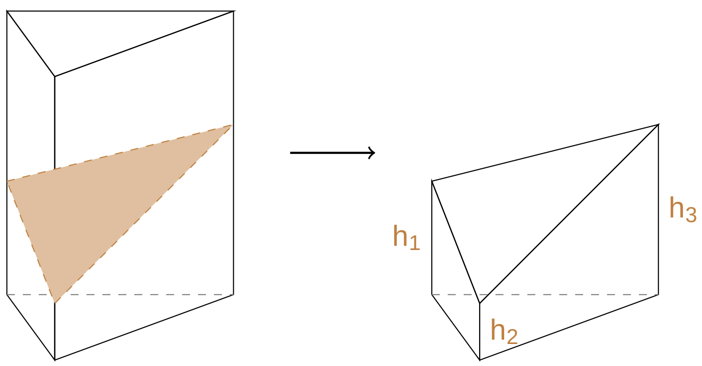
    a) ¾Qué cantidad de material es necesaria para fabricarlo?

    b) ¾Qué volumen tiene su interior? Exprésalo en mililitros.

Para pensar un poco:

14. El volumen de un prisma rectangular es de 3375 cm^3 y la suma de sus tres aristas concurrentes en un vértice es 65 cm. Halla la longitud de cada una de las aristas, sabiendo que están en progresión geométrica.

Prisma truncado



Si cortamos un prisma con un plano no paralelo a las bases, obtenemos dos fragmentos irregulares.
A cada uno de ellos le llamaremos prisma truncado o tronco de prisma.

Para calcular el área de este tipo de guras hemos de tener en cuenta que cada una de sus caras será ahora diferente y, en general, irregular.

El volumen de un tronco de prisma es el producto del área de la base por la media aritmética de las tres alturas medidas en sus aristas verticales.

$$V = A_{base} \frac{h_1 + h_2 + \quad + h_n}{n}$$

15. Calcula el volumen de los siguientes troncos de prisma:

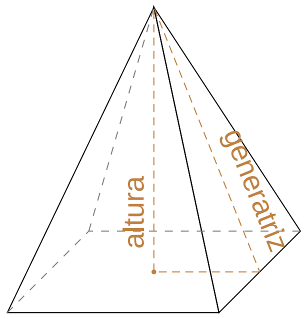
    a) Su base es un triángulo rectángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm. Sus alturas son 1 cm, 4 cm y 3 cm.

    b) Su base es un rectángulo de lados 20 cm y 15 cm. Tiene dos alturas de 4 cm y otras dos de 5 cm.

    c) Su base es un triángulo equilátero de lado 4 m. Sus alturas son 1 m, 2m y 6 m.

PIRÁMIDES

Una pirámide es un poliedro formado por una base poligonal y caras laterales triangulares que confluyen a un punto común llamado vértice.
Un caso particular de pirámide es el tetraedro, un poliedro regular formado por 4 triángulos equiláteros.

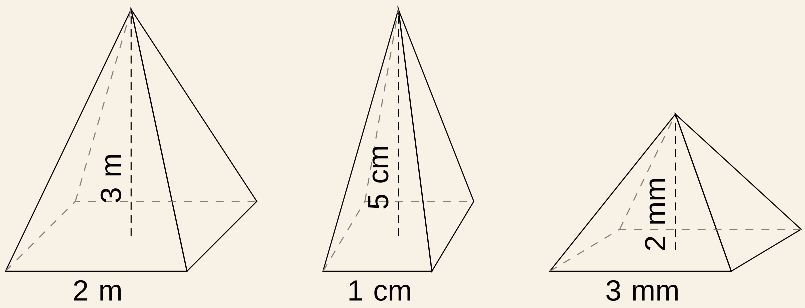


El área de una pirámide es la suma del área de su base y sus caras laterales.
El volumen de una pirámide es la tercera parte del producto del área de la base y la altura.

$$V = \frac{A_{base}\ \text{altura}}{3}$$

Debemos observar que la altura de la pirámide y su generatriz (altura de una de sus caras laterales) se pueden relacionar mediante el teorema de Pitágoras, por lo que es habitual que los problemas nos faciliten solo uno de los dos datos.

16. Calcula el área y el volumen de las siguientes pirámides de base cuadrada:



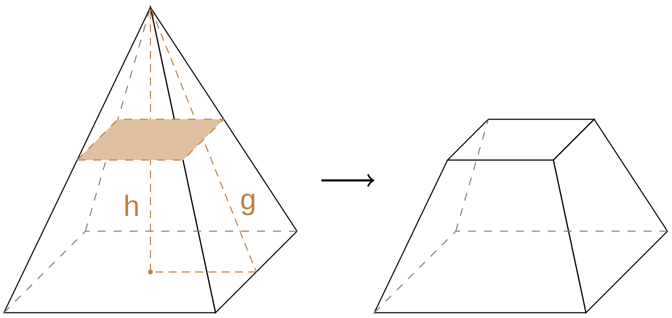
17. Calcula el área y el volumen de una pirámide triangular en la que las aristas de la base miden 2 mm y la altura es 12 mm.

18. Calcula el área y el volumen de una pirámide cuadrangular de altura 6 cm y cuya base tiene 16 cm de arista.

19. Calcula el área y el volumen de una pirámide hexagonal en la que la arista de la base mide 3 cm y la arista lateral 5 cm.

20. La Gran Pirámide de Giza se asienta sobre una base de 52900 m^2 y tiene una altura de 140 metros. Utiliza tus conocimientos de semejanza para calcular el volumen de maquetas de la pirámide realizadas en las siguientes escalas:

a) 1:20 b) 1:100 c) 1:1000



Para obtener una pirámide truncada o tronco de pirámide también la cortaremos con un plano. En esta ocasión escogeremos uno paralelo a la base para que la gura resultante sea más sencilla, de modo que obtendremos un tronco con dos bases paralelas.

En este caso, el fragmento eliminado es también una pirámide y además es semejante a la original.

21. Hemos partido una pirámide de 10 metros de altura y base cuadrada de 3 metros de arista, justo a la mitad de su altura, obteniendo un tronco de pirámide de 5 metros de altura.

    a) Utiliza un razonamiento de semejanza para hallar las dimensiones de la base superior. Calcula el área de ambas bases.

    b) Halla la generatriz de la pirámide original, y utiliza un razonamiento de semejanza para deducir el segmento de la misma que pertenece al tronco.
    Calcula el área lateral del tronco de pirámide.

    c) Calcula el área y el volumen del tronco de pirámide.

22. Tenemos un tronco de pirámide cuya base mayor tiene un área de $900\ cm^2$, cuya base menor tiene un área de $25\ cm^2$ y cuya altura es de 12 cm.

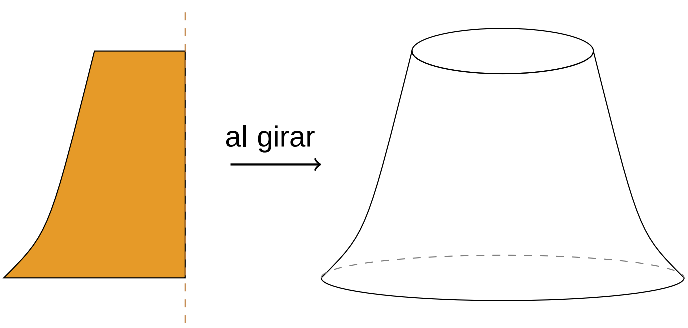
    a) Deduce la razón de semejanza entre la pirámide completa y el trozo eliminado.

    b) Utiliza la razón de semejanza para conocer la altura que tendría la pirámide completa.

    c) Calcula el volumen del tronco de pirámide.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

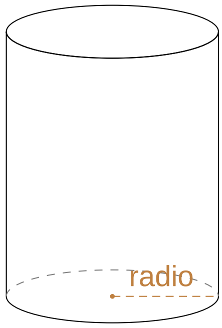
Los cuerpos que vamos a estudiar a continuación se llaman sólidos de revolución , es decir, son guras no poliédricas que se obtienen a partir de una gura plana que gira sobre un eje.



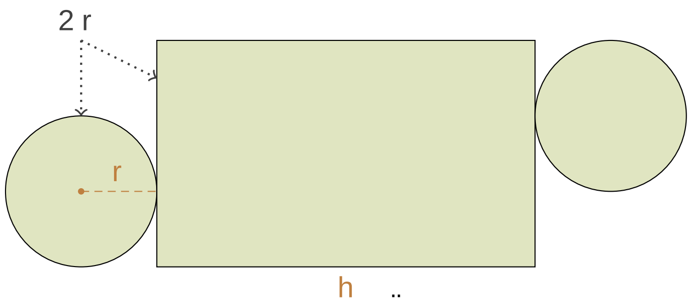
Algunas de estas guras tienen un desarrollo plano que consta de guras circulares y poligonales sencillas, lo que permite nos permite conocer sus áreas.
Sus volúmenes, por otro lado, son análogos a los de los poliedros que hemos estudiado.

CILINDROS

Un cilindro es una gura formada por dos bases circulares unidas entre sí por una super cie curva.



Dado que las bases son círculos, el área de la base se calcula simplemente con la fórmula del área de un círculo.
En el desarrollo plano del cilindro vemos que la super cie que une ambas bases equivale a un rectángulo cuya longitud es la misma que la circunferencia (2 r) y cuya altura es la altura del cilindro (h).

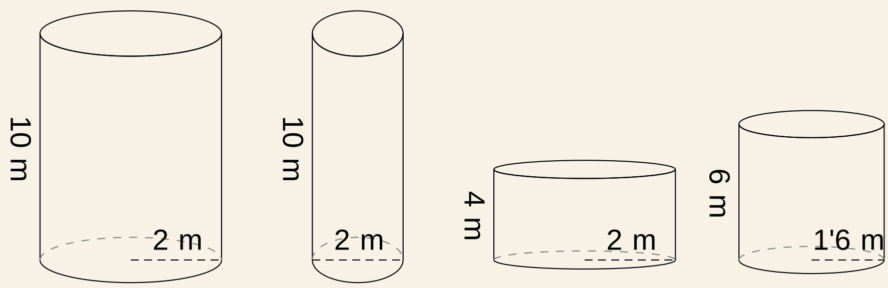


$A = 2 \ \ A_{base} + A_{lateral}$! $A_{base} = \ r^2$
$A_{lateral} = 2 \ r \ \ h$

El volumen de un cilindro se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

$$V = A_{base} \ \ altura$$

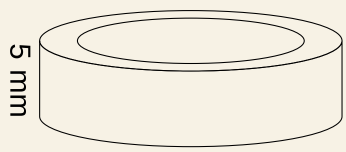
23. Calcula el área y el volumen de los siguientes cilindros:

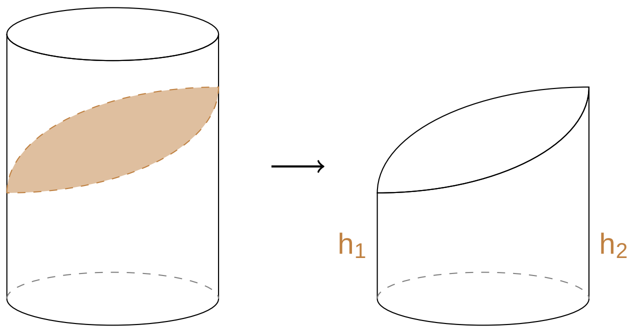


24. Una lata de refresco mide 10 centímetros de altura, y tiene una base circular de diámetro 6'5 centímetros.

 a) ¾Cuántos cm^2 de aluminio son necesarios para su fabricación?
 b) Calcula el volumen de refresco que puede albergar y exprésalo en mililitros.

25. Un anillo de 5 mm tiene un diámetro interior de 16'6 mm y un diámetro exterior de 17 mm. ¾Qué cantidad de oro fundido es necesario para fabricarlo?





Si cortamos un cilindro con un plano no paralelo a las bases, obtenemos dos cilindros truncados o troncos de cilindro .

El volumen de un tronco de cilindro es el producto del área de la base por la media aritmética de la mayor y la menor altura a la que el cilindro ha sido cortado.

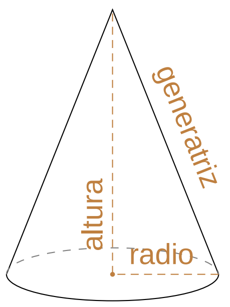
$$V = A_{base} \frac{h_1 + h_2}{2}$$

26. Calcula el volumen de los siguientes troncos de cilindro:

   a) El radio de su base es 3 m, su altura mínima es 1 m y su altura máxima es 2 m.
   b) El radio de su base es 2 m, su altura mínima es 1 m y su altura máxima es 3 m.
   c) El radio de su base es 15 cm, su altura mínima es 8 cm y su altura máxima es 10 cm.

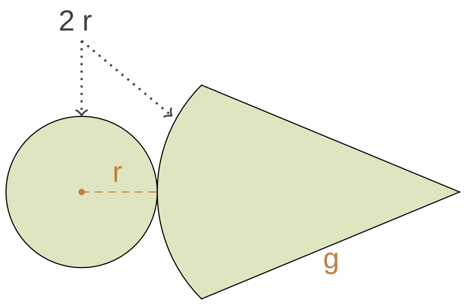
CONOS

Un cono es una gura formada por una base circular y una super cie curva que la une con su vértice.



Dado que la base es una gura conocida, el cálculo del área de la base no entraña ninguna di cultad.

En el desarrollo plano del cono vemos que el lateral es un sector circular de radio la genetratriz g, cuyo arco coincide con la longitud de la circunferencia de la base.
Es decir, la circunferencia completa hubiese medido 2 g pero tenemos un trozo de solo 2 r , así que trata de una proporción $\frac{2 r}{2 g}$ de un círculo de radio g.



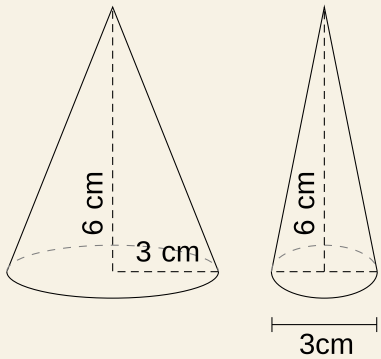
$$A = A_{base} + A_{lateral} \rightarrow \begin{cases} A_{base} = r^2 \\ A_{lateral} = \frac{2 r}{2 g} g^2 = rg \end{cases}$$

El volumen de un cono es la tercera parte del producto del área de la base y la altura.

$$V = \frac{A_{base}\ \text{altura}}{3}$$

Al igual que ocurría en la pirámide, la altura del cono y su generatriz se pueden relacionar mediante el teorema de Pitágoras, por lo que es habitual que los problemas nos faciliten solo uno de los dos datos.

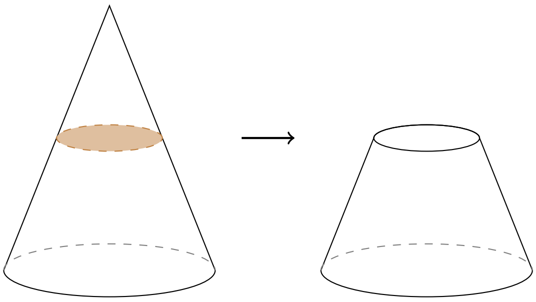
27. Calcula el área y el volumen de los siguientes conos:



28. Calcula el área y el volumen de un cono de altura 5 metros y cuya base tiene radio 2 metros.

29. Calcula el área y el volumen de un cono de altura 5 metros y cuya base tiene diámetro 2 metros.

CONO TRUNCADO



Para obtener un cono truncado o tronco de cono también lo cortaremos con un plano paralelo a la base para que la gura resultante sea más sencilla, de modo que obtendremos un tronco con dos bases paralelas.

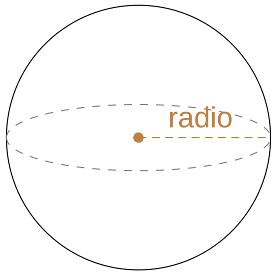
En este caso, el fragmento eliminado es también un cono y además es semejante al original.

30. Hemos partido un cono de 10 metros de altura y 3 metros de radio, justo a la mitad de su altura, obteniendo un tronco de cono de 5 metros de altura.
    a) Calcula el área de ambas bases.
    b) Calcula el volumen del tronco de pirámide.

31. Tenemos un tronco de cono cuya base mayor tiene un área de 144 cm^2, cuya base menor tiene un área de 16 cm^2 y cuya altura es de 12 cm.
    a) ¾Qué altura tendría el cono completo?
    b) Calcula el volumen del tronco de pirámide.

ESFERAS

Una esfera es una super cie curva cuyos puntos equidistan de otro llamado centro. El área de la esfera se calcula mediante la fórmula:



$$A = 4\ r^{2}$$

El volumen de la esfera se calcula mediante la fórmula:

$$V = \frac{4\ r^{3}}{3}$$

32. Calcula el área y el volumen de una esfera de radio 2 metros.

33. Calcula el área y el volumen de una esfera de diámetro 2 metros.

34. Calcula el área y el volumen de una esfera de radio 6 metros.

35. Calcula el área y el volumen de una esfera de radio 12 metros.

36. En una heladería me han ofrecido un helado en cucurucho. He medido el cono desde la punta hasta el borde de la circunferencia, y son 10 cm. También he medido el diámetro de la circunferencia, y son 4 cm.

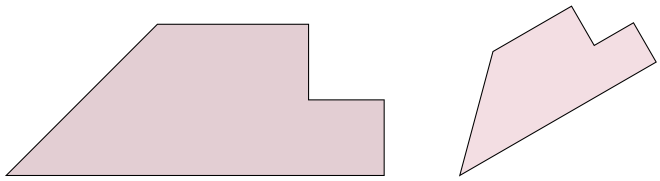
    a) ¾Qué volumen de helado cabe en el cono?

    b) Además de llenar todo el cucurucho con helado, asoma sobre el borde media esfera adicional. ¾Qué volumen de helado hay en esa semiesfera?

    c) Entonces, ¾cuántos mililitros de helado me han ofrecido en total?

SEMEJANZA

Dos guras son semejantes cuando tienen la misma forma, aunque tengan distinto tamaño o estén colocadas en otra posición.



RAZÓN ENTRE LONGITUDES

Las guras poligonales con el mismo número de lados son semejantes si:

- Sus ángulos son iguales.
- Sus lados son proporcionales.

1. Un cuadrado cuyo lado mide 2 metros y otro cuyo lado mide 3 centímetros, ¾son semejantes?
2. Un triángulo equilátero cuyo lado mide 3 centímetros y otro cuyo lado mide 2 kilómetros, ¾son semejantes?
3. Un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5 cm, y un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 5cm y 6 cm, ¾son semejantes?
4. Un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5cm, y otro triángulo rectángulo cuyos lados miden 1'5 cm, 2 cm y 2'5 cm, ¾son semejantes?
5. Un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5cm, y otro triángulo rectángulo cuyos lados miden 5 cm, 12 cm y 13 cm, ¾son semejantes?
6. ¾Es posible que al reducir con una fotocopiadora un triángulo cuyos lados miden 9, 18 y 12 cm resulte un triángulo de lados 4, 8 y 6 cm?

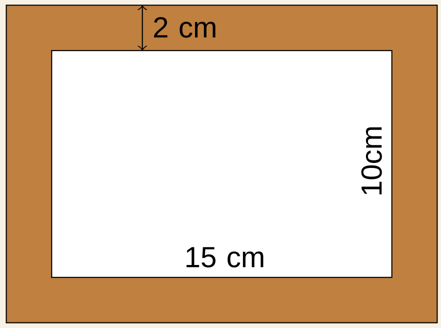
La razón de semejanza   es la constante de proporcionalidad entre dos guras semejantes, es decir, el número por el que hemos de multiplicar todas las longitudes de los segmentos de una de las guras para obtener las longitudes de los segmentos de la otra.

7. Dibuja un rectángulo cuya base mida 5 unidades y cuya altura mida 2 unidades.
   Dibuja también otro rectángulo semejante con razón de semejanza 2, es decir, que mida el doble.
8. Dibuja un rectángulo cuya base mida 2 unidades y cuya altura mida 1 unidad, y otro cuya base mida 6 unidades y cuya altura mida 3 unidades. ¾Cuál es la razón de semejanza entre ellos?
9. Dibuja un triangulo isósceles cuya base mida 3 cuadrículas y cuya altura mida 2 cuadrículas.
   Dibuja también otro triángulo semejante con razón de semejanza 2'5.

10. ¾Cuál es la razón de semejanza entre u hexágono regular cuyo lado mide 2 cm y otro de lado 1'5 cm?

11. Dibuja un cuadrado de lado 2 unidades y otro cuadrado de lado 3 unidades. ¾Cuál es la razón de semejanza entre ellos?

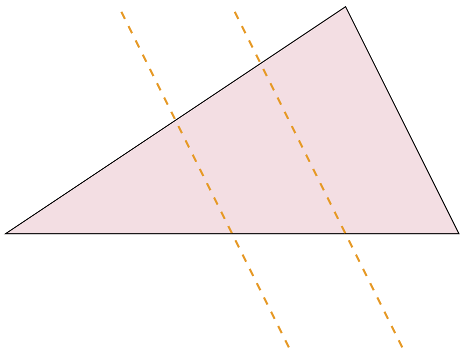
12. Una fotografía con una anchura de 15 cm y una altura de 10 cm se coloca en un marco de 2 cm de ancho. ¾Son la fotografía y el rectángulo exterior del marco semejantes?



13. Colocamos un marco en una fotografía con una anchura de 15 cm y una altura de 10 cm.

    a) ¾Hay algún marco que sea semejante a la foto? En caso a rmativo, ¾qué grosor debe tener?
    b) ¾Y si el grosor de los segmentos verticales fuese distinto al de los segmentos horizontales?

Teorema de Tales

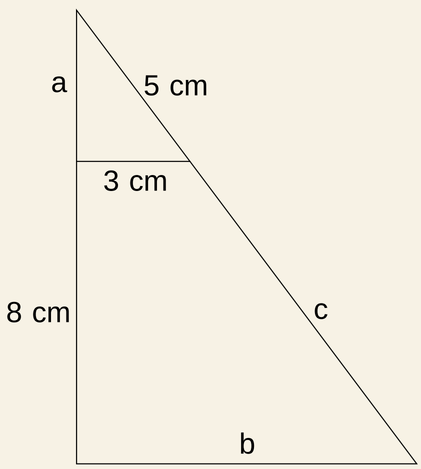


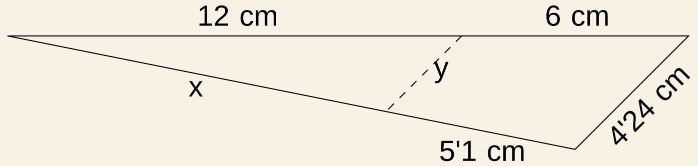
Teorema primero

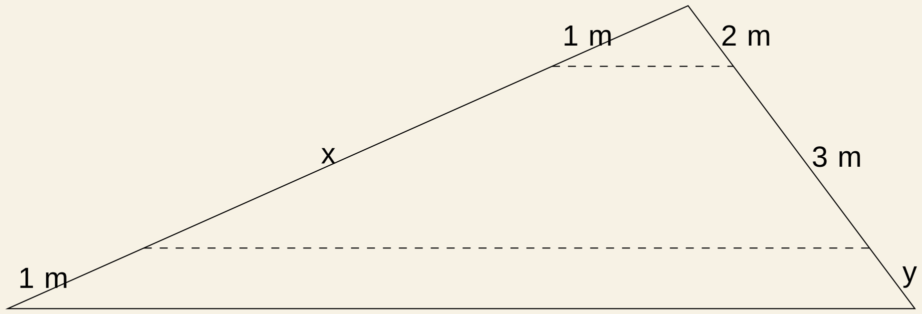
Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

Tales de Mileto

14. Halla los valores desconocidos de las siguientes guras:

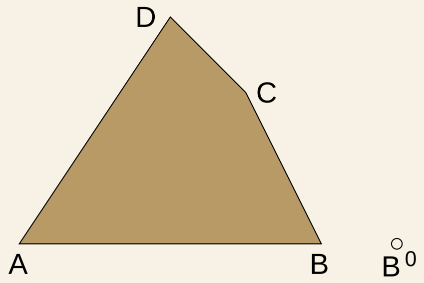






15. Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 cm y 6 cm. Une los puntos medios de los catetos. a) El triángulo que obtienes, ¾es semejante al 1º? b) El trozo restante, ¾qué gura es?

16. Observa el polígono irregular que une los puntos $A = (0;0)$, $B = (4;0)$, $C = (3;2)$ y $D = (2;3)$ y dibújalo en tu cuaderno tomando la cuadrícula como referencia.
Dibuja una gura semejante que pase por el punto $B^0 = (5;0)$.



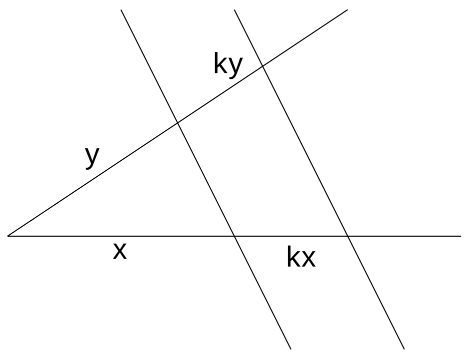
Una consecuencia directa de este teorema es que dos rectas paralelas que corten a rectas secantes dan lugar a segmentos proporcionales.

En la práctica, eso quiere decir que hay una razón de proporcionalidad para dividir los segmentos de un mismo lado entre sí:

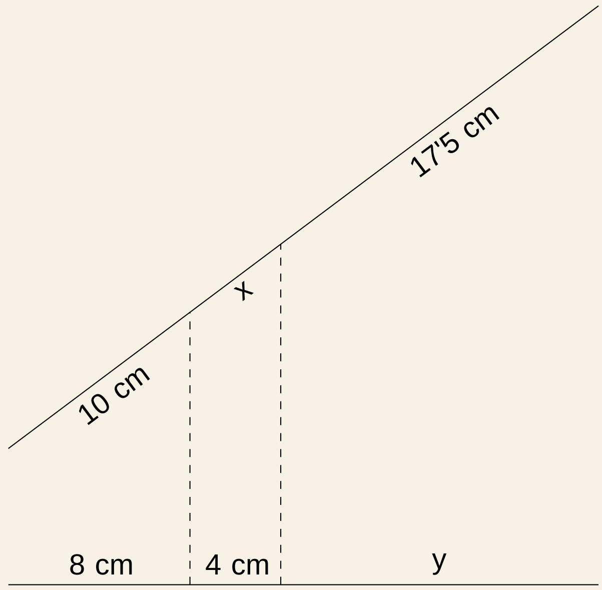
$$\frac{kx}{x} = k = \frac{ky}{y}$$

Y además también hay una razón de proporcionalidad para dividir los segmentos de un lado entre los del otro:

$$\frac{ky}{kx} = \frac{y}{x}$$



17. Halla la longitud de los segmentos indicados:



18. Dibuja un triángulo rectángulo de catetos 15 y 8 unidades de longitud.
Si se unen los puntos medios de dichos catetos, ¾resulta un triángulo semejante a él?

19. Dibuja un segmento de 5 cm de longitud iguales y divídelo en 3 partes iguales.
Para ello dibuja otro segmento que mida tres unidades (puedes ayudarte con un compás) y divide en triángulos semejantes aplicando el teorema de Tales.

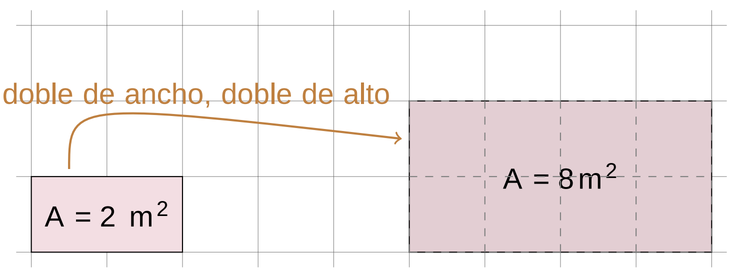
20. Divide un segmento de 7 cm de longitud en 4 partes iguales.

21. Divide un segmento de 4 cm de modo que una de ellas sea el doble de la otra.

22. Divide un segmento de 10 cm de longitud en tres partes proporcionales a 1, 2 y 3.

Razón entre áreas

La razón entre las áreas de dos guras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza.



Por ejemplo, si tenemos una gura cuya altura y se multiplica por 2 entonces el área se multiplica por $2^2 = 4$.

23. a) Halla el área de un cuadrado cuyo lado mide 1 cm.

b) Utiliza semejanza para hallar el área de cuadrados cuyo lado mida:

- 3 cm
- 6 cm
- 0'5 cm
- 0'25 m

24. a) Halla el área de un rectángulo cuya base mide 3 cm y cuya altura mide 2 cm.

b) Halla el área de un rectángulo cuyos lados miden el triple que el anterior.

25. a) Halla el área de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm y cuya altura mide 4 cm, aplicando el teorema de Pitágoras.

b) Halla el área de un triángulo rectángulo cuyos lados miden la tercera parte que el anterior.

26. Tenemos un rectángulo cuya área es 50 m^2. ¾Cuál será el área de un rectángulo semejante cuyos lados midan la quinta parte?

27. Partimos de un círculo cuya área es 20 m^2 y construimos otro con un radio un 50 % mayor. ¾Cuál es su área?

28. Tenemos dos polígonos irregulares semejantes. Uno de ellos tiene un área de 100 cm^2 y el otro de 200 cm^2. ¾Cuál es su razón de semejanza?

29. Dibuja un cuadrado cuyo lado mide 1 mm, otro cuyo lado mide 1 cm y otro cuyo lado mide 1 dm. ¾Cuál es la relación entre sus áreas?

30. Halla la relación entre:

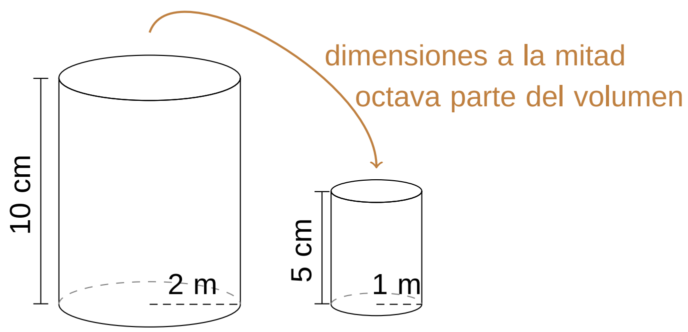
a) km^2 y m^2 c) cm^2 y mm^2 e) km^2 y hm^2 g) km^2 y cm^2

b) m^2 y cm^2 d) m^2 y mm^2 f) km^2 y dm^2 h) km^2 y mm^2

31. Teniendo en cuenta que una hectárea (ha) es equivalente a un hectómetro cuadrado (hm^2), ¾a cuántos metros cuadrados equivale un área?

Razón entre volúmenes

El volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura.
La razón entre los volúmenes de dos poliedros semejantes es el cubo de la razón de semejanza.



32. a) Halla el volumen de un cubo cuya arista mide 1 cm.
 b) Utiliza semejanza para hallar el volumen de cubos arista mida:

- 3 cm
- 6 cm
- 0'5 cm
- 0'25 m

33. Tenemos una esfera cuyo volumen es $2\,000 \text{ mm}^3$
¾Cuál será el volumen de otra esfera cuyo radio mida la cuarta parte?

34. Halla la relación entre:

a) km^3 y m^3 b) m^3 y cm^3 c) cm^3 y mm^3 d) m^3 y mm^3

35. Teniendo en cuenta que un litro equivale a un decímetro cúbico, halla la relación entre:

a) m^3 y l b) km^3 y l c) l y cm^3 d) cl y mm^3

Problemas

36. La ampliación de una fotografía al 150 % mide 195 milímetros de alto y 255 de ancho. ¾Cuánto medía la fotografía original?

37. En el jardín tenemos una manguera con un diámetro de 3 cm, pero queremos comprar otra que eche el doble de agua. ¾Qué radio debe tener?

38. Una escultura de 1 metro de altura pesa 27 kg. ¾Cuánto pesará una copia, elaborada con el mismo material, cuya altura sea 25 cm?

ESCALAS

Un **mapa** es una representación grá ca de una zona geográ ca.

Un **plano** es una representación grá ca de otro tipo de elementos, como pueden ser una vivienda o las calles de una ciudad.

Plano extraído de arqhys.com

Mapa de Galicia en Google Maps

Una maqueta es la representación en tres dimensiones de cualquier objeto, típicamente reducida con respecto al original.

Maqueta de Aedes Ars

La escala de un mapa, plano o maqueta es la razón de semejanza entre la representación y la realidad.
La escala numérica tiene un formato especí- co, en el que se indica que por cada unidad en la representación la medida real tiene un cierto número de unidades.

1 : 10

Escala 1 : 250 000		
1 mm	!	250 000 mm = 250 m
4 mm	!	1 000 000 mm = 1km
1 cm	!	250 000 cm = 2'5 km
0'1 m	!	25 000 m = 25 km

La escala es una razón, por lo tanto no se re ere a ninguna unidad.
Las medidas son las que sí deben indicar unidad.

Los problemas de escalas pueden resolverse de un modo sencillo utilizando una regla de tres, relacionando la representación con la realidad.

Conocida la escala y la medida en el mapa:

Mapa	Realidad
1	160 000
2'3 cm	x cm

Conocida la escala y la medida en la realidad:

Mapa	Realidad
1	160 000
x km	20 km

Para averiguar la escala, conociendo ambas medidas:

Mapa	Realidad
1	x
2 cm	250 cm

39. Tenemos un mapa a escala 1:50 000.
    a) La distancia entre dos pueblos en el mapa es de 11 cm. ¾Cuál es la distancia real?
    b) La distancia real entre otros dos pueblos es de 3'75 km. ¾A qué distancia estarán en el mapa?

40. La distancia entre Madrid y Burgos es 243 km.
    Si en el mapa la distancia entre ambas ciudades es 8'1 cm, ¾a qué escala está dibujado?

41. Se ha construido el plano de una habitación cuyas dimensiones son 9 m de largo y 6 m de ancho. En el plano, el largo de la habitación es 12 cm.

   a) ¾A qué escala está dibujado el plano?

   b) ¾Cuál es el ancho de la habitación en el plano?

42. Si un barco mide 21 metros y su maqueta mide 70 centímetros, ¾a qué escala se realizó la maqueta?

43. La torre de Hércules en A Coruña, tiene una altura total de 55 metros.
Si queremos realizar una maqueta de la misma a escala 1:110, ¾qué altura tendrá dicha maqueta?

44. Si una mosca tiene una longitud de 9 mm y su maqueta mide 18 cm, ¾a qué escala se realizó la maqueta?

45. Un mapa de España está construido a escala 1:2500000.
¾A cuántos kilómetros se encuentran dos ciudades que en el mapa están separadas 10 cm?

46. En un mapa de América del Sur construido a escala 1:84 000 000 la mayor distancia Este-Oeste corresponde a dos puntos situados a 60 mm, y la mayor distancia Norte-Sur corresponde a 100 mm aproximadamente. ¾Cuántos kilómetros representan estas distancias?

47. Ordena las siguientes escalas de mayor a menor:

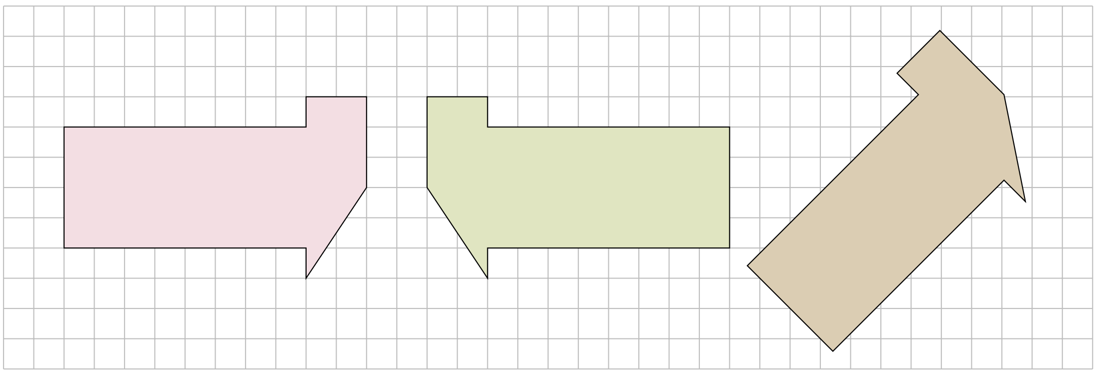
1:45 1:20 1:65 3:1 1:30 1:1 1:18 5:1

48. Dibuja un plano a escala 1:100 de tu dormitorio.
Indica dónde están puertas, ventanas y mobiliario con símbolos adecuados.

Movimientos en el plano

Vamos a estudiar un tipo concreto de guras semejantes: aquellas que además de tener sus ángulos iguales tienen también sus lados iguales.

Estas guras se obtienen a partir de movimientos, es decir, arrastrando la gura a otro lugar, girándola y/o re ejándola.

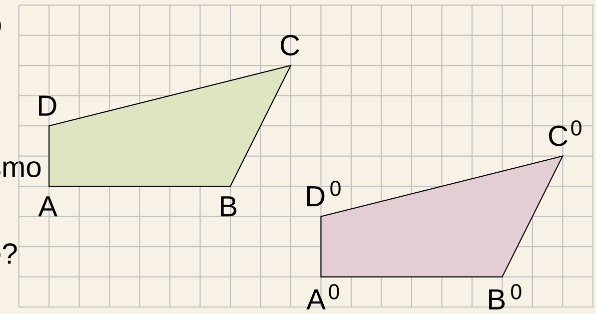


Llamamos traslación al movimiento de una gurqa de un lugar a otro. La nueva gura es exactamente igual, solo que colocada en otro lugar.

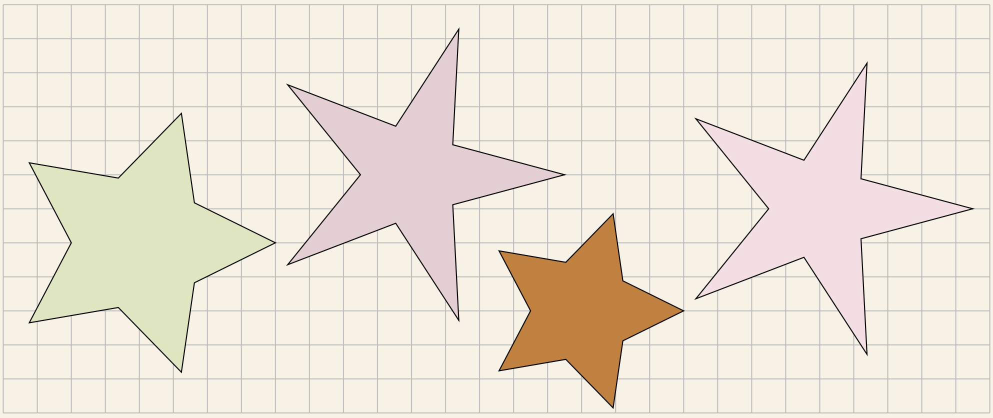
49. a) ¾Cuánto tenemos que mover el punto A para llevarlo al punto A^0?

b) ¾Y el punto B para moverlo a B^0?

c) ¾Tendrá que ser exactamente el mismo movimiento para mover C a C^0 y D a D^0, o podríamos aplicar un vector diferente?



50. Observa las siguientes estrellas de cinco puntas.
¾Hay alguna traslación que nos permita mover una estrella hasta otra? ¾Cuál?



51. Dibuja un polígono irregular con vértices $A = (3;1)$, $B = (\ 2; \ 1)$, $C = (\ 4; 2)$, $D = \ (1; 5)$ y $E = (0; 3)$. Trasládalo según el vector $u = (\ 1; \ 4)$.

52. a) ¾Que ocurrirá si traslado una gura según una traslación de vector $(4; 3)$ y luego otra de vector $(2; \ 1)$?

b) ¾Y si traslado primero según una traslación de vector $(4; 3)$ y luego otra de $(\ 4; \ 3)$?

53. ¾Qué movimiento es el inverso de una traslación de vector $(a; b)$?

54. Imaginemos que tenemos una colección innita de puntos $(n; 0)$, siendo n cualquier número entero. ¾Qué ocurrirá si le aplico las siguientes traslaciones?

a) de vector $(3; 0)$ b) de vector $(\ 1; 2)$ c) de vector $(75; 2)$

55. Considera la recta $y = 3x + 5$. ¾Qué recta obtengo si aplico las siguientes traslaciones?

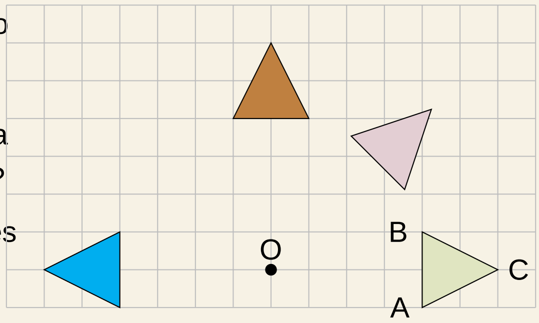
a) de vector $(3; 0)$ b) de vector $(0; 2)$ c) de vector $(1; 3)$

56. ¾Qué traslaciones deja a una recta $y = ax + b$ invariante?

GIROS

Llamamos giro o rotación al movimiento de una gura alrededor de un punto y con una amplitud determinada por un ángulo.

57. El triángulo verde de la imagen ha sido rotado con respecto al punto O.



a) ¾De qué ángulo ha sido el giro para obtener cada uno de los otros triángulos?

b) ¾A qué puntos corresponden los vértices A, B y C en cada uno de los triángulos girados?

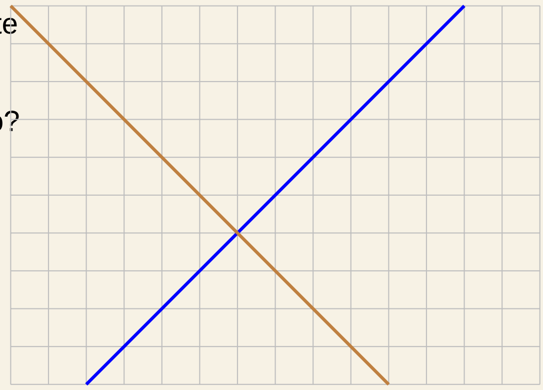
58. a) ¾Qué ocurrirá si giro una gura 45º y luego otros 30º?

b) ¾Qué ocurrirá si giro una gura 220º y luego 140º?

59. a) ¾Qué punto permanece invariante en este giro de una recta para obtener la otra?

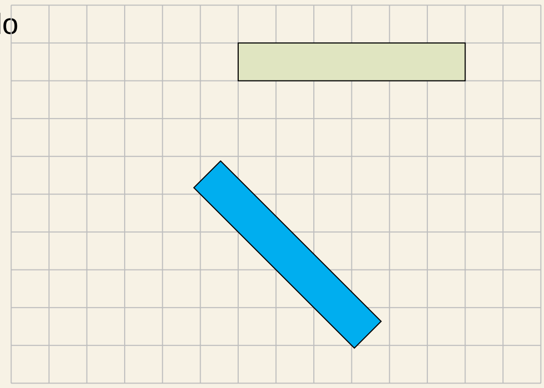
b) ¾Con respecto a que punto hemos girado?

c) ¾Cuál es el ángulo de giro?



60. a) ¾Con respecto a que punto hemos girado una gura para obtener la otra?

b) ¾Cuál es el ángulo de giro?

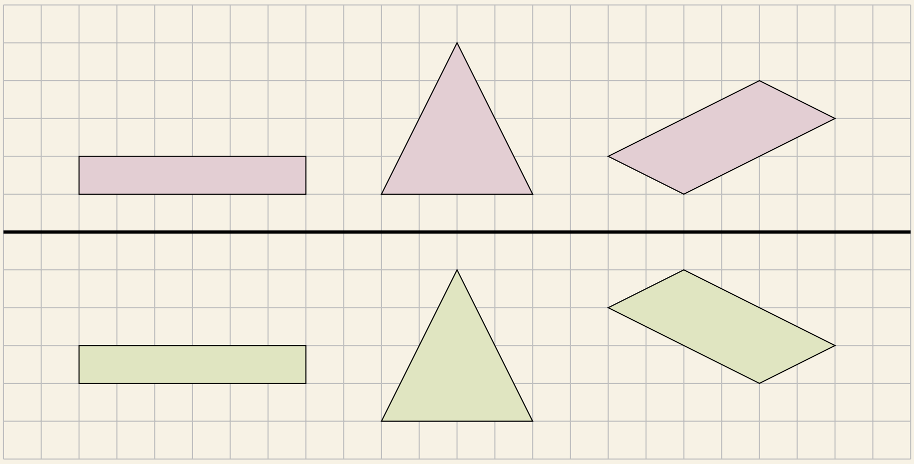


61. a) ¾Qué movimiento es el inverso de un giro de centro O y ángulo ?

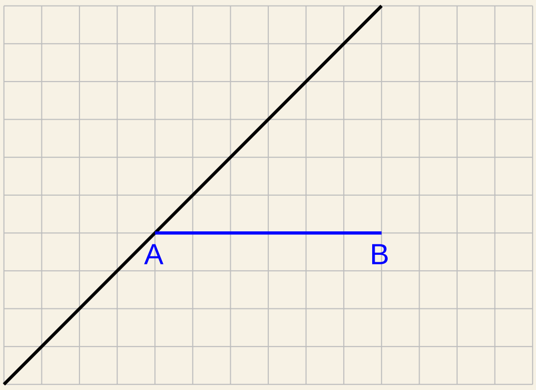
b) ¾Qué punto permanece invariante en ese giro?

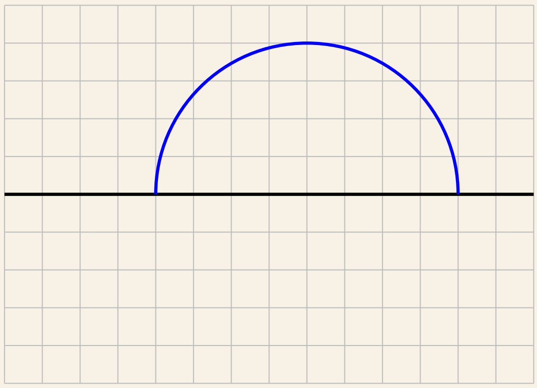
Llamamos simetría axial o re exión al movimiento de una gura que produce un re ejo de la misma con respecto al eje de simetría dado.

62. ¾Cuáles de las siguientes guras están re ejadas con respecto al eje horizontal dibujado?



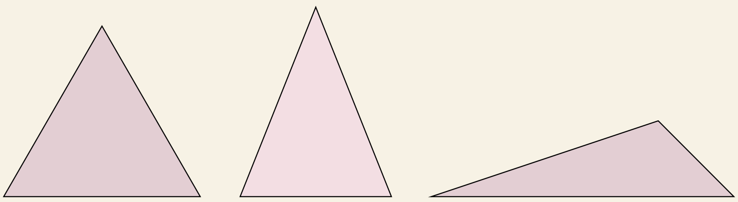
63. Dibuja el simétrico de las guras representadas respecto a los respectivos ejes, y describe la gura resultante.



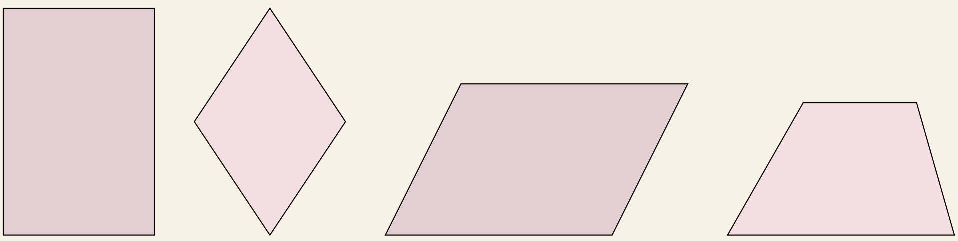


64. Observa las siguientes guras y halla todos los posibles ejes de simetría que tienen.

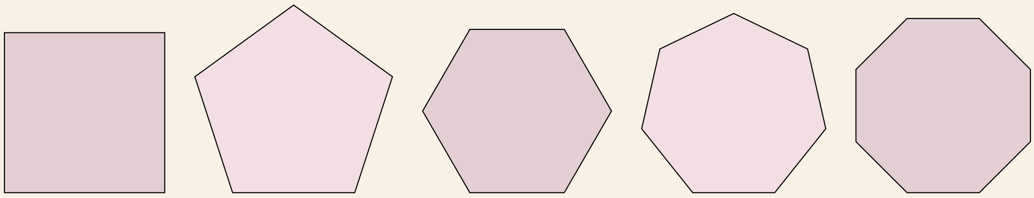
a) Triángulos:



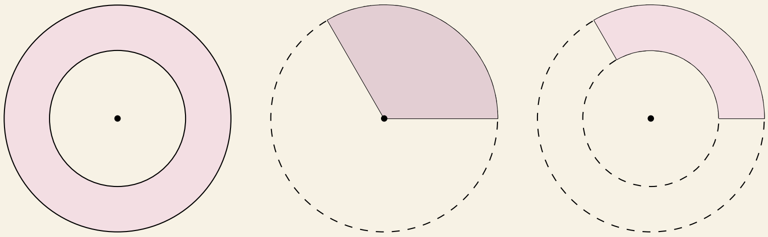
b) Cuadriláteros:



c) Polígonos regulares:



d) Figuras circulares:



Combinación de movimientos

Las traslaciones, giros y simetrías son movimientos elementales. Si combinamos varios de ellos obtenemos un nuevo movimiento más complejo.

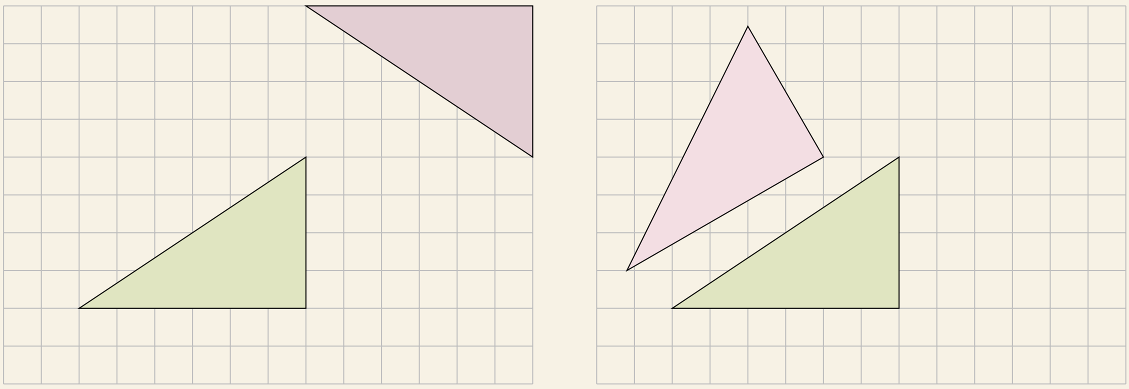
65. Dibuja un polígono irregular cuyos vértices son los puntos $A = (0\,;0)$, $B = (3\,;0)$, $C = (2\,;1)$ y $D = (2\,;2)$. Apunta las nuevas coordenadas de los vértices tras cada uno de estos movimientos:

    a) Trasládalo según el vector $\vec{u} = (4\,;1)$

    b) Después gíralo con respecto al origen $O = (0\,;0)$ un ángulo de 90°.

    c) Finalmente re éjalo con respecto al eje de coordinadas vertical.

66. ¾Qué movimientos necesitas combinar para obtener una gura a partir de la otra? (La rejilla puede necesitar ser más amplia que la que aparece aquí dibujada.)



Estadística

La estadística nos facilita herramientas para realizar suposiciones fundamentadas sobre un grupo grande de individuos observando solo unos pocos.

- Llamamos población al conjunto de todos los individuos sobre los que se realiza el estudio estadístico. Para conocer las características de la población completa es necesario realizar un censo .
- Llamamos muestra a un subconjunto de la población en el que se recogen los datos del estudio, a partir de los cuales se pretende deducir características de toda la población.

1. Indica cúal es la población y cuál la muestra:
   a) Se va a realizar un estudio estadístico para decidir si conviene construír un nuevo polideportivo en una ciudad de 426 873 habitantes. Como preguntar a todas las personas es muy costoso, solo se preguntará a 1 258 habitantes de diferentes barrios.
   b) En un gimnasio deciden preguntar a sus 200 socios sus propuestas para actividades.
   c) Para hacer un estudio sobre los gustos musicales de los alumnos de 12 años de una ciudad, se ha escogido a 125 niños de esa edad.
2. En un estudio sobre la duración de las bombillas que fabrica una empresa, ¾crees conveniente estudiar toda la población? ¾Por qué?

Tipos de variables

La variable estadística es la característica estudiada.

- Variable cualitativa es la que expresa una cualidad, que no se puede cuanti car.
- Variable cuantitativa es la que se expresa numéricamente.

3. Indica cuáles de las siguientes variables son cuantitativas y cuales son cualitativas:
   a) Comida favorita.
   b) Profesión que te gusta.
   c) Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada.
   d) Número de alumnos de tu instituto.
   e) El color de los ojos de tus compañeros de clase.
   f) Cociente intelectual de los miembros de tu familia.
4. Da tres ejemplos de variables cualitativas y tres de variables cuantitativas.

Las variables cuantitativas, a su vez, se pueden clasi car en dos tipos:

- discreta   si solo puede tomar valores aislados.
  Por ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ...
- continua   si puede tomar valores dentro de un intervalo.
  Por ejemplo: todos los números decimales entre 0 y 1.

Una variable continua no puede ser medida con exactitud pues el valor observado depende de la precisión de los instrumentos de medición.
Ese hecho no debe llevarnos a confundirla con una variable discreta.

5. Indica cuáles de las siguientes variables cuantitativas son discretas y cuales son continuas:

   a) Número de manzanas vendidas cada día en una frutería.
   b) Temperaturas registradas cada hora en un observatorio.
   c) Período de duración de un automóvil.
   d) El diámetro de las ruedas de varios coches.
   e) Número de hijos de 50 familias.
   f) Censo anual de los españoles.

6. Indica cuáles de las siguientes variables son cualitativas, cuáles son cuantitativas discretas y cuáles cuantitativas continuas.

   a) El número de hijos de una familia.
   b) Número de personas que llegan a un consultorio en una hora.
   c) El número de árboles que hay en un parque.
   d) El número de canales de televisión que tienes en casa.
   e) Cantidad de empleados que trabajan en una tienda.
   f) Número de libros vendidos cada mes en Amazon.
   g) Número de clientes que visitan un supermercado por día.
   h) El color favorito de cada persona.
   i) El peso de una persona.
   j) La velocidad a la que va a un tren.
   k) Longitud en centímetros de un tenedor.
   l) La cantidad de dedos que tienes en la mano.
   m) El número de faltas en un partido de fútbol.
   n) El volumen de cerveza en una jarra.
   ñ) La nacionalidad de los jugadores de un equipo.
   o) Peso de las vacas en una granja.
   p) Tiempo que esperas al amor de tu vida.

q) Distancia que recorren los autos en una ciudad.

r) Red social más utilizada por cada persona.

s) Número de animales en una granja.

t) El diámetro de una esfera.

u) La estatura de tu mejor amigo.

v) El ancho de una pelota de fútbol.

w) Volumen de agua en una piscina.

x) Tiempo que demora el repartidor de una pizzería en entregar un pedido.

y) Velocidad a la que viaja un avión.

z) Modelo de coche más vendido de un concesionario.

TABLAS DE FRECUENCIAS

En un estudio estadístico, tras recoger los datos se cuentan y se agrupan.
En una tabla de frecuencias se representan ordenados los valores que toma la variable estadística (x_i) con las distintas frecuencias asociadas:

- frecuencia absoluta (n_i): número de veces que aparece x_i en el recuento.
- frecuencia relativa (f_i): proporción de veces que aparece x_i en el recuento. Puede expresarse como fracción $\frac{n_i}{n}$, donde n es el total de datos, o bien como porcentaje.
- frecuencia absoluta acumulada (N_i): es la suma de las frecuencias absolutas de valores menores o iguales que x_i.
- frecuencia relativa acumulada (F_i): es la suma de las frecuencias relativas de valores menores o iguales que x_i.
  Puede expresarse como fracción o bien como porcentaje.

Preguntamos a una serie de personas de cuántos automóviles dispone su familia:

1 0 1 1 2 2 1 1 2 1 1 1 3 0 2 2 1 1 2 2

Y creamos una tabla de frecuencias:

recuento de casos

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	2	$\frac{2}{20} = 0'1 = 10\,\%$	2	$\frac{2}{20} = 10\,\%$
1	10	$\frac{10}{20} = 0'5 = 50\,\%$	2 + 10 = 12	$\frac{12}{20} = 60\,\%$
2	7	$\frac{7}{20} = 0'35 = 35\,\%$	12 + 7 = 19	$\frac{19}{20} = 95\,\%$
3	1	$\frac{1}{20} = 0'05 = 5\,\%$	19 + 1 = 20	$\frac{20}{20} = 100\,\%$
Total	20	1 = 100 %		

comprobamos los totales

vamos añadiendo valores de la columna n_i

7. Durante el mes de junio, en una ciudad se han registrado las siguientes temperaturas máximas. Elabora con ellas una tabla de frecuencias.

32	31	28	29	33	32	31	30	31	31
27	28	29	30	32	31	31	30	30	29
29	30	30	31	30	31	34	33	33	29

8. Se le pidió a un grupo de personas que indiquen su color favorito. Elabora con ellos una tabla de frecuencias.

negro	azul	amarillo	rojo	azul	azul	rojo	negro	amarillo	rojo
rojo	amarillo	amarillo	azul	rojo	negro	azul	rojo	negro	amarillo

9. Un dentista observa el número de caries en 100 niños y resume la información en la siguiente tabla. Complétala con los datos que faltan.

Nº caries	n_i	f_i
0	25	0.25
1	20	0.2
2		
3	15	0.15
4		0.05

10. En mi pueblo viven 1 100 familias. El 40 % de las familias tiene un solo hijo, el 35 % ninguno, el 11 % dos hijos y el resto más de dos.

    a) Calcula cuántas familias tienen ninguno, uno, dos o más hijos.

    b) Elabora una tabla de frecuencias con los datos obtenidos, y comprueba que los porcentajes coinciden con los del enunciado.

11. Hemos preguntado a un grupo de personas cuántas horas practicaban deporte a la semana. Elabora una tabla de frecuencias.

2	1	4	2	3	2	1	0	1	3
7	2	9	0	2	1	3	3	3	2
2	3	3	3	3	3	4	3	3	2

12. Realizamos un estudio para conocer el número de televisores que hay en cada vivienda en una determinada zona de la ciudad. Elabora una tabla de frecuencias.

1	1	2	2	2	2	0	0	4	3
2	3	4	3	4	1	1	1	2	0
3	4	2	2	4	4	2	1	4	1
1	1	2	2	2	2	1	1	1	2
2	1	1	3	3	1	1	2	2	1

Cuando trabajamos con variables cualitativas continuas solemos agrupar los valores en distintos intervalos, a los que llamaremos clases, y construir nuestra tabla de frecuencias de modo exactamente análogo.

La única diferencia que merece la pena notar es que al calcular parámetros podemos necesitar un valor numérico que represente al intervalo y para ello tomaremos la marca de clase, es decir, el valor central del intervalo.

Los alumnos de un centro, en rangos de edades.

clase	x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
[12 14)	13	148	$\frac{148}{350}$ 42 %	148	42 %
[14 16)	15	133	$\frac{135}{350}$ = 38 %	281	80 %
[16 18)	17	62	$\frac{62}{350}$ 18 %	343	98 %
[18 20)	19	7	$\frac{7}{350}$ = 2 %	350	100 %
Total		350	1 = 100 %		

13. Hemos preguntado a la salida de un supermercado cuanto se han gastado en la compra:

26'45 43'91 22'15 29'03 31'25 34'21 25'12 21'34 28'76 26'51

Agrupa los datos de 5 en 5 a partir de los 20 euros, y haz la tabla de frecuencias.

14. Se han medido los pesos de un grupo de recién nacidos, y los resultados en kilos han sido los siguientes:

3'2	3'1	2'8	2'9	3'3	3'2	3'1	3'0	3'1	3'1
3'7	3'8	2'9	3'0	3'2	3'1	3'1	3'0	3'0	3'4
3'9	3'0	3'5	3'6	3'8	3'3	3'4	3'3	3'3	3'7

Elabora una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos de 200 gramos.

15. Los datos que se dan a continuación corresponden a los pesos en kilos de ochenta personas:

60	66	77	70	66	68	57	70	66	52
75	65	69	71	58	66	67	74	61	63
69	80	59	66	70	67	78	75	64	71
81	62	64	69	68	72	83	56	65	74
67	54	65	65	69	61	67	73	57	62
67	68	63	67	71	68	76	61	62	63
76	61	67	67	64	72	64	73	79	58
67	71	68	59	69	70	66	62	63	66

a) Elabora una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos de 5 kg.

b) Calcula el porcentaje de personas de peso menor que 65 kg.

c) Calcula el porcentaje de personas de peso mayor o igual que 70 Kg pero menor que 85 kg.

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Para presentar de modo visual los datos estadístico podemos apoyarnos en distintos tipos de grá cos:

- Para representar variables cualitativas frecuentemente se utiliza un grá cos de sectores circulares , en el que a cada valor se le asigna un sector de tamaño proporcional a su frecuencia.

- Para representar variables cualitativas y cuantitativas discretas se puede utilizar un diagrama de barras en el que a cada valor se le asigna una barra de tamaño proporcional a su frecuencia.

- Para representar variables cuantitativas con datos agrupados se puede utilizar un histograma , similar a un diagrama de barras en el que la base de cada barra corresponde con todo un intervalo.

16. Crea grá cos estadísticos adecuados para las tablas de frecuencias de los ejercicios del apartado anterior.

PARÁMETROS DE POSICIÓN

Los parámetros de posición nos permiten obtener información simpli cada de una variable estadística.

MODA

La moda (M_o) es el valor más frecuente de la variable.
Ten en cuenta que algunas variables pueden tener más de una moda.

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

La moda de estos datos es $M_o = 5$, porque es el valor que más veces se repite.

17. Las alturas de los miembros de la familia son: 1'72, 1'85, 1'65, 1'65 y 1'58. Halla la moda.

18. Mis notas de clase son: 4, 4'5, 5, 4, 5'5, 4, 6, 4, 5 y 6'5. Halla la moda.

19. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la moda.

20. Halla la moda de las variables del apartado de tablas de frecuencias.

MEDIA

La media aritmética simple ($\overline{x}$) es el resultado de sumar todos los valores posibles y dividirlo entre el número de datos.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \quad + x_n}{n}$$

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

En total tenemos 10 datos, así que los sumamos todos y dividimos entre 10.

$$\overline{x} = \frac{4+4+3'5+5+4'5+3+5+6+3'5+5}{10} = 4'35$$

21. Las alturas de los miembros de la familia son: 1'72, 1'85, 1'65, 1'65 y 1'58. Calcula la media.

22. Mis notas de clase son: 4, 4'5, 5, 4, 5'5, 4, 6, 4, 5 y 6'5. Calcula la media.

23. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la media.

Si trabajamos a partir de una tabla de frecuencias, en lugar de sumar un valor n_i veces podemos multiplicar x_i n_i.

$$\overline{x} = \frac{x_1 \; f_1 + \quad + x_m \; f_m}{n}$$

x_i	n_i	f_i
0	2	$\frac{2}{20} = 10\,\%$
1	10	$\frac{10}{20} = 50\,\%$
2	7	$\frac{7}{20} = 35\,\%$
3	1	$\frac{1}{20} = 5\,\%$
Total	20	$1 = 100\,\%$

! $$\overline{x} = \frac{0 \quad 2 + 1 \quad 10 + 2 \quad 7 + 3 \quad 1}{20} = 1'35$$

24. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	16	32	12	4	1

a) ¾Cuál es la moda? b) Calcula la media.

25. Calcula la media de las variables cuantitativas del apartado de tablas de frecuencias.

La media ponderada es otro tipo de media utilizado muy frecuentemente, en el que cada valor x_i se multiplica por su peso (es decir, la importancia que tiene respecto al total) y se divide entre la suma de los pesos.

$$\overline{x} = \frac{x_1 \quad p_1 + \quad + x_n \quad p_n}{p_1 + \quad + p_n}$$

26. En una asignatura, la cuali cación se calcula como el 80 % de la nota de exámenes, el 10 % la nota de las tareas de clase y casa y otro 10 % la actitud respecto al trabajo.

    a) Halla la cuali cación de un alumno que obtuvo un 5 en los exámenes, pero tiene un 0 en las tareas y otro 0 en el trabajo.

    b) Halla la cuali cación de otro alumno que obtuvo un 4 en los exámenes, pero tiene la nota máxima en tareas y trabajo.

MEDIANA

La mediana es el valor central de la variable, obtenida tras ordenar todos los valores de menor a mayor.

- Si los datos son impares es sencillo, pues al ordenarlos de menor a mayor es evidente cuál es el valor central.
- Si los datos son pares habrá dos valores centrales, así que hallamos la media aritmé-tica simple de ambos.

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

Antes de nada, tenemos que ordenar los datos de menor a mayor.

3 3'5 3'5 4 4 4'5 5 5 5 6

Como en el centro hay dos números, les hacemos la media aritmética:

$$Me = \frac{4 + 4'5}{2} = 4'25$$

27. Las alturas de los miembros de la familia son: 1'72, 1'85, 1'65, 1'65 y 1'58. Calcula la mediana.

28. Mis notas de clase son: 4, 4'5, 5, 4, 5'5, 4, 6, 4, 5 y 6'5. Calcula la mediana.

29. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la mediana.

30. Calcula la mediana de las variables cuantitativas del apartado de tablas de frecuencias. Compáralo con la media y la moda.

CUARTILES

Si la mediana se obtiene dividiendo la lista de datos ordenados a la mitad, los cuartiles se obtienen dividiéndola en cuartos de forma análoga.

- Q_1 es el primer cuartil, hay un cuarto de valores menores que él.
- Q_2 es el segundo cuartil. Coincide con la mediana.
- Q_3 es el tercer cuartil, hay un cuarto de valores mayores que él.

3 3'5 3'5 4 4 4'5 5 5 5 6

Como en total hay 10 datos al partir a la mitad nos quedan 5 datos a la izquierda y 5 datos a la derecha, por eso $Q_2 = Me = 4'25$.
Al repartir esos 5 nuevamente en dos mitades, el valor central será Q_1 y Q_3 respectivamente.

3 3'5 3'5 4 4 | 4'5 5 5 5 6

$Q_1 = 3'5$ $Q_3 = 5$

31. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Halla los cuartiles.

32. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	16	32	12	4	1

Halla los cuartiles.

33. Calcula los cuartiles de las variables cuantitativas del apartado de tablas de frecuencias.

PARÁMETROS DE DISPERSIÓN

Si los parámetros de posición nos dan una idea de dónde está el centro, los parámetros de posición nos indican si la mayoría de los datos están próximos a ese centro o repartidos a mayor distancia.

RANGO

El rango o recorrido es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor.

El rango intercuartículo es la diferencia entre el tercer cuartil y el primero.

3 3'5 3'5 4 4 | 4'5 5 5 5 6

$R = 6 - 3 = 3$ $R_I = 5 - 3'5 = 1'5$

34. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Halla el rango y el rango intercuartílico.

35. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	16	32	12	4	1

a) Halla el rango.

b) Halla el rango intercuartílico.

36. Halla el rango y el rango intercuartílico de las variables cuantitativas del apartado de tablas de frecuencias.

VARIANZA

Llamamos **desviación respecto a la media** a la diferencia entre cada dato y la media, es decir, $x_i \quad \bar{x}$.

La **varianza** (s^2) es la media de los cuadrados de las desviaciones.

$$s^2 = \frac{(x_1 \quad \bar{x})^2 + \quad + (x_n \quad \bar{x})^2}{n}$$

Si desarrollamos los cuadrados y reorganizamos los sumandos del numerador, podemos expresar la varianza de esta otra forma:

$$s^2 = \frac{(x_1)^2 + \quad + (x_n)^2}{n} \quad (\bar{x})^2$$

Y, por supuesto, si trabajamos a partir de una tabla de frecuencias en lugar de sumar un valor n_i veces podemos multiplicarlos por n_i.

x_i	n_i	f_i
0	2	$\frac{2}{20} = 10\,\%$
1	10	$\frac{10}{20} = 50\,\%$
2	7	$\frac{7}{20} = 35\,\%$
3	1	$\frac{1}{20} = 5\,\%$
Total	20	$1 = 100\,\%$

$$\bar{x} = \frac{0 \quad 2 + 1 \quad 10 + 2 \quad 7 + 3 \quad 1}{20} = 1'35$$

$$s^2 = \frac{0^2 \quad 2 + 1^2 \quad 10 + 2^2 \quad 7 + 3^2 \quad 1}{20} \quad 1'35^2$$

$$= 2'35 \quad 1'8225 = 0'5275$$

DESVIACIÓN TÍPICA

La **desviación típica** (s) es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$s = +\sqrt{s^2}$$

37. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la varianza y la desviación típica.

38. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	16	32	12	4	1

Calcula la varianza y la desviación típica.

39. Calcula la varianza y desviación típica de las variables cuantitativas del apartado de tablas de frecuencias.

DIAGRAMAS DE CAJAS Y BIGOTES

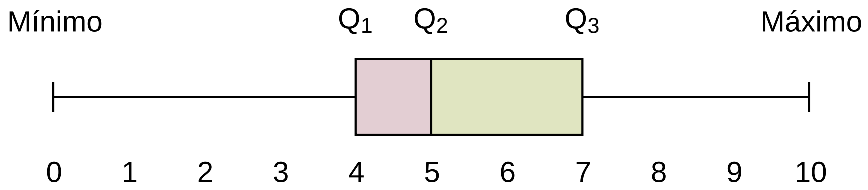
Los diagramas nos permiten describir varias características importantes al mismo tiempo de un modo visual, de forma análogo a los grá cos estadísticos que nos permiten «ver» los datos de un solo vistazo.

Los diagramas de caja y bigotes (también llamados boxplots) se centran en dos aspectos: la dispersión y la simetría.
Para su realización se representan la mediana, los cuartiles y el rango de los datos sobre un rectángulo, alineado horizontal o verticalmente.

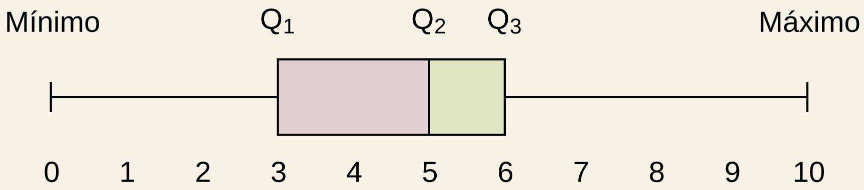
Un grupo de 20 alumnos ha conseguido las siguientes cuali caciones en una prueba:

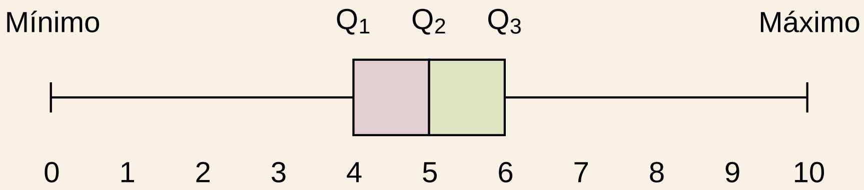
0	2'75	3	3'5	3'75	4'25	4'5	4'5	4'75	5
5	5'25	5'5	6'5	6'5	7'5	8	8	9	10

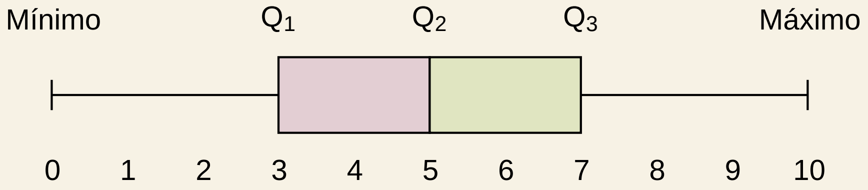
Que podemos representar grá camente como:



40. Los siguientes diagramas representan las notas en diferentes grupos. Interprétalos.







41. Elabora los diagramas de cajas y bigotes de las variables cuantitativas discretas del apartado de tablas de frecuencias.

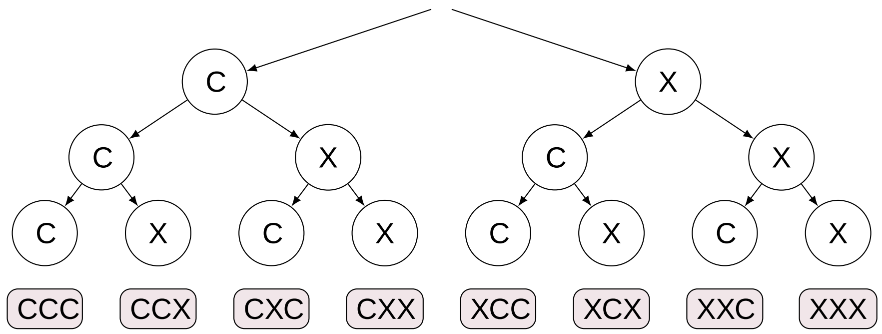
PROBABILIDAD

COMBINATORIA

La combinatoria es una rama de la matemática que estudia las ordenaciones o agrupaciones de un determinado número de elementos.

Para ayudarnos a calcular la cantidad de ordenaciones o agrupaciones posibles, utilizaremos diagramas de árbol como apoyo.

Lanzamos una moneda 3 veces consecutivas y anotamos el resultado (cara o cruz) en el orden en el que aparecen. Escribiremos C para representar cara y X para representar cruz.



1. a) Lanzamos una moneda 4 veces consecutivas. ¾Cuántos son los resultados posibles?

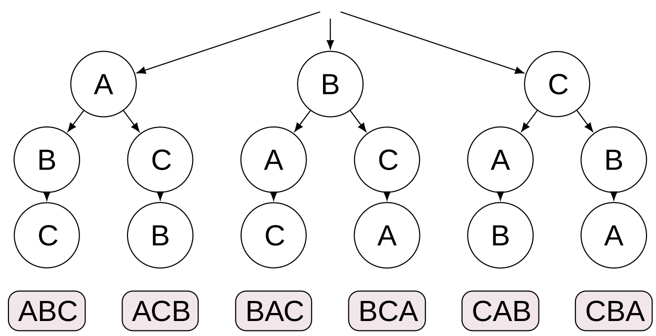
   b) Lanzamos la moneda 7 veces consecutivas. ¾Cuántos son los resultados posibles?

2. Tenemos tiras de cinco colores distintos (rojo, blanco, azul, verde y negro) para elaborar diseños de banderas.

   a) Con dos franjas, ¾cuántas banderas diferentes pueden crearse?

   b) ¾Y con tres franjas? ¾Y con diez franjas?

Ángela, Bárbara y Carolina se disputan los primeros puestos de una carrera. Veamos en qué orden podrían llegar.



El factorial de un número natural n es el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

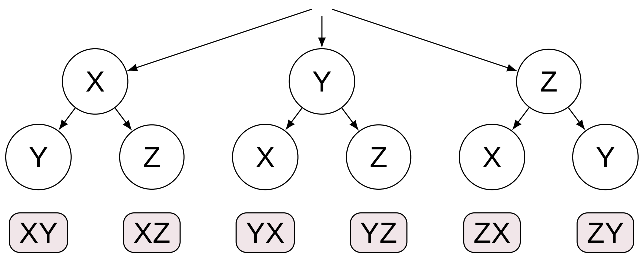
En la calculadora científica puede utilizarse la tecla x! .

El valor de 0! se define según el convenio de producto vacío.

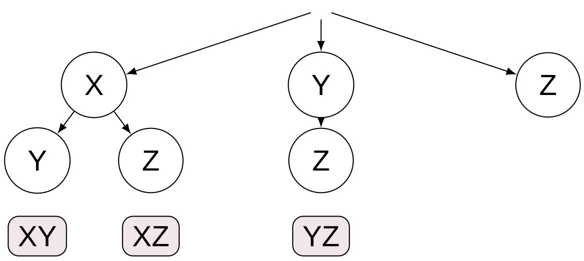
$$0! = 1$$

3. En la categoría junior de una competición participan 7 jóvenes deportistas. ¾De cuántas formas pueden ordenarse en la tabla de clasificación?
4. En una asignatura hay matriculadas trece personas. ¾De cuántas formas pueden ponerse en fila?
5. Tras mezclar las cartas de una baraja de 40 naipes, ¾de cuántas formas distintas podrían aparecer ordenadas?
6. ¾De cuántas formas diferentes se pueden sentar cinco personas en un banco de cuatro asientos?
7. ¾De cuántas formas diferentes se pueden sentar cinco personas en un banco de cinco asientos?

Veamos de cuántas formas diferentes se pueden sentar tres personas (X, Y, Z) en un banco de dos asientos.



Pero si solo nos interesa quienes se sientan pero no en que orden se sientan, observamos que en realidad varias de esas combinaciones aparecen repetidas.



Llamamos **número combinatorio** o **coe ciente binomial** de n sobre r a:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Para que tenga sentido de nirlo de ese modo, es requisito imprescindible que ambos sean números naturales y que n r.

En la calculadora cientí ca puede utilizarse la tecla nCr .

8. ¾Cuántas combinaciones diferentes de 7 personas podríamos hacer en un banco de 3 asientos?

9. 5 personas juegan a las sillas musicales, así que hay colocadas 4 sillas. ¾Cuántas combinaciones posibles de personas sentadas hay?

10. Para aprobar un examen de cinco preguntas hay que contestar bien tres de ellas. ¾De cuántas formas diferentes se pueden elegir las tres preguntas?

11. Cinco personas desean cruzar un río en una barca en la que sólo pueden subir dos personas. ¾Cuántas formas diferentes tienen de cruzar el río?

En general, utilizando diagramas de árbol y ayudándonos con la calculadora podremos resolver multitud de problemas de combinatoria, pero debemos tener presente que no todas las situaciones se podrán plantear con las fórmulas vistas anteriormente.

Utiliza diagramas de árbol para hallar la solución:

12. ¾Cuántas elecciones distintas de delegado/a y subdelegado/a se pueden realizar en una clase de 25 personas?

13. a) ¾Cuántas maneras diferentes hay de formar un tren con cuatro coches de pasajeros y un coche cafetería?

    b) ¾Cuántas maneras diferentes hay de formar un tren con tres coches de pasajeros, un coche cafetería y un vagón de correos?

14. En una clase de 30 alumnos se elige a 5 al azar para realizar una tarea. ¾Cuántas elecciones distintas hay?

15. Con los dígitos $\{1; 3; 5; 7; 9\}$.

    a) ¾Cuántos números de tres cifras se pueden formar?

    b) ¾Cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar?

    c) ¾Cuántos números de cinco cifras se pueden formar?

    d) ¾Cuántos números de cinco cifras diferentes se pueden formar?

    e) ¾Cuántos de los números de cinco cifras diferentes son menores que 70 000?

16. ¾Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos $\{0; 2; 4; 6; 8\}$? ¾Y de cinco?

17. En el juego de la primitiva hay 49 bolas numeradas, de las que los jugadores escogen seis. ¾Entre cuántas posibles combinaciones escogen al jugar?

Álgebra de conjuntos

Experimentos aleatorios y deterministas

Un experimento consiste en analizar un fenómeno en determinadas circunstancias.

- Un experimento determinista es aquel en los que se puede llegar a predecir el resultado, pues está determinado por las condiciones iniciales.
- Un experimento aleatorio es aquel en el que incluso con las mismas condiciones iniciales los resultados pueden ser diversos.

A cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio se le llama suceso elemental .

El espacio muestral es el conjunto formado por todos los sucesos elementales.
Lo representaremos con la letra E o bien la letra griega .

	E
Lanzamiento de un dado	f 1; 2; 3; 4; 5; 6g
Lanzamiento de dos monedas	f XX, XC, CX, CCg

Un suceso es un subconjunto del espacio muestral, es decir, un conjunto formado por sucesos elementales. Un suceso puede estar formado por un solo suceso elemental, o por varios. Incluso todos, o ninguno.

Tipos de sucesos

- Suceso elemental es el formado por un único elemento del espacio muestral.
- Suceso compuesto es el formado por varios elementos del espacio muestral.
- Suceso imposible es el que nunca se veri ca, pues no incluye ningún valor del espacio muestral. Se denota por el símbolo ? .

18. Tenemos dado ordinario con sus caras numeradas. Nuestro experimento consiste en lanzarlo una vez, obteniendo el espacio muestral = f 1; 2; 3; 4; 5; 6g.

    a) ¾Cuántos sucesos elementales tiene? ¾Cuáles son?

    b) ¾Cuántos sucesos compuestos de 2 elementos tiene?

    c) ¾Cuántos sucesos compuestos de 3 elementos tiene?

    d) ¾Cuántos sucesos compuestos de 4 elementos tiene?

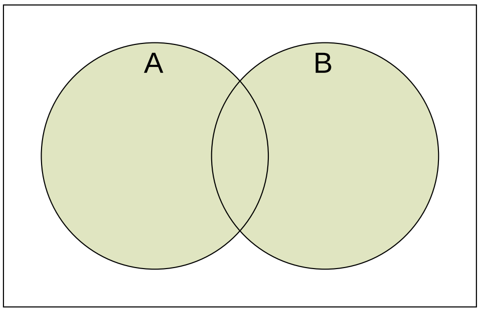
    e) ¾Cuántos sucesos compuestos de 5 elementos tiene?

    f) Entonces, ¾cuántos sucesos son posibles?

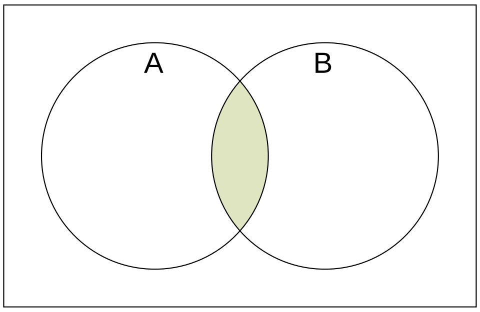
Operaciones con sucesos

Teniendo en cuenta que los sucesos son conjuntos, podemos realizar con ellos todas las operaciones que se definen para conjuntos:

El suceso **unión** $(A \cup B)$ está formado por todos los elementos de A y todos los elementos de B. Es decir, son los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B.



El suceso **intersección** $(A \cap B)$ está formado por los elementos comunes de A y B. Es decir, son los elementos que pertenecen a A y pertenecen a B.



19. El espacio muestral del lanzamiento de dos monedas es $\{XX, XC, CX, CC\}$.

    a) Indica cuáles son los elementos de los sucesos A = obtener alguna cara, B = obtener alguna cruz.

    b) Indica cuáles son los elementos de $A \cup B$ y los de $A \cap B$.

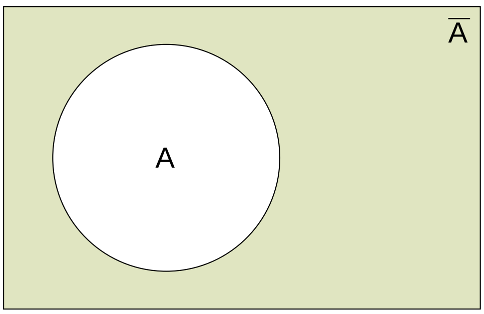
20. El espacio muestral del lanzamiento de un dado es $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

    a) Indica los elementos de los sucesos A = obtener impar, B = obtener menor que 5, C = obtener mayor que 2.

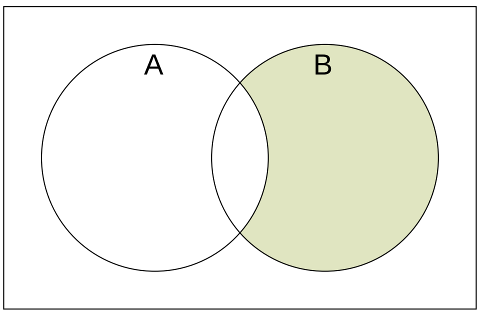
    b) Indica los elementos de $A \cap B$, $A \cap B$ y $B \cap C$.

    c) Indica los elementos de $A \cup B$, $A \cup B$ y $B \cup C$.

El suceso **complementario** $(\overline{A})$ está formado por los elementos que no están en A.



El suceso **diferencia** $(B - A)$ está formado por aquellos elementos de B que no están en A. Coincide con $B \cap \overline{A}$.



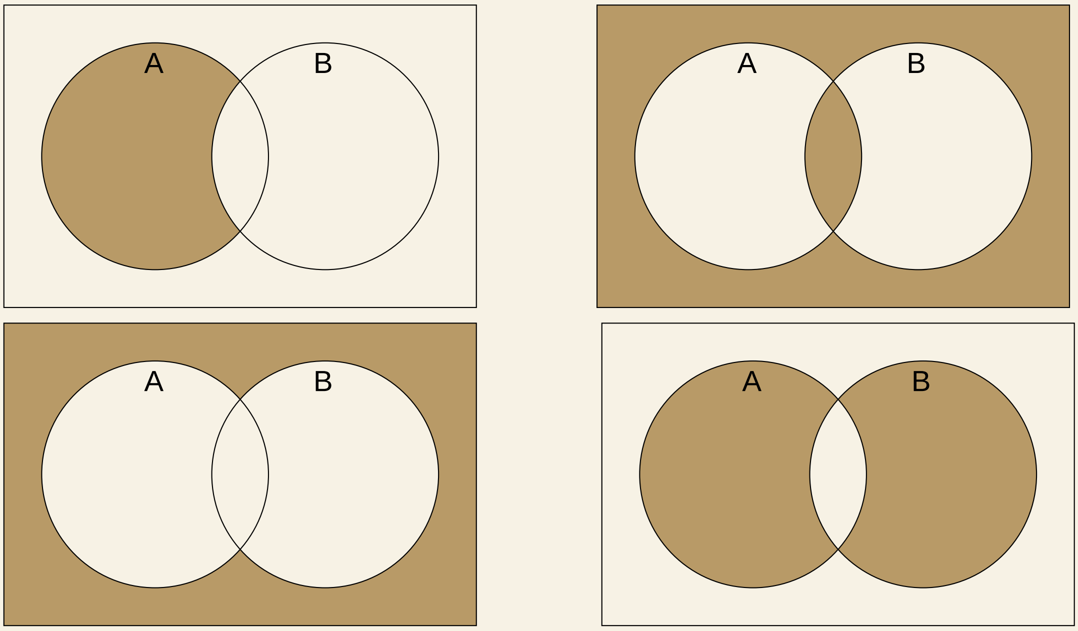
21. a) ¿Cuál es el espacio muestral del lanzamiento de tres monedas?

    b) Indica cuáles son los elementos de los sucesos A = obtener alguna cara, B = obtener alguna cruz, C = obtener dos caras, D = obtener una cruz.

c) Describe (con palabras o elementos) los sucesos:

a) $\overline{A}$	c) $\overline{C}$	e) $A \quad B$	g) $A \quad C$	i) $D \quad A$
b) $\overline{B}$	d) $\overline{D}$	f) $B \quad A$	h) $B \quad C$	j) $D \quad B$

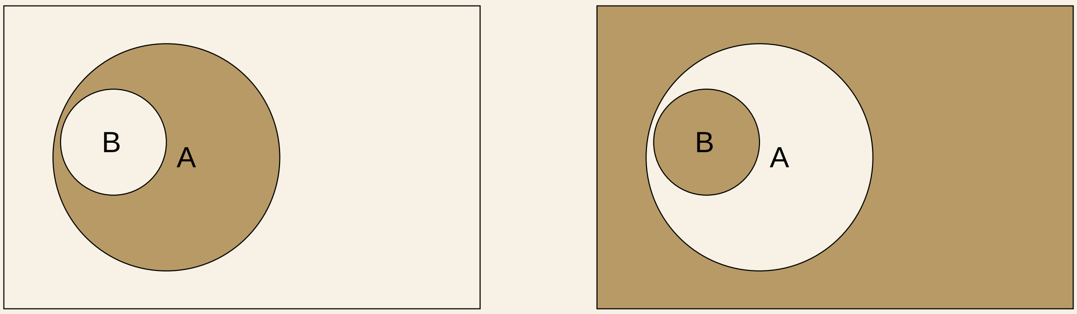
22. Identifica los siguientes sucesos:



23. El espacio muestral $= \{a, b, c, d, e\}$ contiene los sucesos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, e\}$. Halla:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $\overline{A \cup B}$ d) $\overline{A \cap B}$ e) $\overline{A} \cup \overline{B}$ f) $\overline{A} \cap \overline{B}$

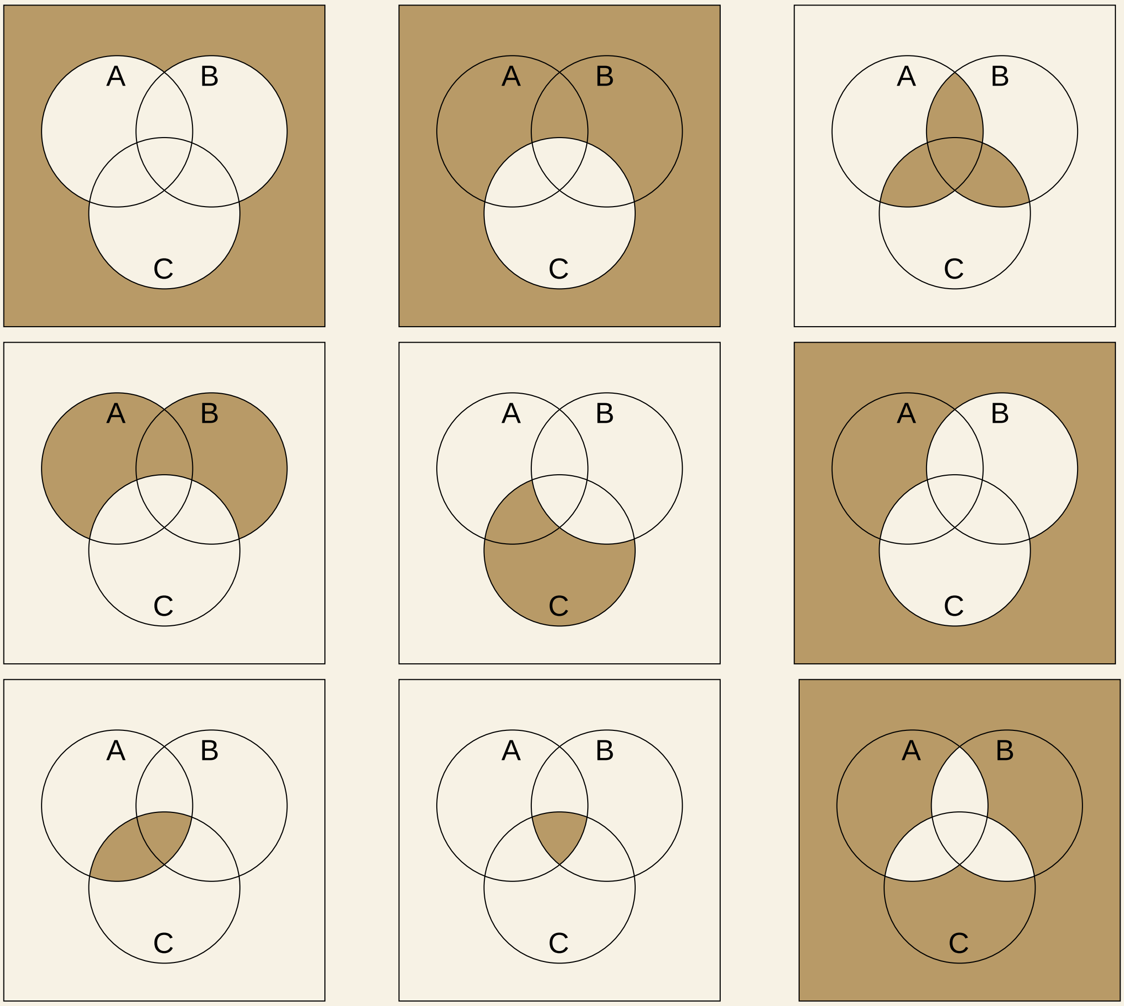
24. Identifica los siguientes sucesos:



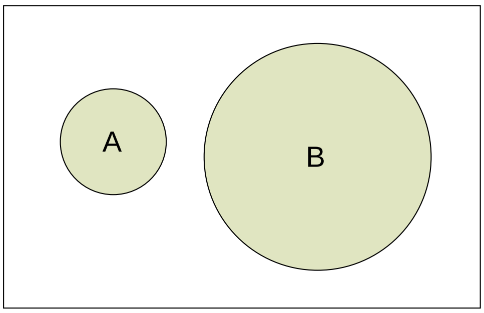
25. Al espacio muestral = letras del abecedario pertenecen los sucesos A = vocales, $B = \{m, a, t, e, s\}$ y $C = \{r, u, i, d, o\}$. Describe los siguientes sucesos:

a) $A \cup B$	d) $\overline{A \cap B}$	g) $A \cup C$	j) $\overline{B \cap C}$
b) $A \cap B$	e) $\overline{A} \cup \overline{B}$	h) $A \cap C$	k) $A \cap B \cap C$
c) $\overline{A \cup B}$	f) $\overline{A} \cap \overline{B}$	i) $B \cup C$	l) $\overline{A} \cap (B \cup C)$

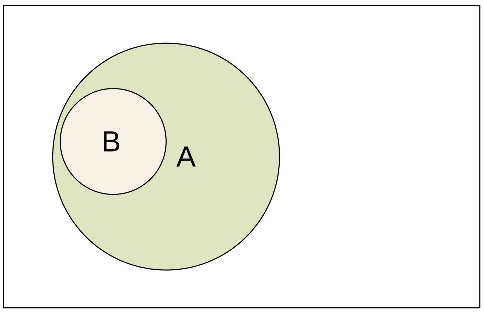
26. Identi ca los siguientes conjuntos:



Decimos que dos sucesos son incompatibles cuando no tienen ningún elemento en común, es decir, A \ B = ? .

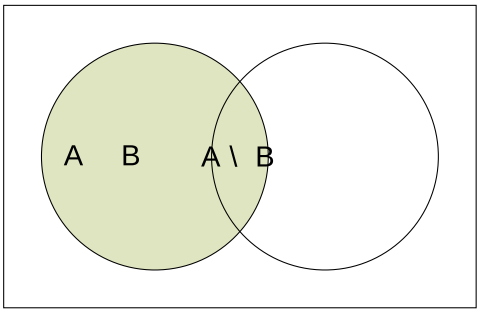


Por otro lado, decimos que un suceso está contenido (A B) en otro si todos los elementos del primero pertenecen también al segundo.

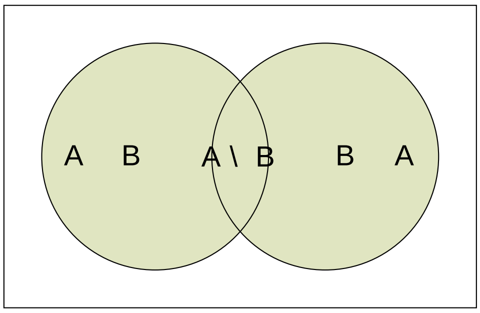


Observa que dos sucesos complementarios son siempre incompatibles (A \ $\overline{A}$ = ?) pero el recíproco no es cierto en general.
Puede resultar interesante de nir un conjunto en función de la unión de conjuntos incompatibles, pues el cálculo de probabilidades es más sencillo en ese caso.

- $A = (A - B) \cup (A \cap B)$



- $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$



27. En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se saca una bola y se considera los sucesos:

$A =$ Sacar múltiplo de 3
$B =$ Sacar múltiplo de 5
$C =$ Sacar número par
$D =$ Sacar número mayor que 10
$F =$ Sacar número menor o igual que 10
$G =$ Sacar número que no sea múltiplo de 3

a) Indica cuál es el suceso seguro.
b) Indica cuál es el suceso imposible.
c) Halla dos sucesos complementarios.
d) Halla dos sucesos incompatibles.

28. Tenemos una bolsa con 9 bolas, numeradas del 1 al 9, y realizamos el experimento que consiste en sacar una bola de la bolsa, anotar el número y devolverlo a la bolsa.
Consideremos los sucesos $A = \{$salir un número primo$\}$ y $B = \{$salir un cuadrado perfecto$\}$.

a) Halla los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.
b) ¿Son compatibles los sucesos A y B?
c) Halla $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

29. En familias de tres hijos, se estudia la distribución de sus sexos.
Por ejemplo $(H; M; M)$ significa que el mayor es varón y las otras dos son mujeres.

a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?
b) Describe los sucesos $A = \{$la menor es mujer$\}$ y $B = \{$el mayor es hombre$\}$.
c) Halla $A \cap B$. ¿Son sucesos compatibles o incompatibles?

30. Realizamos un experimento que consiste en lanzar un dado y una moneda.

a) Describe el espacio muestral.
b) Describe los sucesos $A = \{$sacar menos de 3 en el dado$\}$ y $B = \{$sacar cruz en la moneda$\}$.
c) Halla $A \cap B$ y $A \cup B$.
d) Si además consideramos el suceso $C = \{1C; 2X; 3C; 4X; 5C; 6X\}$, describe $A \cap \overline{C}$ y $\overline{B} \cap C$.

31. Sean A, B y C tres sucesos de un mismo espacio muestral. Expresa en función de ellos los siguientes sucesos:

a) Se realiza alguno de los tres.
b) No se realiza ninguno de los tres.
c) Se realizan los tres.
d) Se realizan, por lo menos, dos de los tres.
e) Se realiza B pero no se realiza C.
f) Se realiza solo A.

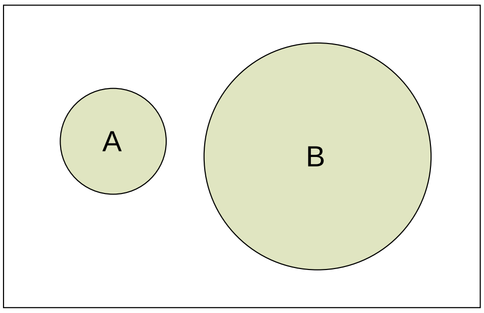
CÁLCULO DE PROBABILIDADES

En la probabilidad clásica se define la **frecuencia relativa** de un suceso en un experimento realizado n veces:

$$f(A) = \frac{n^o \text{ casos favorables}}{n}$$

Para que además podamos construir un sistema probabilístico coherente, le exigimos que cumpla dos condiciones:

- La probabilidad total es un $100\,\%$, es decir, $P(E) = 1$.
- Si dos sucesos son incompatibles, conocer la probabilidad de cada uno de ellos nos permite calcular la probabilidad de la unión.
  $A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



Por ello definimos la **probabilidad** de un experimento regular (es decir, en el que los sucesos elementales son equiprobables) del modo siguiente:

Regla de Laplace

$$P(A) = \frac{n^o \text{ sucesos elementales contenidos en } A}{n^o \text{ sucesos elementales}}$$

32. ¿Cuál es la probabilidad al lanzar un dado de obtener un número impar?

33. Se lanza una moneda dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara una única vez?

34. En una baraja española de 40 cartas, estudia la probabilidad de que:

    a) salga un as   b) salga oros   c) salga el as de oros

35. En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se saca una bola y se considera los sucesos:

    A = Sacar múltiplo de 3   D = Sacar número mayor que 9
    B = Sacar múltiplo de 5   E = Sacar número menor o igual que 10
    C = Sacar número par   F = Sacar número que no sea múltiplo de 3

    a) Calcula la probabilidad de los sucesos descritos.
    b) Calcula la probabilidad de $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap F$, $A \cap F$.

36. Calcula la probabilidad de tener un boleto ganador al jugar a la lotería.

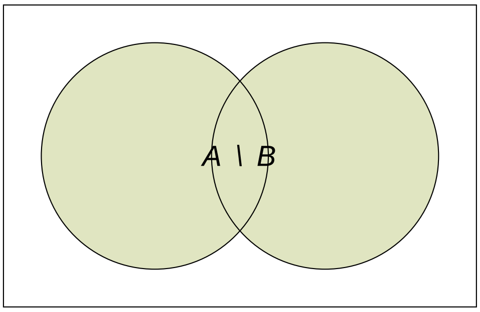
37. Calcula la probabilidad de tener una combinación ganadora al jugar a la primitiva.

PROPIEDADES

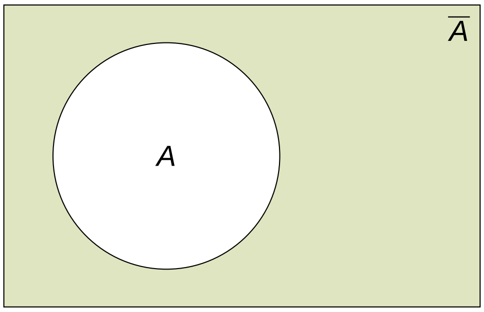
Es importante observar que la probabilidad de un suceso toma siempre valores entre 0 y 1. Será 0 cuando se trate de un sucesos imposible y será 1 cuando se trate de un suceso seguro, y en general tomará cualquier otro valor intermedio.

Además es importante tener en cuenta estas otras dos propiedades de uso frecuente, que podemos razonar de forma sencilla a partir de un diagrama de conjuntos:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$



38. Sean A y B dos sucesos aleatorios con probabilidades $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calcula:

    a) $P(\overline{A})$ b) $P(\overline{B})$ c) $P(A - B)$ d) $P(B - A)$ e) $P(A \cup B)$

39. Sean A y B dos sucesos aleatorios incompatibles con probabilidades $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{5}$. Calcula:

    a) $P(\overline{A})$ b) $P(\overline{B})$ c) $P(A - B)$ d) $P(B - A)$ e) $P(A \cup B)$

40. Sean A y B dos sucesos aleatorios con probabilidades $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$. Calcula:

    a) $P(A \cap B)$ b) $P(A - B)$ c) $P(B - A)$ d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ e) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

41. Sean A y B dos sucesos aleatorios con probabilidades $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{5}$.
    ¿Son compatibles o incompatibles?

42. En un concesionario han observado las preferencias de los compradores respecto al color del coche. Un 25 % lo prefieren negro, un 10 % rojo, un 20 % azul y un 15 % gris.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador elija un coche negro o gris?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que elija un coche que no sea azul?
    c) ¿Cuál es la probabilidad de que elija un coche que no sea ni rojo ni azul?

43. Un 20 % del alumnado de una clase juega a balonmano, y el 40 % practica remo.
    Si el 53 % de los alumnos practican alguno de los dos deportes, ¿cuál es el porcentaje que practica los dos deportes?