


# MATEMÁTICAS

orientadas a las enseñanzas

# APLICADAS



Material elaborado para su uso en el aula.

Se distribuye bajo licencia CreativeCommons Reconocimiento-NoComercial 3.0 

Es decir, puedes compartirlo y adaptarlo, a condición de que reconozcas la autoría (p.ej. con un enlace a mi web) y no lo utilices con ninguna finalidad comercial.

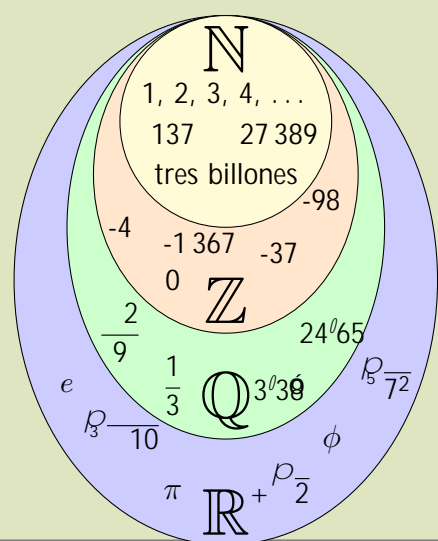
[laurafigueiredo.net](http://laurafigueiredo.net)

# ÍNDICE

<b>NÚMEROS RACIONALES</b>	<b>5</b>
Operaciones con fracciones . . . . .	7
Expresión decimal y fraccional . . . . .	11
Notación científica . . . . .	14
Aproximación y errores . . . . .	15
<b>INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA</b>	<b>18</b>
Tipos de variables . . . . .	18
Tablas de frecuencias . . . . .	20
Gráficos estadísticos . . . . .	23
<b>PARÁMETROS ESTADÍSTICOS</b>	<b>25</b>
Parámetros de posición . . . . .	25
Parámetros de dispersión . . . . .	28
Diagramas de cajas y bigotes . . . . .	30
<b>POLINOMIOS</b>	<b>31</b>
Operaciones con polinomios . . . . .	32
<b>ECUACIONES Y SISTEMAS</b>	<b>39</b>
Ecuaciones de primer grado . . . . .	39
Ecuaciones de segundo grado . . . . .	40
Sistemas de ecuaciones . . . . .	42
Método de sustitución . . . . .	43
Método de igualación . . . . .	44
Método de reducción . . . . .	45
Método gráfico . . . . .	47
<b>SUCESIONES</b>	<b>50</b>
Progresión aritmética . . . . .	51
Suma de términos . . . . .	52
Progresión geométrica . . . . .	53
Suma de términos . . . . .	54
Aplicaciones a la aritmética financiera . . . . .	55
<b>GRÁFICAS Y FUNCIONES</b>	<b>57</b>
Fórmulas, tablas y gráficas . . . . .	59
Estudio de la gráfica de una función . . . . .	60
Dominio y recorrido . . . . .	60
Puntos de corte con los ejes . . . . .	60
Continuidad . . . . .	61
Monotonía . . . . .	61

Extremos . . . . .	62
Simetría . . . . .	62
<b>FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS</b>	<b>64</b>
Función lineal . . . . .	64
Pendiente y ordenada de la recta . . . . .	64
Función cuadrática . . . . .	68
Orientación de la parábola . . . . .	68
Localización del vértice . . . . .	69
<b>RECTAS EN EL PLANO</b>	<b>71</b>
Dirección de la recta . . . . .	71
Pendiente de la recta . . . . .	72
Ecuaciones de la recta . . . . .	73
<b>GEOMETRÍA PLANA</b>	<b>77</b>
Teorema de Pitágoras . . . . .	77
Perímetro y área . . . . .	78
<b>CUERPOS GEOMÉTRICOS</b>	<b>84</b>
Poliedros . . . . .	84
Prismas . . . . .	84
Prisma truncado . . . . .	86
Pirámides . . . . .	87
Pirámide truncada . . . . .	88
Cilindros . . . . .	89
Cilindro truncado . . . . .	90
Conos . . . . .	90
Cono truncado . . . . .	91
Esferas . . . . .	92
<b>SEMEJANZA</b>	<b>93</b>
Teorema de Tales . . . . .	94
Escalas . . . . .	98
Movimientos en el plano . . . . .	100

# NÚMEROS RACIONALES



En cursos anteriores hemos trabajado fundamentalmente con **números naturales** ( $\mathbb{N}$ ) y **números enteros** ( $\mathbb{Z}$ ), aunque hemos ido adquiriendo alguna soltura en el manejo de **números racionales** ( $\mathbb{Q}$ ) escritos tanto en forma fraccional como en forma decimal.

En este curso continuaremos trabajando sobre lo ya conocido pero, sobre todo, avanzaremos de forma significativa en el manejo de **números reales** ( $\mathbb{R}$ ).

Por eso iniciaremos el curso con un breve repaso de operaciones con números enteros (¡importantísimo no confundirse con los signos!) y procederemos a trabajar ya con fracciones desde el primer tema.

## OPERACIONES CON NÚMEROS NEGATIVOS

A modo de repaso, recordemos las operaciones con números enteros.

- Para **sumar dos negativos**, sumamos su valor absoluto y al resultado le ponemos signo negativo.
- Para **sumar dos números de distinto signo**, restamos su valor absoluto y al resultado le ponemos el signo del mayor en absoluto.
- **Restar** un número es lo mismo que sumar su opuesto.
- Para **multiplicar o dividir** debemos tener en cuenta sus signos:
  - Si ambos tienen el mismo signo, el resultado es positivo.
  - Si tienen signos diferentes, el resultado es negativo.

### Jerarquía de operaciones

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

Las operaciones deben realizarse en el orden correcto.

Utilizaremos pasos intermedios siempre que sea necesario y procuraremos ser cuidadosos a la hora de operar con signos.

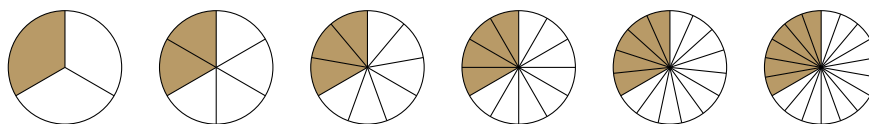
1. Opera:

- |   |  |
|---|--|
| a) $120 \cdot (16 - 5) \cdot [38 - (6)]$                  | g) $(5 - 10) \cdot (5+10) \cdot 12 : [16 - 15 : (1 - 29)]$       |
| b) $5 \cdot (2 - 3) \cdot (1 - 5) \cdot 2 + 7$            | h) $3 \cdot (5 - 2) + 12 : (3 - 4) \cdot (6 - 4)$                |
| c) $16 \cdot [5 - (9)] : (7) + 7 \cdot [5 - 3 \cdot (2)]$ | i) $3^2 \cdot (4 - 3 \cdot 2) + 6 + 2 \cdot (24 : 4)$            |
| d) $24 : (2 - 3) \cdot 4 - 6 : 2 \cdot (3) \cdot (2)$     | j) $[48 - 5 \cdot (9) : 3] \cdot 6 + 4 \cdot [19 - 3 \cdot (7)]$ |
| e) $40 : (2 - 5) \cdot 6 + 6 \cdot [101 + 53 \cdot (2)]$  | k) $2 \cdot [2 - (4) \cdot 12 : (3)] \cdot (5^2 - 3 - 1)$        |
| f) $(4 - 3) : 2 - 3 \cdot 23 + 5 \cdot (3) - 20$          | l) $4 \cdot [2 - (3 - 4 \cdot 3)] + [4 - (24 : 4)]^2 - 4$        |

## FRACCIONES EQUIVALENTES

Llamamos **fracciones equivalentes** a aquellas que representan el mismo número.

Un método para obtener fracciones equivalentes consiste en multiplicar (o dividir) numerador y denominador por el mismo número.



Una fracción es **irreducible** cuando el numerador y el denominador son primos entre sí (es decir, su único divisor común es 1) y por lo tanto no puede simplificarse más.

Recordemos que no son pares de números, sino cocientes de esos pares de números.

De dividir 1 entre 3 resulta lo mismo que de dividir 1 entre 3, que en ambos casos es el número negativo que corresponde a ese cociente.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

2. Simplifica las siguientes fracciones:

- |                     |                     |                    |                         |                     |                      |
|---------------------|---------------------|--------------------|-------------------------|---------------------|----------------------|
| a) $\frac{36}{100}$ | d) $\frac{54}{80}$  | g) $\frac{84}{21}$ | j) $\frac{120}{104}$    | m) $\frac{12}{100}$ | o) $\frac{32}{128}$  |
| b) $\frac{34}{51}$  | e) $\frac{55}{121}$ | h) $\frac{17}{68}$ | k) $\frac{68}{80}$      | n) $\frac{17}{34}$  | p) $\frac{20}{45}$   |
| c) $\frac{81}{120}$ | f) $\frac{32}{128}$ | i) $\frac{20}{45}$ | l) $\frac{1800}{32000}$ | ñ) $\frac{84}{21}$  | q) $\frac{120}{104}$ |

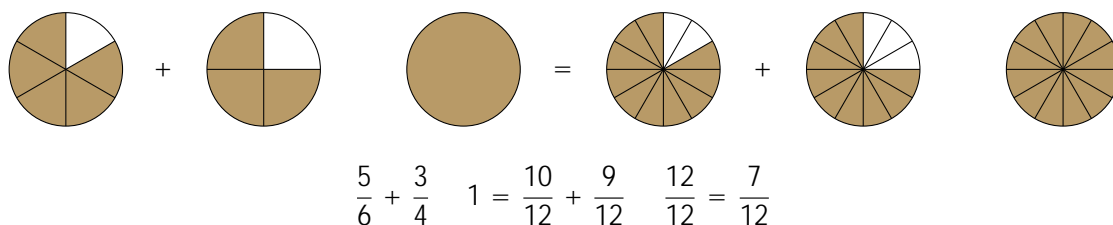


Simplifica siempre que sea posible, los cálculos siguientes serán más fáciles.

# OPERACIONES CON FRACCIONES

## SUMA Y RESTA

Solo es posible sumar o restar aquellas fracciones que tienen el mismo denominador. Si no lo tuviesen, procederíamos hallando fracciones equivalentes a ellas que tengan un denominador común.



3. Opera y simplifica:

a)  $\frac{10}{11} + \frac{4}{7} + \frac{3}{5}$

b)  $\frac{13}{12} + \frac{7}{8} + \frac{5}{24}$

c)  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8}$

d)  $\frac{4}{15} + \frac{3}{5} + \frac{7}{3}$

e)  $\frac{4}{7} + \frac{2}{3} + 5$

f)  $\frac{5}{27} + \frac{5}{9} + \frac{5}{3}$

g)  $1 + \frac{8}{3} + \frac{3}{20}$

h)  $1 + \frac{15}{24} + \frac{50}{6}$

i)  $\frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{4}{6}$

4. Opera y simplifica:

a)  $\frac{42}{18} + \frac{35}{20} + \frac{17}{42}$

b)  $\frac{5}{5} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3}$

c)  $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

d)  $\frac{3}{5} + 1 + \frac{2}{3} + \frac{7}{6}$

e)  $\frac{3}{5} + 7 + \frac{9}{10} + \frac{5}{12}$

f)  $\frac{7}{8} + \frac{6}{7} + \frac{1}{14}$

g)  $1 + \frac{3}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

h)  $\frac{13}{17} + \frac{3}{15} + 9 + \frac{8}{20}$

i)  $23 + \frac{7}{40} + \frac{10}{7} + 14$

## MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

El **producto** de fracciones se obtiene multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 4} = \frac{14}{28} = \frac{7}{14}$$

El **cociente** de dos fracciones es igual al producto de la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{5}{6} : \frac{9}{8} = \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{54} = \frac{20}{27}$$

5. Opera y simplifica:

a)  $\frac{1}{5} + \frac{4}{7}$

b)  $\frac{12}{15} + \frac{25}{36}$

c)  $\frac{16}{5} + \frac{3}{90} + \frac{5}{11}$

d)  $\frac{13}{42} + \frac{6}{5} + \frac{24}{10}$

e)  $\frac{3}{4} + \frac{11}{18} + 2$

f)  $\frac{20}{9} + 5 + \frac{9}{11}$

g)  $\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$

h)  $\frac{1}{15} : \frac{6}{10}$

i)  $\frac{12}{5} : \frac{4}{25}$

j)  $\frac{7}{2} : (4)$

k)  $8 : \frac{7}{6}$

l)  $\frac{16}{5} : (24)$

6. Opera y simplifica:

$$a) \frac{3}{5} \frac{4}{3} \frac{6}{7}$$

$$d) \frac{8}{6} \frac{17}{21} \frac{1}{5}$$

$$g) \frac{8}{12} : \frac{4}{24}$$

$$j) \frac{15}{20} : \frac{75}{16}$$

$$b) 4 \frac{6}{15} \frac{9}{12}$$

$$e) \frac{40}{5} \frac{10}{11} \frac{2}{9}$$

$$h) \frac{7}{10} : \frac{21}{10}$$

$$k) \frac{5}{6} : ( 15)$$

$$c) \frac{12}{40} ( 5) \frac{35}{14}$$

$$f) 20 \frac{7}{9} 72$$

$$i) \frac{21}{8} : \frac{7}{8}$$

$$l) 15 : \frac{5}{6}$$

## POTENCIAS

Una **potencia** de exponente natural es una forma abreviada de escribir el producto de factores iguales. Ese factor se llama **base** y el número de veces que la base se multiplica por si misma se llama **exponente**.

$$7^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$
$$( - 10)^3 = ( - 10) ( - 10) ( - 10)$$

Cuando la potencia tiene base positiva, el resultado es siempre positivo.

Cuando la potencia tiene base negativa:

- si el exponente es par, el resultado es positivo.
- si el exponente es impar, el resultado es negativo.

Fijate muy bien siempre en los signos negativos.

No es lo mismo que el signo forme parte de la base de la potencia que que esté fuera de ella.

$$( - 3)^2 = ( - 3) ( - 3) = 9$$
$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

7. Calcula el valor de las siguientes potencias:

$$a) 7^3$$

$$d) 10^8$$

$$g) 5^4$$

$$j) 3^5$$

$$m) 2^6$$

$$o) 16^2$$

$$b) ( - 7)^3$$

$$e) ( - 11)^2$$

$$h) 8^3$$

$$k) ( - 5)^4$$

$$n) ( - 2)^6$$

$$p) ( - 1)^{99}$$

$$c) 4^4$$

$$f) 6^2$$

$$i) ( - 3)^8$$

$$l) 13^4$$

$$ñ) 2^6$$

$$q) 1^{99}$$

8. Hemos colgado un video en Youtube que se ha convertido en viral y el número de visitas se duplica cada hora.

- Si en el momento de colgarlo tiene solo 1 visita, expresa con una potencia las visitas que tendrá tras un día entero.
- Usa tu calculadora para obtener el número de visitas.



Toda potencia de **exponente 0** procede de una división de potencias iguales, por eso siempre tiene valor 1.

$$12^0 = \frac{12^5}{12^5} = 1$$

Toda potencia de **exponente negativo** es igual a la inversa de la potencia con dicho exponente en valor absoluto.

$$\frac{1}{3^2} = \frac{3^0}{3^2} = 3^{-2}$$

9. Calcula:

a)  $4^3$       c)  $17^{-1}$       e)  $2^6$       g)  $15^{-2}$       i)  $3^4$       k)  $2^8$   
 b)  $9^{-2}$       d)  $(-3)^{-2}$       f)  $(-1)^{-19}$       h)  $(-2)^8$       j)  $1^{-13}$       l)  $(-4)^3$

10. Calcula:

a)  $10^{-1}$       b)  $10^{-2}$       c)  $10^{-3}$       d)  $10^{-6}$       e)  $10^0$       f)  $10^{12}$

11. Expresa como una única potencia:

a)  $7^3 \cdot 7^0 \cdot 7^5$       d)  $\frac{1}{7^2} \cdot 7^5 : 7^6$       g)  $(4^3 : 4^{-3})^4 \cdot (4^{-3} \cdot 4^{-1})^5$   
 b)  $5^6 : 5^4$       e)  $3^9 \cdot 3^{-7} : (3^2 \cdot 3^{-3})^2$       h)  $(6^4 \cdot 6^{-1})^2 \cdot (6^2)^3 : 6$   
 c)  $12^{-7} : 12^5 \cdot 12^{20}$       f)  $2^6 : 2^{-10} \cdot 2$       i)  $((-3)^4 \cdot (-3)^2)^3 : (3^4 \cdot 3)^3$

12. Expresa como una única potencia y calcula:

a)  $\frac{(3^3)^{-2} \cdot 3^8 \cdot 3}{(3^4 \cdot 3^{-2})^2}$       b)  $\frac{2^3 \cdot 2^{-5} \cdot 2^4}{2^0 \cdot 2^{-2}}$       c)  $\frac{(5^{-2})^3 \cdot 5^5 \cdot 5^{-10}}{((5^2)^{-1})^3 \cdot 5^4}$

La **potencia de una fracción** es la que resulta de elevar el numerador y el denominador al exponente dado.

$$\left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{7^3}{9^3}$$

Recuerda que una potencia de **exponente negativo** es igual a la inversa de la potencia con exponente en valor absoluto.

$$\frac{3^{-4}}{10} = \frac{10^4}{3}$$

13. Desarrolla como cociente de potencias y calcula:

a)  $\frac{3^2}{5}$       c)  $\frac{1^4}{2}$       e)  $\frac{5^2}{6}$       g)  $\frac{2^4}{3}$   
 b)  $\frac{7^3}{9}$       d)  $\frac{5^3}{15}$       f)  $\frac{4^3}{7}$       h)  $\frac{4^1}{5}$

14. Calcula:

$$a) \frac{2^3}{3} \cdot \frac{2^0}{3} \cdot \frac{2^5}{3}$$

$$b) \frac{1^6}{5} : \frac{1^4}{5}$$

$$c) \frac{3^7}{4} : \frac{3^5}{4} \cdot \frac{3^{20}}{4}$$

$$d) \frac{1^2}{7} \cdot \frac{1^5}{7} : \frac{1^6}{7}$$

$$e) \frac{4^6}{3} : \frac{4^{10}}{3} \cdot \frac{4^6}{3}$$

$$f) \frac{1^2}{2} : \frac{1^3}{2} \cdot \frac{1^3}{2} - \frac{1^4}{2} \cdot \frac{1^4}{2}$$

## OPERACIONES COMBINADAS

El orden de las operaciones se mantiene en todos los conjuntos numéricos.

Utilizaremos pasos intermedios siempre que sea necesario y procuraremos ser cuidadosos a la hora de operar con signos.

### Jerarquía de operaciones

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

15. Opera y simplifica:

$$a) \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1^2}{3}$$

$$b) \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$$

$$c) \frac{1}{10} : \frac{2}{3} \cdot \frac{2^4}{5}$$

$$d) \frac{2}{3} \cdot \frac{1^4}{2} : \frac{1}{6} \cdot \frac{2^4}{5}$$

$$e) \frac{23}{12} + \frac{1}{5} : \frac{4}{5} + 2^4$$

$$f) \frac{7}{4} : \frac{4}{3} \cdot \frac{3^4}{8} \cdot 3$$

16. Opera y simplifica:

$$a) \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{1^4}{2}$$

$$b) \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$c) \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1^4}{3}$$

$$d) \frac{5}{36} \cdot \frac{7}{16} + \frac{1}{4} : \frac{3^4}{5}$$

$$e) \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{3^4}{4} \cdot \frac{7}{2}$$

$$f) \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4^4}{9} \cdot \frac{4}{5} \cdot 2$$

17. Opera y simplifica:

$$a) \frac{7^3}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot 2 \cdot \frac{5}{3}$$

$$b) \frac{8}{3} \cdot 2 : \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{5}{2}$$

$$c) 3 \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{7}{8} \cdot 5 \cdot 9$$

$$d) 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1^4}{10}$$

$$e) \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1^4}{20} \cdot 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5}$$

$$f) 1 - \frac{3}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1^4}{9}$$

Problemas con fracciones:

18. ¿Cuántas botellas de  $\frac{3}{4}$  de litro se pueden llenar con una garrafa de 30 litros?
19. Para una fiesta hemos comprado 60 latas de refresco de  $\frac{1}{3}$  de litro. ¿Cuántos litros había en total?
20. Dos hermanos se han repartido las canicas de un bote. El mayor se lleva  $\frac{5}{8}$  del total y el menor las 66 restantes. ¿Cuántas canicas había en el bote?
21. Un frasco de perfume tiene una capacidad de  $\frac{1}{20}$  litros. ¿Cuántos frascos de perfume pueden llenarse con el contenido de  $\frac{3}{4}$  litros?
22. Breixo se come  $\frac{2}{7}$  de un bizcocho y para la merienda  $\frac{3}{5}$  de lo que le quedaba. ¿Qué fracción se ha comido? ¿Qué fracción ha sobrado?
23. De un depósito que contenía 600 litros de agua han sacado primero  $\frac{1}{6}$  del total y después  $\frac{3}{4}$  del total. ¿Cuántos litros quedan?
24. Compramos un televisor por 1300 € y pagamos  $\frac{1}{4}$  al contado y el resto en 6 plazos. ¿Cuál será el importe de cada plazo?
25. En una carrera de coches el trazado tiene 372 km. ¿Cuántos kilómetros faltan para meta si ya han recorrido  $\frac{9}{40}$ ?
26. Una persona ha cosechado durante la mañana  $\frac{1}{43}$  de un campo y por la tarde la mitad del resto. Si todavía le quedan 170 hectáreas, ¿cuál es la superficie total del campo?
27. Un ganadero vende  $\frac{3}{4}$  del número de reses que tiene. Más tarde  $\frac{3}{4}$  del resto, quedando así 16 reses en la ganadería. ¿Cuántos animales tenía?

## EXPRESIÓN DECIMAL Y FRACCIONAL

### EXPRESIÓN DECIMAL DE UNA FRACCIÓN

Al dividir el numerador entre el denominador de una fracción se obtiene una **expresión decimal** equivalente a la propia fracción.

$$\frac{10}{2} = 5$$

$$\frac{9}{2} = 4,5$$

$$\frac{2}{9} = 0,2\bar{2}$$

$$\frac{2}{90} = 0,0\bar{2}$$

Los números racionales pueden ser enteros, decimales exactos, decimales periódicos puros o decimales periódicos mixtos, tal y como ilustra el ejemplo anterior.

Pero ten en cuenta que también existen números decimales irracionales.

28. Escribe los siguientes racionales en forma decimal, dividiendo hasta la tercera cifra decimal, y clasifícalos cuando sea posible:

a)  $\frac{26}{9}$

d)  $\frac{48}{12}$

g)  $\frac{67}{30}$

j)  $\frac{91}{18}$

m)  $\frac{61}{33}$

b)  $\frac{45}{12}$

e)  $\frac{88}{25}$

h)  $\frac{108}{72}$

k)  $\frac{925}{7}$

n)  $\frac{47}{30}$

c)  $\frac{1}{45}$

f)  $\frac{44}{12}$

i)  $\frac{136}{225}$

l)  $\frac{60}{120}$

ñ)  $\frac{333}{128}$

## FRACCIÓN GENERATRIZ

La **fracción generatriz** de un número decimal es aquella fracción irreducible equivalente al número.

### DE UN DECIMAL EXACTO

Basta con escribir el número sin coma decimal y dividirlo por el múltiplo de 10 adecuado.

$$4^{0}25 = \frac{425}{100} = \frac{17}{4}$$

29. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales exactos:

a)  $3^{0}5$

e)  $42^{0}08$

i)  $0^{0}025$

b)  $6^{0}8$

f)  $16^{0}94$

j)  $12^{0}50$

c)  $3^{0}9$

g)  $0^{0}001$

k)  $10^{0}10$

d)  $14^{0}07$

h)  $3^{0}025$

l)  $4^{0}95$

### DE UN DECIMAL PERIÓDICO

Debemos multiplicar nuestro número por dos múltiplos de 10 que nos permitan obtener sendos resultados con idénticos decimales y proceder a restarlos entre sí.

De este modo se simplifica la parte periódica y se puede despejar de forma sencilla.

Veámoslo con un decimal periódico puro como  $x = 2^{0}\overline{35}$ :

$$100x = 235\overline{353535} \dots$$

$$x = 2\overline{353535} \dots$$

$$\hline 99x = 233$$

Por lo tanto  $x = 2^{0}\overline{35} = \frac{233}{99}$ .

30. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos puros:

a)  $3^{0}\overline{6}$

c)  $3^{0}\overline{9}$

e)  $42^{0}\overline{08}$

g)  $0^{0}\overline{001}$

i)  $0^{0}\overline{025}$

k)  $10^{0}\overline{10}$

b)  $6^{0}\overline{6}$

d)  $14^{0}\overline{07}$

f)  $16^{0}\overline{94}$

h)  $3^{0}\overline{025}$

j)  $12^{0}\overline{50}$

l)  $4^{0}\overline{9}$

Veámoslo también con un decimal periódico mixto como  $x = 2^{\circ}3\hat{9}$ :

$$\begin{array}{r} 100x = 235^{\circ}555555\dots \\ 10x = 23^{\circ}555555\dots \\ \hline 90x = 212 \end{array}$$

Por lo tanto  $x = 2^{\circ}3\hat{9} = \frac{212}{90} = \frac{106}{45}$ .

31. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos:

- |                        |                         |                         |                         |                         |                         |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $0^{\circ}3\hat{9}$ | c) $0^{\circ}3\hat{9}$  | e) $42^{\circ}0\hat{9}$ | g) $0^{\circ}00\hat{9}$ | i) $3^{\circ}0\hat{2}5$ | k) $1^{\circ}2\hat{9}$  |
| b) $0^{\circ}6\hat{9}$ | d) $14^{\circ}0\hat{9}$ | f) $16^{\circ}9\hat{4}$ | h) $0^{\circ}0\hat{9}1$ | j) $3^{\circ}02\hat{9}$ | l) $1^{\circ}2\hat{5}0$ |

## FÓRMULA DE APLICACIÓN DIRECTA

La fracción generatriz de un número periódico es equivalente a:

$$\frac{\text{todas las cifras del número - las cifras no periódicas}}{\text{tantos 9 como cifras periódicas, tantos 0 como cifras decimales no periódicas}}$$

$$33^{\circ}4\hat{9}2 = \frac{33492 - 334}{990} = \frac{16579}{495}$$

32. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales, aplicando directamente la fórmula:

- |                  |                        |                         |                         |                         |                         |
|------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $1^{\circ}6$  | d) $2^{\circ}35$       | g) $10^{\circ}4\hat{2}$ | j) $24^{\circ}0\hat{9}$ | m) $3^{\circ}2$         | o) $5^{\circ}3\hat{9}$  |
| b) $7^{\circ}67$ | e) $10^{\circ}225$     | h) $4^{\circ}9$         | k) $2^{\circ}0\hat{2}5$ | n) $3^{\circ}2\hat{0}$  | p) $0^{\circ}1\hat{9}$  |
| c) $4^{\circ}25$ | f) $7^{\circ}0\hat{9}$ | i) $15^{\circ}1\hat{9}$ | l) $15^{\circ}1\hat{9}$ | ñ) $12^{\circ}1\hat{9}$ | q) $3^{\circ}0\hat{9}1$ |

33. Realiza las operaciones siguientes expresando los números en forma de fracción:

- |  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| a) $7^{\circ}2\hat{9} + 0^{\circ}0\hat{9}$ | b) $4^{\circ}7\hat{2} : 0^{\circ}2\hat{2}$ | c) $2^{\circ}1\hat{9} - 2^{\circ}0\hat{9}$ | d) $0^{\circ}75 + 0^{\circ}2\hat{5} - 1^{\circ}0\hat{9}$ |
|--|--|--|--|

## NOTACIÓN CIENTÍFICA

La **notación científica** es una forma de escribir los números que acomoda valores demasiado grandes (100 000 000 000) o pequeños ( $0^000\ 000\ 000\ 01$ ) para ser escritos de manera convencional.

Los números expresados en notación científica constan de dos factores:

- un número con una única cifra entera
- una potencia de base 10

Expresión convencional	Notación científica
400 000	$4 \cdot 10^5$
32 000 000	$3^2 \cdot 10^7$
$0^000\ 5$	$5 \cdot 10^{-4}$
$0^000\ 000\ 027$	$2^7 \cdot 10^{-8}$

34. Escribe en notación científica:

- a) 12 000 000      c)  $0^000\ 000\ 37$       e) 15 320 000 000      g)  $0^000\ 004\ 236$   
b) 365 800 000 000      d)  $0^004\ 075$       f) 1 320 000 000      h)  $0^000\ 000\ 017$

35. Escribe en notación decimal:

- a)  $3^24 \cdot 10^6$       b)  $4^26 \cdot 10^8$       c)  $5^78 \cdot 10^{-8}$       d)  $2^98 \cdot 10^{-7}$

36. Me han hecho un análisis de sangre, y el resultado dice que tengo 5 millones de glóbulos rojos en cada  $\text{mm}^3$ .

- a) Expresa en notación científica los glóbulos rojos que hay en cada  $\text{mm}^3$ .  
b) Expresa en notación científica los glóbulos rojos que tendré en total, teniendo en cuenta que tengo aproximadamente 4'5 litros de sangre.

37. Utiliza la calculadora para operar en notación científica:

- a)  $3 \cdot 10^{21} + 1^2 \cdot 10^{20}$       c)  $(1^0435 \cdot 10^{17}) \cdot (7^0286 \cdot 10^{-15})$   
b)  $2^025 \cdot 10^{-15} \cdot 3^017 \cdot 10^{-13}$       d)  $(5^025 \cdot 10^{12}) : (2^05 \cdot 10^9)$

38. Se estima que el volumen de agua de los océanos es de 1 285 600 000  $\text{km}^3$  y el volumen de agua dulce 35 millones de  $\text{km}^3$ .

Escribe esas cantidades en notación científica y expresa la proporción de agua dulce.

39. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente  $9^0109 \cdot 10^{-31}$  kg.

Teniendo en cuenta que el hidrógeno cuenta con un único electrón, ¿qué masa tiene el núcleo del átomo de hidrógeno?

## APROXIMACIÓN Y ERRORES

Las **cifras significativas** de una medida son las que aportan información relevante.

- Aproximación por **truncamiento**: Se ignoran las cifras no significativas.
- Aproximación por **redondeo**: Se observa la primera cifra no significativa.
  - Si es menor que 5, se actúa igual que por truncamiento.
  - Si está entre 5 y 9, se suma 1 a la última cifra significativa.

Valor exacto	Truncamiento a centésimas
$2^{00}$	$2^{033}$
$2^{00}$	$2^{066}$

Valor exacto	Redondeo a centésimas
$2^{00}$	$2^{033}$
$2^{00}$	$2^{067}$

40. Aproxima los siguientes números a las unidades de millar, por truncamiento y por redondeo:

- a) 3 125 345      b) 1 198 542      c) 15 738 928      d) 695 258

41. Aproxima los siguientes números a las décimas, por truncamiento y por redondeo:

- a)  $2^{09876}$       b)  $13^{09295}$       c)  $12^{00}$       d)  $7^{020}$       e)  $4^{0405}$       f)  $6^{00}$

42. Aproxima los siguientes números a las milésimas por truncamiento y por redondeo:

- a)  $2^{09876}$       b)  $13^{09295}$       c)  $12^{00}$       d)  $7^{020}$       e)  $4^{0405}$       f)  $6^{00}$

43. Aproxima los siguientes números a las décimas, por truncamiento y por redondeo:

- a)  $\frac{40}{3}$       b)  $\frac{7}{18}$       c)  $\frac{5}{6}$       d)  $\frac{5}{9}$       e)  $\sqrt[3]{7}$       f)  $\pi$

44. Aproxima los siguientes números a tres cifras significativas, por truncamiento y por redondeo:

- a)  $2^{0456705} \cdot 10^{16}$       c)  $5^{09534821} \cdot 10^{41}$       e)  $9^{00} \cdot 10^{12}$   
 b)  $1^{01332} \cdot 10^{27}$       d)  $7^{0402902} \cdot 10^{32}$       f)  $6^{002} \cdot 10^{11}$

Al aproximar asumimos un cierto margen de **error**.

También hay errores que no derivan del cálculo sino de la medición, pues ni siquiera las herramientas más precisas son totalmente exactas.

## ERROR ABSOLUTO

El **error absoluto** es la desviación con respecto al valor exacto, medido en valor absoluto (es decir, sin importar si el error es por exceso o por defecto).

$$e_a = |\text{valor exacto} - \text{valor aproximado}|$$

Cuando esa resta involucre fracciones, deberemos emplear la fracción generatriz del valor aproximado.

45. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las unidades de millar por truncamiento cada uno de los siguientes números.

- a) 4 345 734      b) 8 945 354      c) 22 873 996      d) 423 298

46. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las unidades de millar por redondeo cada uno de los siguientes números.

- a) 4 345 734      b) 8 945 354      c) 22 873 996      d) 423 298

47. **Razona** cuál de los dos métodos de aproximación te parece más útil.

48. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las décimas por redondeo cada uno de los siguientes números.

- a)  $4^{\circ}345$       b)  $27^{\circ}5695$       c)  $\frac{5}{6}$       d)  $\frac{5}{9}$       e)  $\frac{1}{30}$

49. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las milésimas por redondeo cada uno de los siguientes números, utilizando fracciones generatrices cuando sea conveniente.

- a)  $4^{\circ}32$       b)  $27^{\circ}58$       c)  $12^{\circ}02$       d)  $21^{\circ}34$       e)  $1^{\circ}16$

50. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las milésimas por redondeo cada uno de los siguientes números:

- a)  $4^{\circ}356702 \cdot 10^{15}$       c)  $6^{\circ}65348691 \cdot 10^{58}$       e)  $2^{\circ}9 \cdot 10^{19}$   
b)  $7^{\circ}51382 \cdot 10^{21}$       d)  $8^{\circ}400602 \cdot 10^{21}$       f)  $1^{\circ}62 \cdot 10^{32}$

## ERROR RELATIVO

No es lo mismo cometer un error 1 kg cuando pesas la harina de una tarta que cuando pesas un camión.

Por eso necesitamos una medida relativa que nos indique el error cometido en proporción al total, a la que llamaremos **error relativo**.

$$e_r = \frac{e_a}{\text{valor exacto}}$$



51. Calcula el error relativo cometido al redondear a las unidades de millar cada uno de los siguientes números.

a) 12 125 265

b) 3 729 613

c) 51 644 795

d) 234 512

52. Calcula el error relativo cometido al redondear a las décimas cada uno de los siguientes números.

a)  $7^{0.9834}$

b)  $25^{0.4219}$

c)  $\frac{7}{6}$

d)  $\frac{8}{9}$

e)  $\frac{16}{3}$

53. Calcula el error relativo cometido al redondear a las milésimas cada uno de los siguientes números, utilizando fracciones generatrices cuando sea conveniente.

a)  $3^{0.6}$

b)  $15^{0.84}$

c)  $7^{0.54}$

d)  $9^{0.45}$

e)  $1^{0.25}$

54. Calcula el error relativo cometido al aproximar a las milésimas por redondeo cada uno de los siguientes números:

a)  $9^{0.23451815} \cdot 10^{12}$

c)  $6^{0.65348691} \cdot 10^{62}$

e)  $2^{0.36789231} \cdot 10^{17}$

b)  $7^{0.36978212} \cdot 10^{33}$

d)  $8^{0.40301602} \cdot 10^{31}$

f)  $1^{0.54926724} \cdot 10^{25}$

# INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA

La estadística nos facilita herramientas para realizar suposiciones fundamentadas sobre un grupo grande de individuos observando solo unos pocos.

- Llamamos **población** al conjunto de *todos* los individuos sobre los que se realiza el estudio estadístico. Para conocer las características de la población completa es necesario realizar un **censo**.
- Llamamos **muestra** a un subconjunto de la población en el que se recogen los datos del estudio, a partir de los cuales se pretende deducir características de toda la población.

1. Indica cuál es la población y cuál la muestra:

- a) Se va a realizar un estudio estadístico para decidir si conviene construir un nuevo polideportivo en una ciudad de 426 873 habitantes. Como preguntar a todas las personas es muy costoso, solo se preguntará a 1 258 habitantes de diferentes barrios.
- b) En un gimnasio deciden preguntar a sus 200 socios sus propuestas para actividades.
- c) Para hacer un estudio sobre los gustos musicales de los alumnos de 12 años de una ciudad, se ha escogido a 125 niños de esa edad.

2. En un estudio sobre la duración de las bombillas que fabrica una empresa, ¿crees conveniente estudiar toda la población? ¿Por qué?

## TIPOS DE VARIABLES

La variable estadística es la característica estudiada.

- Variable **cualitativa** es la que expresa una cualidad, que no se puede cuantificar.
- Variable **cuantitativa** es la que se expresa numéricamente.

3. Indica cuáles de las siguientes variables son cuantitativas y cuales son cualitativas:

- a) Comida favorita.
- b) Profesión que te gusta.
- c) Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada.
- d) Número de alumnos de tu instituto.
- e) El color de los ojos de tus compañeros de clase.
- f) Cociente intelectual de los miembros de tu familia.

4. Da tres ejemplos de variables cualitativas y tres de variables cuantitativas.

Las variables cuantitativas, a su vez, se pueden clasificar en dos tipos:

- **discreta** si solo puede tomar valores aislados.  
Por ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ...
- **continua** si puede tomar valores dentro de un intervalo.  
Por ejemplo: todos los números decimales entre 0 y 1.



Una variable continua no puede ser medida con exactitud pues el valor observado depende de la precisión de los instrumentos de medición. Ese hecho no debe llevarnos a confundirla con una variable discreta.

5. Indica cuáles de las siguientes variables cuantitativas son discretas y cuales son continuas:

- a) Número de manzanas vendidas cada día en una frutería.
- b) Temperaturas registradas cada hora en un observatorio.
- c) Período de duración de un automóvil.
- d) El diámetro de las ruedas de varios coches.
- e) Número de hijos de 50 familias.
- f) Censo anual de los españoles.

6. Indica cuáles de las siguientes variables son cualitativas, cuáles son cuantitativas discretas y cuáles cuantitativas continuas.

- a) El número de hijos de una familia.
- b) Número de personas que llegan a un consultorio en una hora.
- c) El número de árboles que hay en un parque.
- d) El número de canales de televisión que tienes en casa.
- e) Cantidad de empleados que trabajan en una tienda.
- f) Número de libros vendidos cada mes en Amazon.
- g) Número de clientes que visitan un supermercado por día.
- h) El color favorito de cada persona.
- i) El peso de una persona.
- j) La velocidad a la que va a un tren.
- k) Longitud en centímetros de un tenedor.
- l) La cantidad de dedos que tienes en la mano.
- m) El número de faltas en un partido de fútbol.
- n) El volumen de cerveza en una jarra.
- ñ) La nacionalidad de los jugadores de un equipo.
- o) Peso de las vacas en una granja.
- p) Tiempo que esperas al amor de tu vida.

- q) Distancia que recorren los autos en una ciudad.
- r) Red social más utilizada por cada persona.
- s) Número de animales en una granja.
- t) El diámetro de una esfera.
- u) La estatura de tu mejor amigo.
- v) El ancho de una pelota de fútbol.
- w) Volumen de agua en una piscina.
- x) Tiempo que demora el repartidor de una pizzería en entregar un pedido.
- y) Velocidad a la que viaja un avión.
- z) Modelo de coche más vendido de un concesionario.

## TABLAS DE FRECUENCIAS

En un estudio estadístico, tras recoger los datos se cuentan y se agrupan.

En una tabla de frecuencias se representan *ordenados* los valores que toma la variable estadística ( $x_i$ ) con las distintas frecuencias asociadas:

- **frecuencia absoluta** ( $n_i$ ): número de veces que aparece  $x_i$  en el recuento.
- **frecuencia relativa** ( $f_i$ ): proporción de veces que aparece  $x_i$  en el recuento. Puede expresarse como fracción  $\frac{n_i}{n}$ , donde  $n$  es el total de datos, o bien como porcentaje.
- **frecuencia absoluta acumulada** ( $N_i$ ): es la suma de las frecuencias absolutas de valores menores o iguales que  $x_i$ .
- **frecuencia relativa acumulada** ( $F_i$ ): es la suma de las frecuencias relativas de valores menores o iguales que  $x_i$ . Puede expresarse como fracción o bien como porcentaje.

Preguntamos a una serie de personas de cuántos automóviles dispone su familia:

1 0 1 1 2 2 1 1 2 1 1 1 3 0 2 2 1 1 2 2

Y creamos una tabla de frecuencias:

recuento de casos	$x_i$	$n_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$
	0	2	$\frac{2}{20} = 0^01 = 10\%$	2	$\frac{2}{20} = 10\%$
	1	10	$\frac{10}{20} = 0^05 = 50\%$	2 + 10 = 12	$\frac{12}{20} = 60\%$
	2	7	$\frac{7}{20} = 0^035 = 35\%$	12 + 7 = 19	$\frac{19}{20} = 95\%$
	3	1	$\frac{1}{20} = 0^005 = 5\%$	19 + 1 = 20	$\frac{20}{20} = 100\%$
comprobamos los totales	Total	20	1 = 100%		

vamos añadiendo valores de la columna  $n_i$

7. Durante el mes de junio, en una ciudad se han registrado las siguientes temperaturas máximas. Elabora con ellas una tabla de frecuencias.

32 31 28 29 33 32 31 30 31 31  
 27 28 29 30 32 31 31 30 30 29  
 29 30 30 31 30 31 34 33 33 29

8. Se le pidió a un grupo de personas que indiquen su color favorito. Elabora con ellos una tabla de frecuencias.

negro azul amarillo rojo azul azul rojo negro amarillo rojo  
 rojo amarillo amarillo azul rojo negro azul rojo negro amarillo

9. Un dentista observa el número de caries en 100 niños y resume la información en la siguiente tabla. Complétala con los datos que faltan.

Nº caries	$n_i$	$f_i$
0	25	0.25
1	20	0.2
2		
3	15	0.15
4		0.05

10. En mi pueblo viven 1 100 familias. El 40% de las familias tiene un solo hijo, el 35% ninguno, el 11% dos hijos y el resto más de dos.

a) Calcula cuántas familias tienen ninguno, uno, dos o más hijos.

b) Elabora una tabla de frecuencias con los datos obtenidos, y comprueba que los porcentajes coinciden con los del enunciado.

11. Hemos preguntado a un grupo de personas cuántas horas practicaban deporte a la semana. Elabora una tabla de frecuencias.

2 1 4 2 3 2 1 0 1 3  
 7 2 9 0 2 1 3 3 3 2  
 2 3 3 3 3 3 4 3 3 2

12. Realizamos un estudio para conocer el número de televisores que hay en cada vivienda en una determinada zona de la ciudad. Elabora una tabla de frecuencias.

1 1 2 2 2 2 0 0 4 3  
 2 3 4 3 4 1 1 1 2 0  
 3 4 2 2 4 4 2 1 4 1  
 1 1 2 2 2 2 1 1 1 2  
 2 1 1 3 3 1 1 2 2 1

Cuando trabajamos con variables cualitativas continuas solemos agrupar los valores en distintos intervalos, a los que llamaremos **clases**, y construir nuestra tabla de frecuencias de modo exactamente análogo.

La única diferencia que merece la pena notar es que al calcular parámetros podemos necesitar un valor numérico que represente al intervalo y para ello tomaremos la **marca de clase**, es decir, el valor central del intervalo.

Los alumnos de un centro, en rangos de edades.

clase	$x_i$	$n_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$
[12 14)	13	148	$\frac{148}{350} = 42\%$	148	42 %
[14 16)	15	133	$\frac{135}{350} = 38\%$	281	80 %
[16 18)	17	62	$\frac{62}{350} = 18\%$	343	98 %
[18 20)	19	7	$\frac{7}{350} = 2\%$	350	100 %
Total		350	1 = 100 %		

13. Hemos preguntado a la salida de un supermercado cuanto se han gastado en la compra:

26'45 43'91 22'15 29'03 31'25 34'21 25'12 21'34 28'76 26'51

Agrupar los datos de 5 en 5 a partir de los 20 euros, y haz la tabla de frecuencias.

14. Se han medido los pesos de un grupo de recién nacidos, y los resultados en kilos han sido los siguientes:

3'2 3'1 2'8 2'9 3'3 3'2 3'1 3'0 3'1 3'1  
 3'7 3'8 2'9 3'0 3'2 3'1 3'1 3'0 3'0 3'4  
 3'9 3'0 3'5 3'6 3'8 3'3 3'4 3'3 3'3 3'7

Elabora una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos de 200 gramos.

15. Los datos que se dan a continuación corresponden a los pesos en kilos de ochenta personas:

60 66 77 70 66 68 57 70 66 52  
 75 65 69 71 58 66 67 74 61 63  
 69 80 59 66 70 67 78 75 64 71  
 81 62 64 69 68 72 83 56 65 74  
 67 54 65 65 69 61 67 73 57 62  
 67 68 63 67 71 68 76 61 62 63  
 76 61 67 67 64 72 64 73 79 58  
 67 71 68 59 69 70 66 62 63 66

a) Elabora una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos de 5 kg.

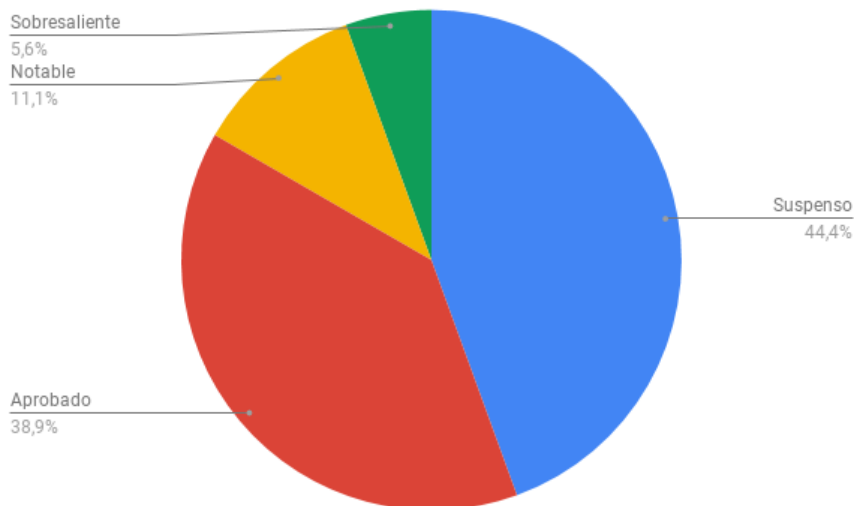
b) Calcula el porcentaje de personas de peso menor que 65 kg.

c) Calcula el porcentaje de personas de peso mayor o igual que 70 Kg pero menor que 85 kg.

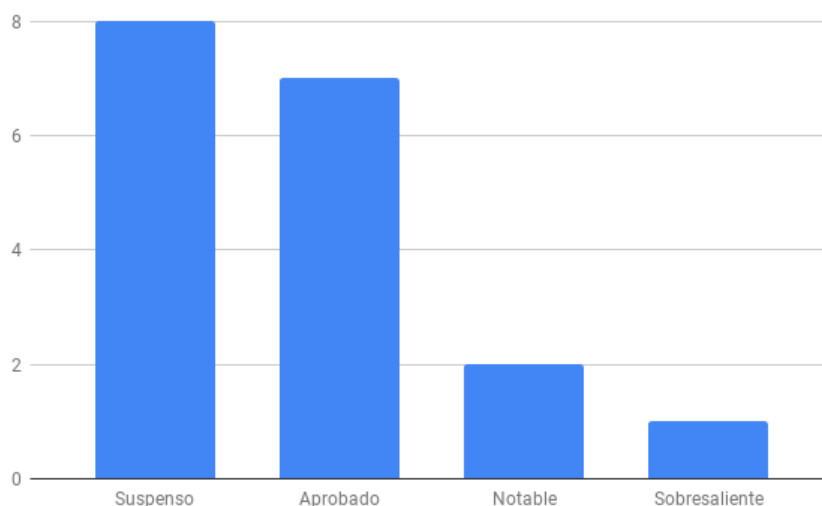
## GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Para presentar de modo visual los datos estadístico podemos apoyarnos en distintos tipos de gráficos:

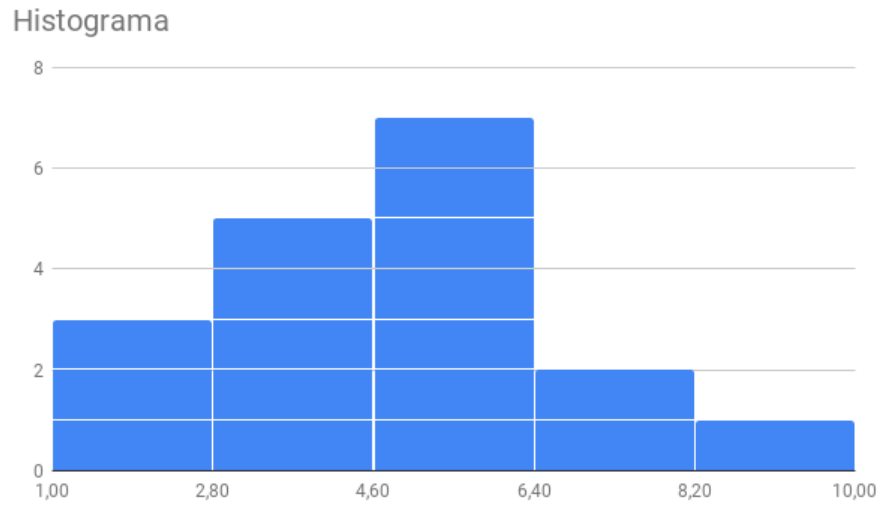
- Para representar variables cualitativas frecuentemente se utiliza un **gráficos de sectores circulares**, en el que a cada valor se le asigna un sector de tamaño proporcional a su frecuencia.



- Para representar variables cualitativas y cuantitativas discretas se puede utilizar un **diagrama de barras** en el que a cada valor se le asigna una barra de tamaño proporcional a su frecuencia.



- Para representar variables cuantitativas con datos agrupados se puede utilizar un **histograma**, similar a un diagrama de barras en el que la base de cada barra corresponde con todo un intervalo.



16. Crea gráficos estadísticos adecuados para las tablas de frecuencias de los ejercicios del apartado anterior.



# PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

## PARÁMETROS DE POSICIÓN

Los parámetros de posición nos permiten obtener información simplificada de una variable estadística.

### MODA

La **moda** ( $M_0$ ) es el valor más frecuente de la variable.

Ten en cuenta que algunas variables pueden tener más de una moda.

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

La moda de estos datos es  $M = 5$ , porque es el valor que más veces se repite.

1. Las alturas de los miembros de la familia son: 1'72, 1'85, 1'65, 1'65 y 1'58. Halla la moda.
2. Mis notas de clase son: 4, 4'5, 5, 4, 5'5, 4, 6, 4, 5 y 6'5. Halla la moda.
3. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la moda.

4. Halla la moda de las variables del tema anterior.

### MEDIA

La **media aritmética simple** ( $\bar{x}$ ) es el resultado de sumar todos los valores posibles y dividirlo entre el número de datos.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

En total tenemos 10 datos, así que los sumamos todos y dividimos entre 10.

$$\bar{x} = \frac{4 + 4 + 3'5 + 5 + 4'5 + 3 + 5 + 6 + 3'5 + 5}{10} = 4'35$$

5. Las alturas de los miembros de la familia son: 1'72, 1'85, 1'65, 1'65 y 1'58. Calcula la media.
6. Mis notas de clase son: 4, 4'5, 5, 4, 5'5, 4, 6, 4, 5 y 6'5. Calcula la media.

7. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la media.

Si trabajamos a partir de una tabla de frecuencias, en lugar de sumar un valor  $n_i$  veces podemos multiplicar  $x_i \cdot n_i$ .

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + \dots + x_m f_m}{n}$$

$x_i$	$n_i$	$f_i$
0	2	$\frac{2}{20} = 10\%$
1	10	$\frac{10}{20} = 50\%$
2	7	$\frac{7}{20} = 35\%$
3	1	$\frac{1}{20} = 5\%$
Total	20	1 = 100%

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1}{20} = 1,35$$

8. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

$x_j$	0	1	2	3	4
$n_j$	16	32	12	4	1

a) ¿Cuál es la moda?

b) Calcula la media.

9. Calcula la media de las variables *cuantitativas* del tema anterior.

La **media ponderada** es otro tipo de media utilizado muy frecuentemente, en el que cada valor  $x_j$  se multiplica por su peso (es decir, la importancia que tiene respecto al total) y se divide entre la suma de los pesos.

$$\bar{x} = \frac{x_1 p_1 + \dots + x_n p_n}{p_1 + \dots + p_n}$$

10. En una asignatura, la cualificación se calcula como el 80% de la nota de exámenes, el 10% la nota de las tareas de clase y casa y otro 10% la actitud respecto al trabajo.
- Halla la cualificación de un alumno que obtuvo un 5 en los exámenes, pero tiene un 0 en las tareas y otro 0 en el trabajo.
  - Halla la cualificación de otro alumno que obtuvo un 4 en los exámenes, pero tiene la nota máxima en tareas y trabajo.

## MEDIANA

---

La **mediana** es el valor central de la variable, obtenida tras ordenar todos los valores de menor a mayor.

- Si los datos son impares es sencillo, pues al ordenarlos de menor a mayor es evidente cuál es el valor central.
- Si los datos son pares habrá dos valores centrales, así que hallamos la media aritmética simple de ambos.

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

Antes de nada, tenemos que ordenar los datos de menor a mayor.

3 3'5 3'5 4 4 4'5 5 5 5 6

Como en el centro hay dos números, les hacemos la media aritmética:

$$Me = \frac{4 + 4'5}{2} = 4'25$$

11. Las alturas de los miembros de la familia son: 1'72, 1'85, 1'65, 1'65 y 1'58. Calcula la mediana.
12. Mis notas de clase son: 4, 4'5, 5, 4, 5'5, 4, 6, 4, 5 y 6'5. Calcula la mediana.
13. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la mediana.
14. Calcula la mediana de las variables *cuantitativas* del tema anterior. Compáralo con la media y la moda.

## CUARTILES

---

Si la mediana se obtiene dividiendo la lista de datos ordenados a la mitad, los **cuartiles** se obtienen dividiéndola en cuartos de forma análoga.

- $Q_1$  es el primer cuartil, hay un cuarto de valores menores que él.
- $Q_2$  es el segundo cuartil. Coincide con la mediana.
- $Q_3$  es el tercer cuartil, hay un cuarto de valores mayores que él.

3 3'5 3'5 4 4 4'5 5 5 5 6

Como en total hay 10 datos al partir a la mitad nos quedan 5 datos a la izquierda y 5 datos a la derecha, por eso  $Q_2 = Me = 4^{o}25$ .

Al repartir esos 5 nuevamente en dos mitades, el valor central será  $Q_1$  y  $Q_3$  respectivamente.

3 3'5 3'5 4 4 | 4'5 5 5 5 6  
 $Q_1 = 3^{o}5$        $Q_3 = 5$

15. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Halla los cuartiles.

16. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

$x_j$	0	1	2	3	4	Halla los cuartiles.
$n_j$	16	32	12	4	1	

17. Calcula los cuartiles de las variables *cuantitativas* del tema anterior.

## PARÁMETROS DE DISPERSIÓN

Si los parámetros de posición nos dan una idea de dónde está el centro, los parámetros de posición nos indican si la mayoría de los datos están próximos a ese centro o repartidos a mayor distancia.

### RANGO

El **rango o recorrido** es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor.

El **rango intercuartílico** es la diferencia entre el tercer cuartil y el primero.

3 3'5 3'5 4 4 | 4'5 5 5 5 6  
 $R = 6$      $3 = 3$        $R_I = 5$      $3^{o}5 = 1^{o}5$

18. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Halla el rango y el rango intercuartílico.

19. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

$x_j$	0	1	2	3	4	a) Halla el rango.	b) Halla el rango intercuartílico.
$n_j$	16	32	12	4	1		

20. Halla el rango y el rango intercuartílico de las variables *cuantitativas* del tema anterior.

## VARIANZA

Llamamos **desviación respecto a la media** a la diferencia entre cada dato y la media, es decir,  $x_i - \bar{x}$ .

La **varianza** ( $s^2$ ) es la media de los cuadrados de las desviaciones.

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Si desarrollamos los cuadrados y reorganizamos los sumandos del numerador, podemos expresar la varianza de esta otra forma:

$$s^2 = \frac{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}{n} - (\bar{x})^2$$

Y, por supuesto, si trabajamos a partir de una tabla de frecuencias en lugar de sumar un valor  $n_i$  veces podemos multiplicarlos por  $n_i$ .

$x_i$	$n_i$	$f_i$
0	2	$\frac{2}{20} = 10\%$
1	10	$\frac{10}{20} = 50\%$
2	7	$\frac{7}{20} = 35\%$
3	1	$\frac{1}{20} = 5\%$
Total	20	1 = 100%

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1}{20} = 1.35$$

$$s^2 = \frac{0^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 10 + 2^2 \cdot 7 + 3^2 \cdot 1}{20} - 1.35^2$$

$$= 2.35 - 1.8225 = 0.5275$$

## DESVIACIÓN TÍPICA

La **desviación típica** ( $s$ ) es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$s = \sqrt{s^2}$$

21. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la varianza y la desviación típica.

22. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

$x_i$	0	1	2	3	4
$n_i$	16	32	12	4	1

Calcula la varianza y la desviación típica.

23. Calcula la varianza y desviación típica de las variables *cuantitativas* del tema anterior.

## DIAGRAMAS DE CAJAS Y BIGOTES

Los diagramas nos permiten describir varias características importantes al mismo tiempo de un modo visual, de forma análogo a los gráficos estadísticos que nos permiten «ver» los datos de un solo vistazo.

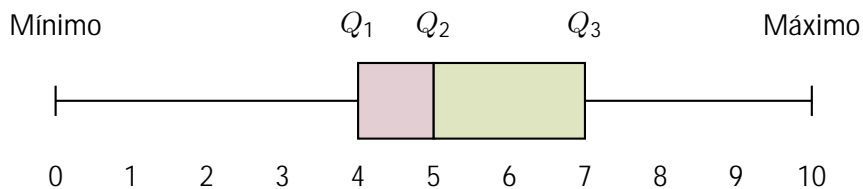
Los **diagramas de caja y bigotes** (también llamados *boxplots*) se centran en dos aspectos: la dispersión y la simetría.

Para su realización se representan la mediana, los cuartiles y el rango de los datos sobre un rectángulo, alineado horizontal o verticalmente.

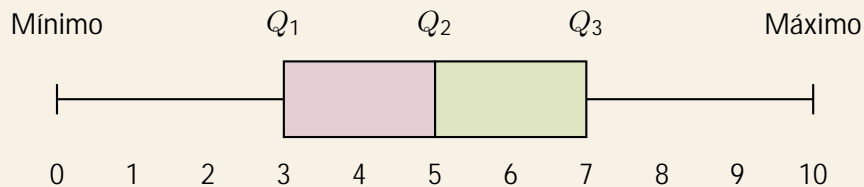
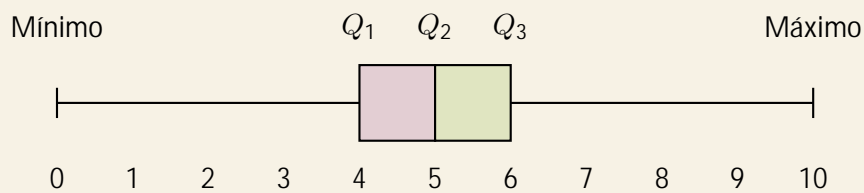
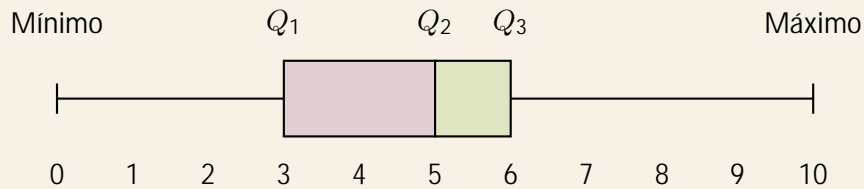
Un grupo de 20 alumnos ha conseguido las siguientes cualificaciones en una prueba:

0 2'75 3 3'5 3'75 4'25 4'5 4'5 4'75 5  
5 5'25 5'5 6'5 6'5 7'5 8 8 9 10

Que podemos representar gráficamente como:



24. Los siguientes diagramas representan las notas en diferentes grupos. Interpretálos.



25. Elabora los diagramas de cajas y bigotes de las variables *cuantitativas discretas* del tema anterior.

# POLINOMIOS

Una **expresión algebraica** es un conjunto de cantidades numéricas y literales relacionadas entre sí mediante operaciones.

Las letras que utilizamos no son más que signos para representar cantidades desconocidas, por eso las llamamos **incógnitas**.

Mi hermano tiene un año menos que yo, y mi tía el triple de edad que él.

Mi edad	!	$x$
La edad de mi hermano	!	$x - 1$
La edad de mi tía	!	$3(x - 1)$

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado obtenido al sustituir las variables por un número determinado.

$$x^2 = 1^2 = 1 \quad x^3 = 1^3 = 1 \quad \text{para } x = 1 \quad ! \quad (x - 1)^2 = (1 - 1)^2 = 0 \quad (x - 1)^3 = (1 - 1)^3 = 0$$

1. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

a)  $3x + 7$  para  $x = 2$

d)  $\frac{a + 2}{a^2}$  para  $a = -1$

b)  $x^2 - 1$  para  $x = \frac{2}{3}$

e)  $x - y + 3$  para  $x = 2, y = 5$

c)  $t - (t - 1)$  para  $t = 0^{\circ}5$

f)  $x - (y + 3)$  para  $x = 2, y = 5$

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de varios monomios no semejantes, a los que llamamos **términos**.

Cada uno de los términos tiene un **grado**, que corresponde al exponente de su incógnita (si solo tiene una) o a la suma de los exponentes de todas las incógnitas (si tiene varias).

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 7x + 17$$

A los polinomios se les suele nombrar con una letra mayúscula y, entre paréntesis, las incógnitas involucradas en él.

- El **grado** de un polinomio es el mayor de los grados de sus términos.
- El **término principal** es aquel de mayor grado.
- El **término independiente** es aquel de grado cero.

2. Identifica el término independiente, el término principal y el grado de los siguientes polinomios:

a)  $x^4 + 2x^2 - 3x + 7$

e)  $x^2 + x^3$

i)  $0^0 4x^5 - 3^0 5x^2 + 0^0 12$

b)  $5x^3 - 7x^3 + 111$

f)  $5x^{10} + x^9 - 4x^4$

j)  $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

c)  $4x^3 - 2x$

g)  $xy + 7x - 2y + 4$

k) 15

d)  $7x^2 + 12x - 1$

h)  $3x^2 + 2x^5 + 8$

l)  $2^3 x^8 + 3^7 x^5 + 12^{15}$

3. Ordena los siguientes polinomios de tal modo que el grado de sus términos sea descendiente:

a)  $x^4 + 4$

c)  $2x^4 + 2$

e)  $5x^2 + 3x - 11x^5 + 2$

b)  $1 + x^4 + 2x^2$

d)  $3 + 7x^6$

f)  $12x + 1 - x^2$

## OPERACIONES CON POLINOMIOS

### SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

En las sumas (o restas) de polinomios se suman (o restan) los monomios semejantes que los componen.

$$\begin{array}{r}
 P(x) = \quad \quad \quad x^2 + 7x - 2 \\
 Q(x) = \quad 12x^3 \quad \quad + 4x - 9 \\
 \hline
 P(x) + Q(x) = 12x^3 + x^2 + 3x - 7
 \end{array}$$

4. Dados los polinomios  $P(x) = 6x^2 + 5x - 5$ ,  $Q(x) = 3x^2 - 6x + 7$ ,  $R = 3x^2 - 2$ , realiza las siguientes operaciones:

a)  $P(x) + Q(x)$

d)  $P(x) - R(x)$

g)  $P(x) + Q(x) + R(x)$

b)  $P(x) - Q(x)$

e)  $Q(x) + R(x)$

h)  $P(x) - Q(x) + R(x)$

c)  $P(x) + R(x)$

f)  $Q(x) - R(x)$

i)  $Q(x) - R(x) - P(x)$

5. Halla el valor numérico de las expresiones algebraicas anteriores cuando  $x = 0$ .

6. Dados los polinomios  $P(x) = x^2 + 2x + 7$ ,  $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$ ,  $R = 4x^2 - 5$ , realiza las siguientes operaciones:

a)  $P(x) + Q(x)$

d)  $P(x) - R(x)$

g)  $P(x) + Q(x) + R(x)$

b)  $P(x) - Q(x)$

e)  $Q(x) + R(x)$

h)  $P(x) - [Q(x) + R(x)]$

c)  $P(x) + R(x)$

f)  $Q(x) - R(x)$

i)  $Q(x) - [R(x) - P(x)]$

7. Halla el valor numérico de las expresiones algebraicas anteriores cuando  $x = \frac{1}{2}$ .



## MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

En el producto de un polinomio por un monomio se aplica la propiedad distributiva, es decir, se multiplica cada término del polinomio por el monomio.

$$3x^2 (4x^3 - 2x) = 3x^2 \cdot 4x^3 - 3x^2 \cdot 2x = 12x^5 - 6x^3$$

8. Realiza las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{lll} a) 4(2x^3 + 3x^2 - 5x + 1) & c) 2x(15x^3 + 6x^2 - \frac{1}{2}x) & e) \frac{1}{3}x^2(15x^3 + 6x^2 - 9) \\ b) (-5)(8x^4 + x^2 - 3x + 1) & d) (-10x^3)(0^0 1x^2 - x + 10) & f) \frac{4}{3}x(\frac{6}{4}x^5 - \frac{9}{4}x^3 - \frac{1}{3}) \end{array}$$

En los productos de polinomios se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio. La expresión obtenida debe simplificarse sumando los monomios semejantes que se obtengan.

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^2 + 3x - 1 \\ Q(x) &= 5x + 7 \\ P \cdot Q(x) &= 10x^3 + 7x^2 + 15x^2 + 21x - 5x - 7 \\ &= 10x^3 + 22x^2 + 16x - 7 \end{aligned}$$

9. Realiza las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{lll} a) (x + 1)(x + 2) & c) (-5x + 7)(x^2 - 2) & e) (x^2 - 1)(x^3 + x - 1) \\ b) (2x + 3)(4x - 1) & d) (2x^2 + 1)(3x^3 - 5) & f) (3x^3 + \frac{1}{2})(2x^4 - 6x) \end{array}$$

10. Realiza las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{ll} a) (x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 2) & d) (2x^2 - 8x + 1)(3x^3 + 8x - 5) \\ b) (2x^3 - 5x + 3)(4x^2 + 5x - 1) & e) (x^4 - 2x^2 + 3)(3x^2 + 7x - 4) \\ c) (-5x^3 + 7x^2 + 1)(4x^2 - 7x - 2) & f) (x^4 + 3x)(x^4 - 3x) \end{array}$$

11. Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas anteriores cuando  $x = \frac{2}{3}$ .

12. Realiza las siguientes operaciones, teniendo en cuenta que una potencia es la multiplicación de un factor por sí mismo tantas veces como indica el exponente:

$$\begin{array}{llll} a) (x + 1)^2 & c) (2x + 1)^2 & e) (3x + 4)^2 & g) (\frac{1}{3}x + \frac{2}{5})^2 \\ b) (x - 1)^2 & d) (2x - 1)^2 & f) (3x - 4)^2 & h) (\frac{1}{3}x - \frac{2}{5})^2 \end{array}$$

## IDENTIDADES NOTABLES



El cuadrado de la suma NO es igual a la suma de los cuadrados.  
El cuadrado de la resta NO es igual a la resta de los cuadrados.

Para calcular el cuadrado de una suma, debemos multiplicar la suma por sí misma. Si lo hacemos mediante el procedimiento habitual del producto observamos claramente que obtenemos tres términos, que siempre tienen la siguiente relación:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

13. Desarrolla utilizando identidades notables:

a)  $(3x + 4)^2$

e)  $(x^3 + 7x^2)^2$

i)  $(3x^3 + 4x^6)^2$

b)  $(8x + 5)^2$

f)  $(4x^4 + 3x^3)^2$

j)  $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3})^2$

c)  $(5 + 2x)^2$

g)  $(9x^5 + 7x^3)^2$

k)  $(\frac{1}{4}x + \frac{3}{8})^2$

d)  $(3x^2 + 5x)^2$

h)  $(x^6 + x^4)^2$

l)  $(\frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{3})^2$

Para calcular el cuadrado de una resta procedemos de modo análogo:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

14. Desarrolla utilizando identidades notables:

a)  $(3x - 4)^2$

e)  $(x^3 - 7x^2)^2$

i)  $(3x^3 - 4x^6)^2$

b)  $(8x - 5)^2$

f)  $(4x^4 - 3x^3)^2$

j)  $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3})^2$

c)  $(5 - 2x)^2$

g)  $(9x^5 - 7x^3)^2$

k)  $(\frac{1}{4}x - \frac{3}{8})^2$

d)  $(3x^2 - 5x)^2$

h)  $(x^6 - x^4)^2$

l)  $(\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3})^2$

Existe otra identidad notable que se corresponde al producto de una suma por una resta que tienen términos análogos.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

15. Desarrolla utilizando identidades notables:

a)  $(3x + 4)(3x - 4)$

e)  $(x^3 + 7x^2)(x^3 - 7x^2)$

i)  $(3x^3 + 4x^6)(3x^3 - 4x^6)$

b)  $(8x + 5)(8x - 5)$

f)  $(4x^4 + 3x^3)(4x^4 - 3x^3)$

j)  $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3})(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3})$

c)  $(5 + 2x)(5 - 2x)$

g)  $(9x^5 + 7x^3)(9x^5 - 7x^3)$

k)  $(\frac{1}{4}x + \frac{3}{8})(\frac{1}{4}x - \frac{3}{8})$

d)  $(3x^2 + 5x)(3x^2 - 5x)$

h)  $(x^6 + x^4)(x^6 - x^4)$

l)  $(\frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{3})(\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3})$

La utilidad principal de las identidades notables es la descomposición de polinomios complejos en potencias o productos de binomios.

16. Halla la identidad notable que corresponde a cada polinomio:

a)  $25x^2 + 20x + 4$

d)  $100x^4 + 100x^2 + 25$

g)  $\frac{4}{25}x^2 + 2x + \frac{25}{4}$

b)  $64x^2 - 96x + 36$

e)  $9x^6 - 12x^5 + 4x^4$

h)  $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$

c)  $100x^2 - 16$

f)  $49x^8 - 25x^4$

i)  $\frac{100}{49}x^2 - \frac{1}{9}$

17. Comprueba si los siguientes polinomios corresponden a una identidad notable, y en caso afirmativo hállala:

a)  $x^2 + 6x - 3$

c)  $25x^2 - 10x + 1$

e)  $9x^5 - 6x^3 + 1$

b)  $4x^2 + 20x + 9$

d)  $9x^4 - \frac{1}{4}$

f)  $0^0 1x^4 + 2x^2 + 100$

## DIVISIÓN DE POLINOMIOS

En los cocientes de un polinomio entre un monomio se divide cada término entre el monomio.

$$(12x^5 - 6x^3) : 3x^2 = 12x^5 : 3x^2 - 6x^3 : 3x^2 = 4x^3 - 2x$$

18. Realiza las siguientes operaciones:

a)  $(4x^3 + 7x^2 - 8x) : x$

f)  $(2x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 12x) : (-2x)$

b)  $(18x^3 - 27x^2 - 30x + 81) : 3$

g)  $(-36x^{12} + 24x^8 - 48x^4) : (-12x^4)$

c)  $(6x^8 + 12x^5) : (3x^3)$

h)  $(x^4 + 6x^3 - 7x^2) : (2x)$

d)  $(4x^4 - 16x^3 + 8x^2) : 2x^2$

i)  $(\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{5}{2}x) : (\frac{1}{2}x)$

e)  $(10x^4 + 20x^3 - 15x^2) : (5x)$

j)  $(2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + x^3) : (\frac{2}{3}x^2)$

## EXTRACCIÓN DE FACTOR COMÚN

Si los términos de un polinomio tienen divisores comunes puede aplicarse la propiedad distributiva para expresarlo como producto de un **factor común** por un polinomio de grado menor.

$$\begin{aligned} A &= 8x^4 + 2x^3 - 6x \\ &= 2x(4x^3 + x^2 - 3) \end{aligned}$$

19. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

$$a) x^5 + 7x^3 - 4x^2$$

$$b) 2x^3 + 12x + 8$$

$$c) 3x^2 - 5x$$

$$d) 2x^4 + 8x^2 - 4x$$

$$e) 75x^4 + 15x^3 - 25x^2$$

$$f) 9x^5 + 6x^4 - 12x^3$$

$$g) \frac{x}{5} - \frac{x^2}{2}$$

$$h) \frac{3}{16}x^4 - \frac{3}{8}x^3 + \frac{9}{4}$$

$$i) 2x^2 + 3xy$$

## DIVISIÓN EN CAJA

Para dividir un polinomio entre otro podemos emular el mismo método que utilizamos para dividir números. Para ello es fundamental colocar los términos de ambos polinomios ordenados y dejar un hueco para aquellos términos nulos que pudiese haber en el dividendo.

$$2x^3 + x^2 + 0x \quad 1 \overline{) x^2 - 3}$$

Primero hemos de preguntarnos por qué monomio he de multiplicar el divisor para obtener el mayor de los términos del dividendo.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 \\ 1 \overline{) x^2 - 3} \\ \underline{2x} \end{array} \quad \leftarrow \text{Al multiplicar } 2x \text{ por } x^2 \text{ obtendremos } 2x^3$$

A continuación multiplicamos el término hallado por todo el divisor, y lo restaremos del dividendo. Para asegurarnos de hacer la resta correctamente, colocamos cada término debajo de aquel que tenga el mismo grado.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 \\ 2x^3 \quad + 6x \\ \hline x^2 + 6x \quad 1 \end{array} \quad 1 \overline{) x^2 - 3} \quad \begin{array}{l} \underline{2x} \\ 2x(x^2 - 3) = 2x^3 - 6x \end{array}$$

cambiamos el signo para restar

Repetimos el procedimiento paso a paso hasta llegar a un polinomio de grado inferior al divisor. Ese es el resto.

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 \\ 2x^3 \quad + 6x \\ \hline x^2 + 6x \quad 1 \\ x^2 \quad + 3 \\ \hline 6x + 2 \end{array} \quad 1 \overline{) x^2 - 3} \quad \begin{array}{l} \underline{2x} \\ 2x(x^2 - 3) = 2x^3 - 6x \end{array}$$

resto

20. Realiza las siguientes divisiones, identifica el cociente y el resto:

$$a) (x^3 - x^2 - 17x + 20) : (x - 4)$$

$$d) (4x^3 - 3x^2 + x + 5) : (2x + 3)$$

$$b) (6x^3 + x^2 + x + 2) : (3x + 2)$$

$$e) (x^3 - 7x^2 + 6) : (x^2 - 5x + 1)$$

$$c) (4x^4 - 3x^2 + 2x - 3) : (x^2 + 2x - 1)$$

$$f) (x^3 - 5x^2) : (x - 5)$$

21. Realiza las siguientes divisiones, operando cuidadosamente las expresiones racionales:

$$a) (3x^3 - 4x^2 + 5x + 2) : \left(\frac{x}{2} - 1\right)$$

$$c) (3x^3 - 2x^2 + 12x + 8) : x - \frac{2}{3}$$

$$b) (3x^3 + 8x^2 + 2x - 4) : (x + 2)$$

$$d) (6x^4 - 11x^2 + 5) : (x^2 - 1)$$

## REGLA DE RUFFINI

La **regla de Ruffini** es un método que permite dividir de forma sencilla un polinomio cualquiera entre binomios de la forma  $x - a$ , siendo  $a$  un número conocido.

Para ello primero escribiremos los coeficientes del dividendo (asegurándonos de poner un 0 como coeficiente de los términos nulos) y el valor de  $a$  a su izquierda.

Veámoslo con un ejemplo: Efectuaremos la división  $(2x^3 + x^2 - 1) : (x - 3)$ .

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & 0 & 1 \\ \text{entre } (x - 3) \longrightarrow 3 & & & & \end{array} \quad \longleftarrow \text{coeficientes del dividendo}$$

Bajamos el coeficiente más a la izquierda, lo multiplicamos por  $a$  y colocamos el resultado en la siguiente columna.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & \downarrow & 6 & & \\ & 2 & 3 & & \end{array}$$

A continuación sumamos los dos números de la columna, y nuevamente multiplicamos por  $a$  para obtener el valor siguiente.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & & 6 & 21 & \\ & 2 & 7 & 3 & \end{array}$$

Repetimos el procedimiento hasta llegar a la última columna.

El último valor que obtenemos es el resto de la división, los anteriores corresponden a los coeficientes del cociente.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & & 6 & 21 & 63 \\ & 2 & 7 & 21 & \boxed{62} \end{array}$$

coeficientes de  $2x^2 + 7x + 21$   $\longleftarrow$   $\longrightarrow$  resto

22. Haz las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini y escribe el cociente como un polinomio:

$$a) (x^3 - x^2 - 17x + 20) : (x - 4)$$

$$b) (x^3 - 5x^2) : (x - 5)$$

$$c) (3x^3 + 8x^2 + 2x - 4) : (x + 2)$$

$$d) (7x^3 + 2x^2 + 3x - 5) : (x - 7)$$

$$e) (3x^3 - 2x^2 - 12x + 8) : x - \frac{2}{3}$$

$$f) (3x^4 - 5x^2 + x - 2) : (x - 1)$$

$$g) (2x^3 + 3x^2 - 6x - 5) : (x + 6)$$

$$h) (x^4 - 2x^3 - 1) : (x - 4)$$

$$i) (x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 15x + 8) : (x + 8)$$

$$j) x^3 + \frac{17}{5}x^2 - \frac{19}{5}x - 2 : x + \frac{2}{5}$$

## OPERACIONES COMBINADAS CON POLINOMIOS

El orden de las operaciones se mantiene en todos los conjuntos numéricos y también ha de respetarse a la hora de realizar operaciones en lenguaje algebraico.

### Jerarquía de operaciones

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

23. Realiza las siguientes operaciones:

$$a) (x + 3)^2 - 2(3x - 4)^2$$

$$b) (2x + 3)(2x - 3) - 4x(x - 2)$$

$$c) [(15x + 6x^2)(2x - 1)] : (3x)$$

$$d) [(4x + 1)(5x + 2) - 2(x + 1)^2] : x$$

24. Dados los polinomios  $P(x) = 3x^2 - 4$ ,  $Q(x) = 6 - 5x$ ,  $R = 2x^2 + 5x$  realiza las siguientes operaciones:

$$a) 3P(x) - 2Q(x)$$

$$c) P(x) [Q(x) + R(x)]$$

$$e) R(x) : x + Q(x)$$

$$b) P(x) - Q(x) + R(x)$$

$$d) [Q(x)]^2 + P(x)$$

$$f) R(x) - [P(x)]^2$$

# ECUACIONES Y SISTEMAS

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Llamamos **solución** de la ecuación a los valores de las incógnitas para los cuales la igualdad es cierta.

Para comprobar si un valor es solución de una ecuación, debemos hallar el **valor numérico** de ambos miembros y comprobar si son iguales.

1. Comprueba si el valor indicado es solución de la ecuación:

a)  $3x^2 - 5x + 2 = 0$  para  $x = 1$

e)  $2x - 8 + 3(3x - 1) = 0$  para  $x = 1$

b)  $2(3x - 5) - 4x = -6$  para  $x = 2$

f)  $\frac{x-1}{3} - \frac{x+2}{5} = 0$  para  $x = 2$

c)  $\frac{x-1}{3} - 2x = -7$  para  $x = 4$

g)  $\frac{x-1}{3} - \frac{x+2}{5} = 0$  para  $x = -2$

d)  $3x^2 + x - 2 = 0$  para  $x = \frac{2}{3}$

h)  $6x^2 - x + 1 = 0$  para  $x = \frac{1}{3}$

## ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una **ecuación de primer grado** es aquella equivalente a la ecuación formada por un polinomio de primer grado igual a cero.

Para resolver una ecuación de primer grado sencilla:

1. Realizamos todas las operaciones que sean precisas, como por ejemplo multiplicar un monomio por un polinomio entre paréntesis.
2. Aplicamos la regla de la suma de tal modo que los términos con incógnita estén en un miembro y los términos sin incógnita en el otro.
3. Operamos y utilizamos la regla del producto para despejar la incógnita.



Si llegamos a una ecuación del tipo  $0x = 0$ , nuestra ecuación tiene **infinitas soluciones** pues cualquier valor de  $x$  la cumple.

Si llegamos a una ecuación del tipo  $0x = n^{\circ}$ , nuestra ecuación **no tiene solución** puesto que es imposible al multiplicar por 0 obtener otro número.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis:

a)  $2(x - 1) + 3 = 9$

d)  $6(2x - 3) = 10(2x - 5)$

b)  $4(x + 2) = 3(x + 7)$

e)  $3(6x - 10) - 5(2 - 4x) = 25x - 1$

c)  $5x - 4(2x - 7) = 13$

f)  $2(7x - 1) - 3(3x - 6) - 5(11x + 6) = 196$

Para resolver una ecuación con denominadores, multiplicamos ambos lados de la igualdad por un múltiplo de dichos denominadores, preferiblemente el mínimo común múltiplo.

$$\begin{aligned} \frac{2(3x+7)}{5} + \frac{5(x-3)}{2} &= 1 \\ 10 \frac{2(3x+7)}{5} + 10 \frac{5(x-3)}{2} &= 10(1) \\ 4(3x+7) + 25(x-3) &= 10 \\ 12x + 28 + 25x - 75 &= 10 \\ 12x + 25x &= 10 - 28 + 75 \\ 37x &= 37 \\ x &= \frac{37}{37} = 1 \end{aligned}$$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con denominadores:

a)  $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} + \frac{x}{9} = 7$

f)  $\frac{3x-1}{2} + \frac{5x+7}{4} = 7$

b)  $\frac{x-3}{2} + \frac{2x-5}{2} = 5$

g)  $\frac{5x+7}{4} - \frac{2x+1}{3} = 2$

c)  $\frac{7x-1}{2} - \frac{4x-6}{2} = 7$

h)  $\frac{6-x}{5} + \frac{3x-1}{6} - \frac{2x-3}{4} = \frac{1}{12}$

d)  $3x - \frac{1}{4} = 2x + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}$

i)  $x - 2 - \frac{5x+7}{6} = \frac{10-4x}{9}$

e)  $\frac{2x-3}{5} + 1 = 4x + 4$

j)  $\frac{9x-1}{12} + \frac{6x+6}{8} - \frac{3x}{10} = \frac{16}{15}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores:

a)  $\frac{5(3x-5)}{4} - \frac{7x+3}{8} = 2$

f)  $\frac{5(2x-1)}{3} - \frac{x-4}{3} = 2$

b)  $\frac{3(4x+1)}{7} - \frac{6(x-3)}{5} = 3$

g)  $\frac{3(2x-8)}{4} - 2(6-4x) = \frac{5}{2}$

c)  $3(2x-4) + \frac{5x+1}{6} = \frac{1}{4}$

h)  $\frac{3(2x+2)}{10} - \frac{7(2x-5)}{15} - \frac{x-6}{6} = \frac{29}{15}$

d)  $\frac{2(3x-1)}{3} + \frac{5x-6}{6} = \frac{138}{9}$

i)  $\frac{3(5x-1)}{2} - \frac{7(3x-4)}{3} = \frac{1}{6} - \frac{11(x-1)}{6}$

e)  $\frac{2x-8}{5} + \frac{3(x+2)}{6} = 3$

j)  $\frac{2(x+3)}{5} + \frac{3(x-6)}{2} = \frac{2}{5} + \frac{10(2x+1)}{6}$

## ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una **ecuación de segundo grado** es aquella equivalente a la ecuación formada por un polinomio de segundo grado igual a cero.

En general escribimos las ecuaciones de segundo grado como

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son tres números cuyo único requisito es que  $a \neq 0$ .



## ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

Las ecuaciones incompletas son aquellas que tiene un término nulo.

CASO  $ax^2 + c = 0$

Para resolver ecuaciones de este tipo despejamos de manera análoga a lo que hacíamos con las de primer grado, teniendo en cuenta que siempre habrá o bien 2 posibles soluciones (una positiva y otra negativa) o bien ninguna en absoluto.

$$\begin{aligned}3x^2 - 48 &= 0 \\3x^2 &= 48 \\x^2 &= 16 \\x &= \pm 4\end{aligned}$$

CASO  $ax^2 + bx = 0$

Para resolver ecuaciones de este tipo extraemos factor común  $x$  y resolvemos separadamente las ecuaciones asociadas a cada factor.

$$\begin{aligned}9x^2 - 6x &= 0 \\x(9x - 6) &= 0 \\&\& \\x = 0 & \quad 9x - 6 = 0 \\& \quad 9x = 6 \\& \quad x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a)  $x^2 - 16 = 0$

f)  $2x^2 + 50x = 0$

k)  $4x^2 - 100 = 0$

b)  $x^2 + 8x = 0$

g)  $3x^2 - 27 = 0$

l)  $18x^2 - 9x = 0$

c)  $5x^2 - 20 = 0$

h)  $7x^2 - 28x = 0$

m)  $10x^2 - 160 = 0$

d)  $7x^2 + 24x = 0$

i)  $5x^2 + 30x = 0$

n)  $3x^2 - 75 = 0$

e)  $5x^2 + 20 = 0$

j)  $x^2 - 8x = 0$

ñ)  $6x^2 + 12x = 0$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a)  $x^2 - \frac{16}{121} = 0$

c)  $\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{27} = 0$

e)  $x^2 - \frac{1}{3}x = 0$

g)  $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = 0$

b)  $\frac{1}{2}x^2 - 8 = 0$

d)  $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4} = 0$

f)  $\frac{3}{4}x^2 + x = 0$

h)  $\frac{9}{5}x^2 - \frac{3}{25}x = 0$

### CASO GENERAL

En general cualquier ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  puede resolverse utilizando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dependiendo de los valores que tome el radical  $b^2 - 4ac$  podemos tener dos, una o ninguna solución.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a)  $x^2 - x - 6 = 0$

e)  $3x^2 - 9x + 12 = 0$

i)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

b)  $x^2 + 2x + 3 = 0$

f)  $3x^2 - 9x - 30 = 0$

j)  $x^2 - 20x + 100 = 0$

c)  $x^2 - 2x - 8 = 0$

g)  $2x^2 + 4x + 2 = 0$

k)  $2x^2 + 4x = 0$

d)  $6x^2 + 18x + 12 = 0$

h)  $x^2 - 5x - 14 = 0$

l)  $2x^2 - 4 = 0$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con coeficientes racionales:

a)  $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

c)  $15x^2 + 7x - 2 = 0$

e)  $x^2 - \frac{11}{10}x - \frac{3}{5} = 0$

b)  $9x^2 - 12x + 4 = 0$

d)  $3x^2 - x - \frac{2}{3} = 0$

f)  $x^2 - 0,01 = 0$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones, identificando los coeficientes y escribiendo la fórmula en cada uno de los casos:

a)  $3x^2 - 3x - 18 = 0$

e)  $x^2 - 7x + 10 = 0$

i)  $9x^2 - 30x + 25 = 0$

b)  $x^2 + 8x + 16 = 0$

f)  $x^2 - 7x - 10 = 0$

j)  $2x^2 - 16x - 32 = 0$

c)  $9x^2 - 24x + 16 = 0$

g)  $2x^2 - 18 = 0$

k)  $20x^2 - 60x + 45 = 0$

d)  $5x^2 - 7x - 6 = 0$

h)  $4x^2 + 12x + 9 = 0$

l)  $6x^2 - 11x - 10 = 0$

## SISTEMAS DE ECUACIONES

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones interrelacionadas.

Una **solución de un sistema de ecuaciones** es un conjunto de valores numéricos (uno por cada incógnita) para los cuales todas las igualdades son ciertas.

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 1 \\ 2x + 5y &= 7 \end{aligned}$$

### TIPOS DE SOLUCIONES

Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones lineales está compuesta de dos valores, uno para cada una de las incógnitas:  $x = 1, y = 1$ .

Estas soluciones deben comprobarse sistemáticamente tras la resolución de un sistema, sustituyendo dichos valores **en ambas ecuaciones** y comprobando que se cumplen las igualdades.

$$\begin{aligned} 4 \cdot 1 + 3 \cdot (1) &= 1 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot (1) &= 7 \end{aligned}$$

10. Comprueba si  $x = 3$ ,  $y = 1$  es solución de los siguientes sistemas:

a) 
$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 6x + 2y = 20 \\ 3x + 9y = 18 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 6y = 12 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 5 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$$



Si llegamos a una ecuación del tipo  $0x = 0$ , nuestro sistema tiene **infinitas soluciones** puesto que ambas ecuaciones son equivalentes.

Si llegamos a una ecuación del tipo  $0x = n^{\circ}$ , nuestro sistema **no tiene solución** puesto que ambas ecuaciones son incompatibles.

## MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

### Resolución por sustitución

1. Despeja una variable (la de tu elección) en una de las ecuaciones (la de tu elección).
2. Sustituye el valor obtenido en la otra ecuación.
3. Resuelve la ecuación de primer grado obtenida, hallando el valor de una de las incógnitas.
4. Sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones originales (o en el despeje) para obtener el valor de la otra incógnita.
5. Comprueba la solución **en ambas ecuaciones**.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 & ! & \boxed{y = \frac{1 - 4x}{3}} \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 7 \\ 2x + 5 \cdot \frac{1 - 4x}{3} &= 7 \\ 6x + 5(1 - 4x) &= 21 \\ 6x + 5 - 20x &= 21 \\ 6x - 20x &= 21 - 5 \\ -14x &= 16 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$y = \frac{1 - 4x}{3} = \frac{1 - 4 \cdot 1}{3} = \frac{1 - 4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\boxed{y = -1}$$

11. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución:

a) 
$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 4x + 2y = 18 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} x - 3y = 9 \\ 4x - 3y = 18 \end{cases}$$

12. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x - 7y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 7y = 5 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x - 2y = 20 \\ 5x - 6y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 2y = 5 \\ 6x - 5y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$$

13. Intenta resolver los siguientes sistemas no lineales:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 19 \\ 5x^2 - 4y^2 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

## MÉTODO DE IGUALACIÓN

### Resolución por igualación

- Despeja una variable (la de tu elección) en ambas ecuaciones.
- Iguala ambas expresiones algebraicas.
- Resuelve la ecuación de primer grado obtenida, obteniendo el valor de una de las incógnitas.
- Sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones originales (o en el despeje) para obtener el valor de la otra incógnita.
- Comprueba la solución **en ambas ecuaciones**.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 & ! & y = \frac{1 - 4x}{3} \\ 2x + 5y = 7 & ! & y = \frac{7 - 2x}{5} \end{cases}$$

$$\frac{1 - 4x}{3} = \frac{7 - 2x}{5}$$

$$5(1 - 4x) = 3(7 - 2x)$$

$$5 - 20x = 21 - 6x$$

$$20x - 6x = 5 - 21$$

$$14x = -16$$

$$x = -\frac{8}{7}$$

$$y = \frac{1 - 4x}{3} = \frac{1 - 4(-\frac{8}{7})}{3} = \frac{1 + \frac{32}{7}}{3} = \frac{\frac{7 + 32}{7}}{3} = \frac{39}{21} = \frac{13}{7}$$

$$y = \frac{13}{7}$$

14. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación:

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 4x + 2y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 9 \\ 4x - 3y = 18 \end{cases}$$

15. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación:

a)	$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x - 7y = 1 \end{cases}$	c)	$\begin{cases} 3x - 7y = 5 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$	e)	$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$
b)	$\begin{cases} 9x - 2y = 20 \\ 5x - 6y = 16 \end{cases}$	d)	$\begin{cases} 8x - 2y = 5 \\ 6x - 5y = 2 \end{cases}$	f)	$\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$

16. Intenta resolver los siguientes sistemas no lineales:

a)	$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 19 \\ 5x^2 - 4y^2 = 11 \end{cases}$	b)	$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 12 \end{cases}$
----	--	----	---

## MÉTODO DE REDUCCIÓN

### Resolución por reducción

- Multiplica cada una de las ecuaciones por un número adecuado, de tal modo que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos.
- Suma ambas expresiones.  
Si el paso anterior se realizó de forma correcta, una de las incógnitas se anulará.
- Resuelve la ecuación de primer grado obtenida, obteniendo el valor de una de las incógnitas.
- Sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones originales para obtener el valor de la otra incógnita.
- Comprueba la solución **en ambas ecuaciones**.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 & \cdot 1 \\ 2x + 5y = 7 & \cdot 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} ! \\ ! \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4x + 3y = 1 \\ 4x + 10y = 14 \end{matrix}$$

$$\hline 0x + 13y = 13 \quad ! \quad \boxed{y = -1}$$

$$4x + 3(-1) = 1 \quad ! \quad 4x - 3 = 1 \quad ! \quad 4x = 1 + 3 \quad ! \quad 4x = 4 \quad ! \quad x = \frac{4}{4} \quad ! \quad \boxed{x = 1}$$

17. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción:

a)	$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$	c)	$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 4x + 2y = 18 \end{cases}$	e)	$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$
b)	$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$	d)	$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$	f)	$\begin{cases} x - 3y = 9 \\ 4x - 3y = 18 \end{cases}$

18. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción:

$$\begin{array}{l} \dots \\ a) \quad \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 5x - 7y = 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \dots \\ b) \quad \begin{array}{l} 9x - 2y = 20 \\ 5x - 6y = 16 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \dots \\ c) \quad \begin{array}{l} 3x - 7y = 5 \\ 2x + 5y = 13 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \dots \\ d) \quad \begin{array}{l} 8x - 2y = 5 \\ 6x - 5y = 2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \dots \\ e) \quad \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \dots \\ f) \quad \begin{array}{l} 4x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 3 \end{array} \end{array}$$

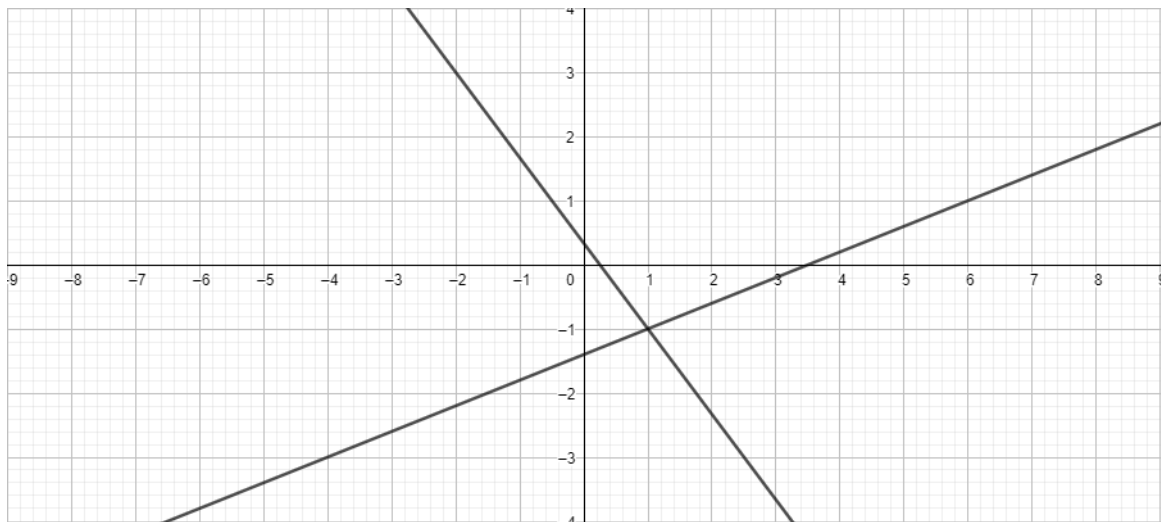
19. Intenta resolver los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{l} \dots \\ a) \quad \begin{array}{l} 3x^2 + 4y^2 = 19 \\ 5x^2 - 4y^2 = 11 \end{array} \end{array}$$

## MÉTODO GRÁFICO

La solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas corresponde con las coordenadas del punto de intersección de sus gráficas representadas en el plano.

Para resolver un sistema gráficamente utilizaremos la calculadora gráfica de Geogebra .



El punto de intersección de las dos rectas tiene coordenadas (1, -1) por lo tanto la solución a nuestro sistema es:  $x = 1, y = -1$ .

20. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método gráfico:

..	..	..
a) $3x + y = 10$	c) $2x + y = 9$	e) $x - y = 1$
.. $x + 3y = 6$	.. $4x + 2y = 18$	.. $3x - 3y = 3$
b) $3x + y = 7$	d) $x + 2y = 2$	f) $x - 3y = 9$
.. $3x - y = 1$	.. $x + y = 4$	.. $4x - 3y = 18$

21. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

..	..	..
a) $x^2 + y^2 = 25$	c) $x + y = 7$	e) $x^2 - 2y + 1 = x$
.. $x + y = 7$	.. $x - y = 12$	.. $\rho_{x+y} = 5$
b) $3x^2 + 4y^2 = 19$	d) $x^2 + y^2 = 25$	f) $\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$
.. $5x^2 - 4y^2 = 11$	.. $x + y = 7$	

### Procedimiento para resolución de problemas

1. Indica los distintos datos y su relación con las incógnitas.
2. Plantea dos ecuaciones que relacionen esos datos.
3. Resuelve el sistema por el método de tu elección.
4. Comprueba el resultado: debe ser solución de ambas ecuaciones y además un valor factible para el problema.
5. Relee el problema y contesta a la pregunta con una frase breve.

Resuelve siguiendo los pasos indicados.

22. La suma de dos números es 157 y su diferencia es 41. ¿De qué números se trata?
23. La edad de María es el cuádruple que la de su hija. Dentro de 20 años, la edad de María será el doble que la de su hija. ¿Qué edad tienen?
24. Tengo 24 monedas repartidas en dos huchas. Si paso 5 monedas de una hucha a la otra, tendré el mismo número de monedas en cada una. ¿Cuántas monedas hay en cada hucha?
25. Teniendo en cuenta que una garrafa de una bebida equivale a 5 botellas y que tres garrafas y 7 botellas suman 11 litros, ¿qué capacidad tiene cada garrafa y cada botella?
26. Paloma ha vendido 50 docenas de huevos en el mercado. A la mañana los vendía a 3€ la docena, pero a la tarde la ha rebajado a 2€ por no estar tan frescos. Si ha ganado 138€, ¿cuántas docenas ha vendido por la mañana y cuántas por la tarde?
27. Por la mezcla que 8 litros y 3 litros de vino de distintas calidades se ha pagado un total de 30€. Si por comprar un litro de cada uno pagaríamos 5€, calcula el precio de cada tipo de vino.
28. Un vendedor mezcla dos variedades de café. El kilo de la primera variedad cuesta 3'60 € y el kilo de la segunda cuesta la mitad. Si ha obtenido 20kg de la mezcla y el precio es de 2'43 € por kilo, ¿qué cantidad ha utilizado de cada variedad?
29. Para elaborar un kilo de chocolate con una pureza del 75 % se han mezclado dos cacao, uno puro al 90 % y otro puro al 50 %. ¿Cuánto han utilizado de cada uno de ellos?
30. Un móvil y una tableta cuestan 500€, pero una empresa de telefonía me ofrece el móvil con un 50 % de descuento y la tableta con un 15 % de descuento si acepto un contrato de permanencia. Con esa oferta el precio se queda en 320€. ¿Cuál era el precio original de cada artículo?



Problemas con sistemas no lineales:

31. Halla dos números positivos cuya diferencia sea 7 y la suma de sus cuadrados sea 3809.
32. Tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 25 m, y uno de sus catetos es 5 m mayor que el otro. Enuncia el teorema de Pitágoras y halla la longitud de ambos catetos.
33. Alquilar un autobús para ir de excursión cuesta 800 €. Si fuesen 10 personas más, el precio se reduciría en 4 € por persona. ¿Cuánto cuesta la excursión? ¿Cuántas personas van?  
PI STA: Llámale  $x$  al número de personas e  $y$  al precio por persona.

# SUCESIONES

Una **sucesión** es una secuencia infinita y ordenada de números.

$$f2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots g$$

Llamamos **término** a cada uno de los elementos de una sucesión.

Para representar los diferentes términos de una sucesión se utiliza un subíndice que indica su posición en en la sucesión.

Posición	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>
Término	$a_1 = 2$	$a_2 = 4$	$a_3 = 6$	$a_4 = 8$	$a_5 = 10$

- a) Representa (con el formato del primer ejemplo) la sucesión de los números naturales impares.

b) ¿Cuál es el término en quinta posición? ¿Y en décima posición?
- a) Representa la sucesión de números racionales cuyo numerador son números naturales y cuyo denominador es siempre 4.

b) ¿Cuál es el término en cuarta posición? ¿Y en sexta posición? ¿Y en vigésima?

Se llama **término general** de una sucesión al término que ocupa el lugar  $n$ -ésimo y se escribe con la letra que denote a la sucesión y subíndice  $n$ .

$$a_n = 2n \quad b_n = \frac{1}{n} \quad c_n = n^3$$

El término general, cuando somos capaces de obtenerlo, es una herramienta que facilita enormemente el trabajo con sucesiones.

Para hallar el término en la posición 1 basta con sustituir la  $n$  por 1, para la posición 2 la sustituimos por 2, etc.

$$a_n = \frac{n^2}{3}$$
$$\begin{array}{l} n = 1 \quad ! \quad a_1 = \frac{1^2}{3} = \frac{1}{3} \\ n = 2 \quad ! \quad a_2 = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3} \\ n = 3 \quad ! \quad a_3 = \frac{3^2}{3} = 3 \end{array}$$

3. Halla los primeros diez términos de las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = 1 - n$

c)  $c_n = (3 + n)^2$

e)  $e_n = n^2$

g)  $g_n = n^2 + n - 1$

b)  $b_n = n + 4$

d)  $d_n = (-1)^n$

f)  $f_n = \frac{1}{n}$

h)  $h_n = n^2$

4. ¿Cuál es el término general de las siguientes sucesiones?

a)  $f1, 2, 3, 4, \dots g$

e)  $f2, 4, 8, 16, \dots g$

i)  $f0, 1, 4, 9, \dots g$

b)  $f1, 2, 4, 8, \dots g$

f)  $f4, 9, 16, 25, \dots g$

j)  $f10, 5, 0, -5, \dots g$

c)  $f1, 4, 9, 16, \dots g$

g)  $f10, 15, 20, 25, \dots g$

k)  $f2, -4, 8, -16, \dots g$

d)  $f2, 3, 4, 5, \dots g$

h)  $f5, 10, 20, 40, \dots g$

l)  $f1, 4, 9, 16, \dots g$

## PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Las **progresiones aritméticas** son un tipo particular de sucesiones que se caracterizan por que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.

La **diferencia** suele representarse con una letra  $d$ , y puede ser un valor real cualquiera.

$$a_n = f2, 5, 8, 11, 14, \dots g \quad d = 3$$

$\begin{matrix} \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ +3 & +3 & +3 & +3 \end{matrix}$

5. Comprueba si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas:

a)  $f1, 2, 3, 4, \dots g$

e)  $f2, 4, 8, 16, \dots g$

i)  $f0, 1, 4, 9, \dots g$

b)  $f1, 2, 4, 8, \dots g$

f)  $f4, 9, 16, 25, \dots g$

j)  $f10, 5, 0, -5, \dots g$

c)  $f1, 4, 9, 16, \dots g$

g)  $f10, 15, 20, 25, \dots g$

k)  $f2, -4, 8, -16, \dots g$

d)  $f2, 3, 4, 5, \dots g$

h)  $f5, 10, 20, 40, \dots g$

l)  $f1, 4, 9, 16, \dots g$

El término general de una progresión aritmética puede calcularse a partir de su primer término y su diferencia.

$$a_n = f2, 5, 8, 11, 14, \dots g \quad \begin{matrix} a_1 = 2 \\ d = 3 \end{matrix}$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 + d = 5$$

$$a_3 = 2 + 2d = 8$$

$$a_4 = 2 + 3d = 11$$

$$a_5 = 2 + 4d = 14$$

Por lo tanto podemos concluir que su término general ha de tener la misma estructura.

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

6. Halla el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a)  $f1, 2, 3, 4, \dots g$

c)  $f10, 15, 20, 25, \dots g$

e)  $f -10, 0, 10, 20, \dots g$

b)  $f2, 3, 4, 5, \dots g$

d)  $f10, 5, 0, -5, \dots g$

f)  $f0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots g$

7. ¿Cuál es el primer término de una progresión aritmética cuyo quinto término tiene valor 3 y cuya diferencia es  $d = 2$ ? Escribe su término general.

8. ¿Cuál es el primer término de una progresión aritmética de la cual conocemos el milésimo término  $a_{1000} = 232^{07}$  y la diferencia  $d = 0^{01}$ ? Escribe su término general.

9. Halla el término general de las progresiones aritméticas de las que conocemos los siguientes datos y utilízalo para calcular  $a_{100}$ :

a)  $a_{20} = 10, d = 1$

c)  $a_{30} = 100, d = 2$

e)  $a_{25} = 16, a_{26} = 19$

b)  $a_{15} = 2, d = 1$

d)  $a_{25} = 78, d = 2$

f)  $a_{25} = 25, a_{35} = 55$

## SUMA DE TÉRMINOS

En ocasiones es necesario sumar una cantidad finita de términos de una sucesión. Si esa cantidad fuese lo suficientemente pequeña podríamos hacerlo directamente, pero con frecuencia se trata de una cantidad tan grande que sería muy poco práctico.

Digamos que queremos calcular los  $m$  primeros términos de una sucesión y a esa suma le llamaremos  $S_m$ .

$$S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} + a_m$$

Como la suma es conmutativa, es lo mismo sumarlos en ese orden que justo al contrario.

$$S_m = a_m + a_{m-1} + \dots + a_2 + a_1$$

Entonces es claro que si sumo una expresión a la otra lo que obtengo es el doble de la suma.

$$\begin{array}{r} S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} + a_m \\ S_m = a_m + a_{m-1} + \dots + a_2 + a_1 \\ \hline 2 S_m = (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + \dots + (a_{m-1} + a_2) + (a_1 + a_m) \end{array}$$

Para que esto resulte de utilidad necesitamos darnos cuenta que en realidad todas esas parejas de sumandos tienen el mismo valor:

$$\begin{aligned} a_1 + a_m &= 2 a_1 + (m-1) d \\ a_2 + a_{m-1} &= 2 a_1 + (m-1) d \\ a_i + a_{m-i+1} &= 2 a_1 + (m-1) d \quad \forall i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Así que en realidad se trata de  $m$  sumandos iguales, a los que por simplicidad nos referiremos como  $a_1 + a_m$ .

$$2 S_m = (a_1 + a_m) m$$

Y con solo despejar llegamos a una expresión cómoda para la suma de los  $m$  primeros términos de una progresión aritmética:

$$S_m = \frac{(a_1 + a_m) m}{2}$$

10. Suma los 500 primeros términos de la progresión aritmética  $a_n = f5, 7, 9, 11, \dots g$ .
11. Suma los 150 primeros términos de la progresión aritmética  $a_n = f20, 17, 14, 11, \dots g$
12. Suma los 300 primeros términos de la progresión aritmética  $a_n = f\frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \dots g$
13. Suma los 100 primeros números pares.
15. Suma los números impares menores que 100.
14. Suma los 200 primeros múltiplos de 5.
16. Suma los múltiplos de 3 menores que 1000.
17. Suma los múltiplos de 9 mayores que 1000 y menores que 2000.

Problemas:

18. El primer piso de un edificio está a 4'2 metros de altura y la distancia entre dos pisos consecutivos es de 3'6 metros. ¿A qué altura está el décimo piso?
19. Entrenando un ejercicio de resistencia he decidido aumentar progresivamente el tiempo que le dedico. La primera sesión lo realicé durante 10 minutos y cada semana medio minuto más que la anterior. Al cabo de un año, ¿cuál será mi sesión de entrenamiento de este ejercicio?
20. La dosis inicial de un medicamento es de 100 mg, y se reduce en 5mg en cada una de las dosis siguientes. Si un paciente tiene que tomar 12 dosis, ¿cuántos miligramos toma en total?

## PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Las **progresiones geométricas** son un tipo particular de sucesiones que se caracterizan por que la razón entre dos términos consecutivos es constante.

La **razón** suele representarse con una letra  $r$ , y puede ser un valor real cualquiera.

$$a_n = f3, 6, 12, 24, 48, \dots g$$

$\begin{array}{ccccccc} & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & & \\ & \cdot 2 & \cdot 2 & \cdot 2 & \cdot 2 & & \\ & & & & & & r = 2 \end{array}$

21. Comprueba si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas:

- |                                 |                                       |                            |
|---------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| a) $f2, 3, 4, 5, \dots g$       | d) $f10, 15, 20, 25, \dots g$         | g) $f8, 4, 2, 1, \dots g$  |
| b) $f2, 4, 8, 16, \dots g$      | e) $f5, 10, 20, 40, \dots g$          | h) $f10, 5, 0, 5, \dots g$ |
| c) $f100, 10, 1, 0^01, \dots g$ | f) $f3, 1^05, 0^075, 0^0375, \dots g$ | i) $f2, 4, 8, 16, \dots g$ |

El término general de una progresión geométrica puede calcularse a partir de su primer término y su razón.

$$a_n = f3, 6, 12, 24, 48, \dots g \quad \begin{matrix} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{matrix}$$

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_3 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$$

$$a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$$

Por lo tanto podemos concluir que su término general ha de tener la misma estructura.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

22. Halla el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) $f2, 10, 50, 250, \dots g$	c) $f100, 10, 1, \frac{1}{10}, \dots g$	e) $f2, 4, 8, 16, \dots g$
b) $f3, 9, 27, 81, \dots g$	d) $f3, 1^05, 0^075, 0^0375, \dots g$	f) $f\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, 6, \dots g$

23. ¿Cuál es el primer término de una progresión geométrica cuyo quinto término tiene valor 64 y cuya razón es  $r = 2$ ? Escribe su término general.

24. ¿Cuál es el primer término de una progresión geométrica cuyo décimo término tiene valor 10 y cuya razón es  $r = \frac{1}{3}$ ? Escribe su término general.

25. Halla el término general de las progresiones geométricas de las que conocemos los siguientes datos y utilízalo para calcular  $a_{50}$ . Exprésalo en notación científica si es necesario.

a) $a_3 = 16, r = 2$	c) $a_6 = 10, r = 1$	e) $a_7 = 0^00032, r = 0^02$
b) $a_5 = 45, r = 2$	d) $a_9 = \frac{1}{81}, a_{10} = \frac{1}{243}$	f) $a_8 = 8, a_{10} = 2$

## SUMA DE TÉRMINOS

Queremos calcular la suma  $S_m$  de los  $m$  primeros términos de una sucesión.

$$S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} + a_m$$

Si esa sucesión es una progresión geométrica necesitamos aplicar algún razonamiento que aproveche sus propiedades, por eso optamos por multiplicar por la razón  $r$  que convertirá cada término en el siguiente.

$$r \cdot S_m = a_2 + a_3 + \dots + a_m + a_{m+1}$$

Podemos observar que tenemos dos sumas de  $m$  elementos en las que solo hay diferencia en un par de ellos, por lo tanto restar ambas expresiones nos permitirá eliminar muchas de ellas.

$$\begin{array}{r}
 r S_m = \quad \quad \quad a_2 + \dots + a_m + a_{m+1} \\
 S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m \\
 \hline
 (r - 1) S_m = a_1 \quad \quad \quad + a_{m+1}
 \end{array}$$

Y con solo despejar llegamos a una expresión cómoda para la suma de los  $m$  primeros términos de una progresión aritmética:

$$S_m = \frac{a_{m+1} - a_1}{r - 1}$$

Teniendo en cuenta que  $a_{m+1} = a_1 \cdot r^m$  es posible emplear la expresión equivalente:

$$S_m = \frac{a_1 (r^m - 1)}{r - 1}$$

26. Suma los 100 primeros términos de la progresión geométrica  $a_n = f4, 12, 36, 108, \dots g$ .
27. Suma los 30 primeros términos de la progresión geométrica  $a_n = f24, 12, 6, 3, \dots g$
28. Suma los 100 primeros términos de la progresión geométrica  $a_n = f3, 3^03, 3^063, 3^0993, \dots g$
29. Suma las 30 primeras potencias de base 2.
30. Suma las 40 primeras potencias de base 3.

Problemas:

31. La población de un cierto país ha aumentado durante 5 años, en progresión geométrica, de 200 000 a 322 102 personas. ¿Cuál ha sido la razón del aumento?
32. Una bacteria tiene un ciclo reproductivo por el cual se duplica cada 20 minutos. Si en una muestra de tierra hay aproximadamente 40 millones de bacterias, ¿cuántas habrá al cabo de tres horas?
33. Una pelota de goma cae desde una altura de 40 metros y en cada rebote sube el 40% de la altura anterior. Halla la altura que alcanza en el octavo rebote.
34. Hoy hay 17 casos en nuestra localidad de una enfermedad altamente contagiosa, se estima que cada persona infectará a otras tres y que además ocurrirá en las primeras 24 horas.
  - a) ¿Cuántos nuevos contagiados esperamos tener el séptimo día?
  - b) Si en ese tiempo no ha sido dado de alta ninguno de los casos, ¿cuántos infectados habrá en total?

## APLICACIONES A LA ARITMÉTICA FINANCIERA

Una de las aplicaciones más inmediatas de las progresiones aritméticas y geométricas se da en el campo de las transacciones bancarias, en donde se utilizan intereses simples e intereses compuestos dependiendo del caso.

## INTERÉS SIMPLE

El **interés simple** ( $i$ ) es el beneficio que origina una cantidad de dinero denominada **capital inicial** ( $C_0$ ) a un **rédito anual** del  $r\%$  tras un tiempo  $t$  (expresado en años) si dicho beneficio se retira al final de cada período de tiempo sin reinvertirlo.

Como cada año se recibe el interés correspondiente  $C_0 r$ , que es siempre el mismo, está claro que el **capital final** después de  $t$  años ( $C_t$ ) sigue una progresión aritmética.

$$C_t = C_0 + C_0 r t$$

En esa expresión a menudo se saca factor común para indicarla como:

$$C_t = C_0 (1 + r t)$$

35. Calcula el capital final de depósitos de interés simple tras cinco años.

¿Cuál es el interés (beneficio) en cada uno de ellos?

a)  $C_0 = 120\,000\text{e}$   $r = 1^{\circ}2\%$

c)  $C_0 = 19\,000\text{e}$   $r = 0^{\circ}6\%$

b)  $C_0 = 80\,000\text{e}$   $r = 0^{\circ}9\%$

d)  $C_0 = 15\,000\text{e}$   $r = 0^{\circ}45\%$

36. He depositado  $150\,000\text{e}$  en un depósito a un  $r = 0^{\circ}6\%$  de interés simple. Calcula el número de años que tardaré en conseguir al menos el siguiente interés:

a)  $1\,800\text{ e}$

b)  $2\,700\text{ e}$

c)  $36\,000\text{ e}$

d)  $50\,000\text{ e}$

## INTERÉS COMPUESTO

Cuando el interés que se obtiene al final de cada período de inversión no se retiran sino que se añaden al capital y se reinvierten nos encontramos con el concepto de **interés compuesto**.

Ente casa es necesario observar que cada año se obtiene un interés diferente, pero que siempre depende directamente del capital depositado ese año.

$$C_0 \quad ! \quad C_1 = C_0 + C_0 r = C_0 (1 + r)$$

$$C_1 \quad ! \quad C_2 = C_1 + C_1 r = C_1 (1 + r)$$

$$C_2 \quad ! \quad C_3 = C_2 + C_2 r = C_2 (1 + r)$$

Resulta entonces evidente que se trata de una progresión geométrica de razón  $(1 + r)$ , y que por lo tanto el **capital final** después de  $t$  años ( $C_t$ ) puede expresarse como:

$$C_t = C_0(1 + r)^t$$

37. Calcula el capital final de depósitos de interés compuesto tras cinco años.

¿Cuál es el interés (beneficio) en cada uno de ellos?

a)  $C_0 = 120\,000\text{e}$   $r = 1^{\circ}2\%$

c)  $C_0 = 19\,000\text{e}$   $r = 0^{\circ}6\%$

b)  $C_0 = 80\,000\text{e}$   $r = 0^{\circ}9\%$

d)  $C_0 = 15\,000\text{e}$   $r = 0^{\circ}45\%$



# GRÁFICAS Y FUNCIONES

## CONCEPTO DE FUNCIÓN

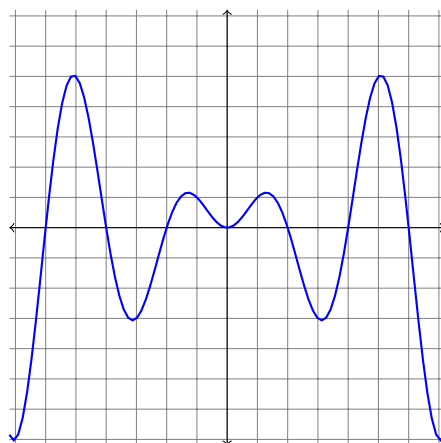
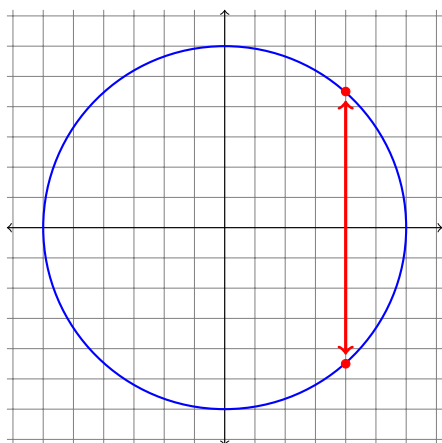
Una **función** es una relación entre los elementos de dos conjuntos tal que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un único valor del conjunto final.

Las **funciones numéricas** que estudiaremos en este tema relacionan dos magnitudes, por eso pueden representarse como parejas de números  $(x, y)$ , es decir, como puntos en un plano cartesiano.

En este caso, para ser función debe asegurarse que para cada valor de la coordenada  $x$  existe un único valor de la coordenada  $y$ , o lo que es lo mismo, que **para cada  $x$  existe un único punto** en la gráfica.



En una función puede haber múltiples valores  $x$  para los cuales su imagen sea la misma  $y$ , es decir, puede haber muchos puntos a la misma altura.

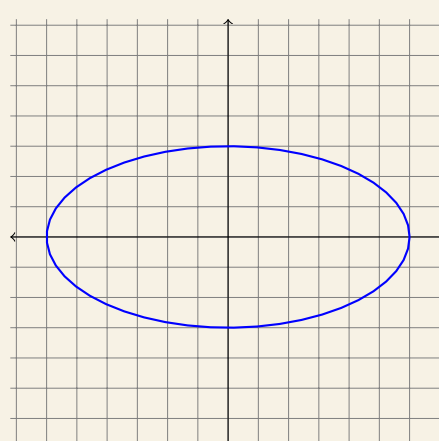
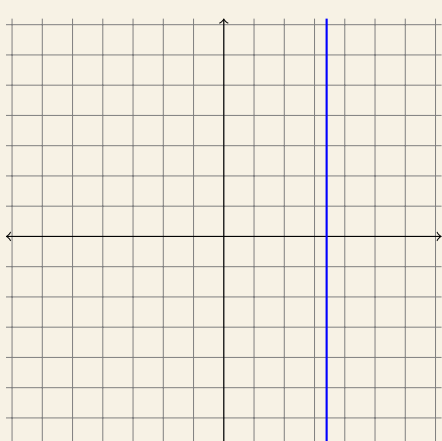
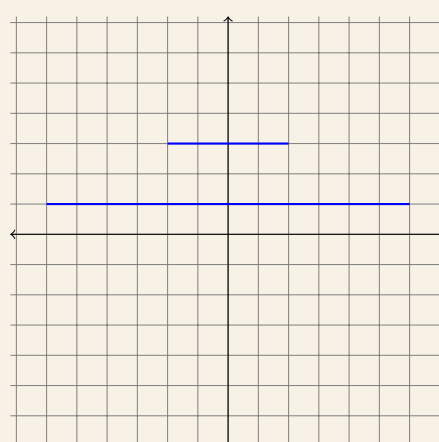
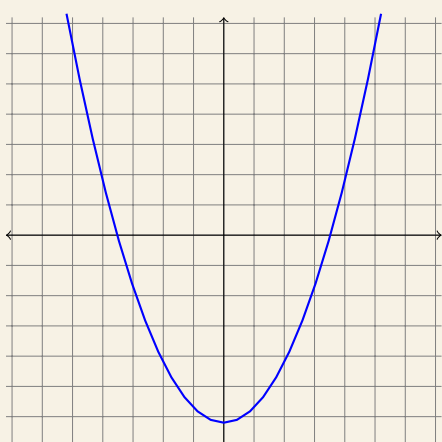
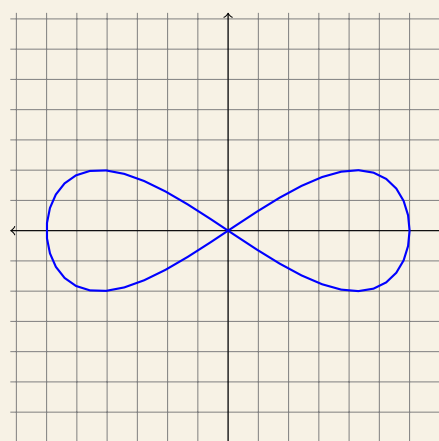
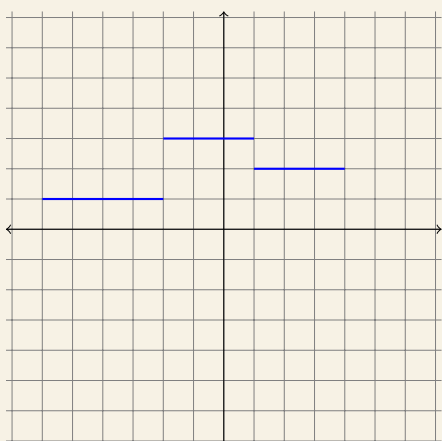
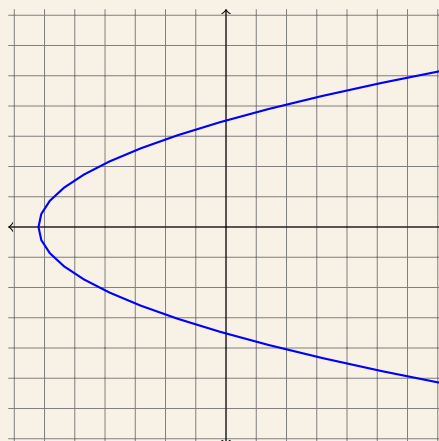
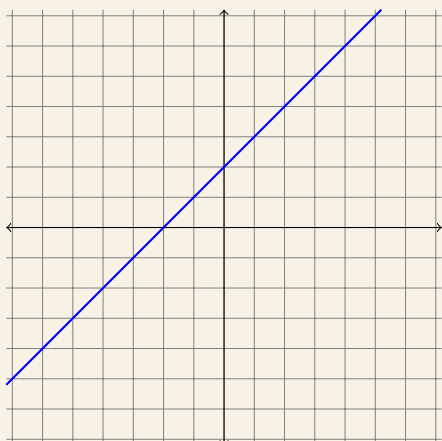


Si hay dos puntos con el mismo valor de  $x$  (es decir, están en la misma recta vertical) entonces NO es función.

Aún así, una función puede tener formas bastante complicadas.

Observa los puntos a la misma altura.

1. Indica si las siguientes gráficas corresponden a una función:



## FÓRMULAS, TABLAS Y GRÁFICAS

Las funciones expresan la relación entre dos magnitudes.

Esa relación puede describirse algebraicamente (con una fórmula), a través de una serie de datos numéricos (con una tabla de datos) o bien utilizando una representación visual de los mismos (con una gráfica).

Tomemos por ejemplo la siguiente expresión:

*Cada kilo de manzanas cuesta 1'90 €.*

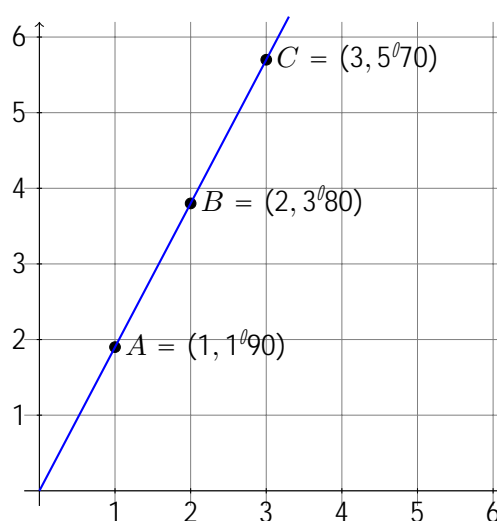
Para poder hallar la fórmula de la función debemos tener claro cuáles son las dos magnitudes involucradas (en este caso, peso y precio) y relacionarlas mediante una expresión algebraica:

peso !  $x$   
precio !  $y = f(x)$  !  $f(x) = 1'90 x$

A partir de esta función podemos rellenar una tabla de valores, sustituyendo valores de  $x$  en la fórmula para obtener valores de  $y$ :

$x$ (kg)	1	2	3
$y$ (€)	1'90	3'80	5'70

Los pares  $(x, y)$  de la tabla de valores se pueden representar en un plano, y al unirlos de la forma apropiada nos dará una gráfica que describe nuestra función:



2. Construye la tabla de valores y representa la gráfica de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = x$       b)  $f(x) = x + 1$       c)  $f(x) = 2x - \frac{1}{2}$       d)  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

3. Construye la tabla de valores de las siguientes funciones, asegurándote de tomar varios valores positivos y varios negativos, y represéntala gráficamente:

a)  $f(x) = x^2$       b)  $f(x) = x^2 + 1$       c)  $f(x) = (x + 1)^2$       d)  $f(x) = 3x^2 + 4$

4. La base de un rectángulo mide el doble que la altura. Llamaremos  $x$  a la altura e  $y$  al perímetro del rectángulo.

- a) Escribe la función que permite obtener el perímetro a partir de la altura.  
b) Representa en unos ejes cartesianos la gráfica que relaciona el perímetro con la altura.

5. La base de un rectángulo mide 1cm más que la altura. Llamaremos  $x$  a la altura e  $y$  al área del rectángulo.

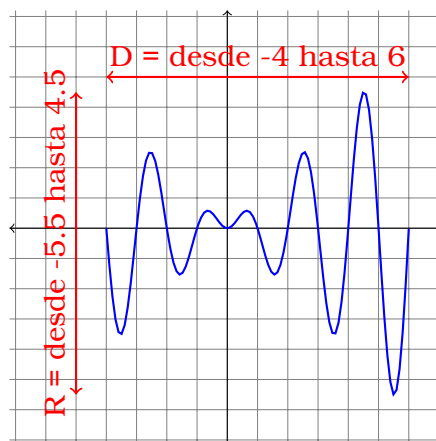
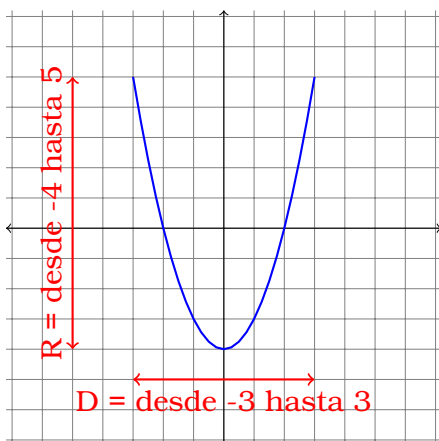
- a) Escribe la función que permite obtener el área a partir de la altura.  
b) Construye una tabla de valores para los siguientes valores de  $x$ : -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.  
c) Representa en unos ejes cartesianos la gráfica que relaciona el área con la altura.

# ESTUDIO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

## DOMINIO Y RECORRIDO

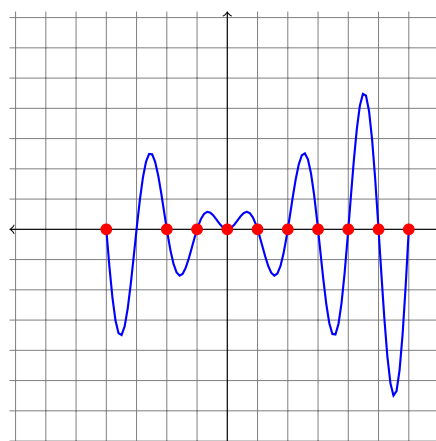
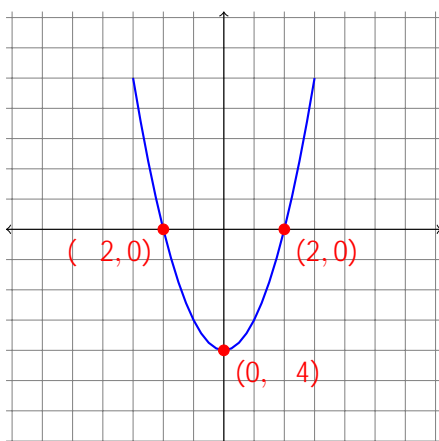
El **dominio** de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente ( $x$ ), es decir, *de izquierda a derecha*.

El **recorrido** de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente ( $y$ ), es decir, *de abajo a arriba*.



## PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

Para conocer y representar la gráfica de una función es conveniente conocer los puntos de corte con los ejes coordenados, es decir, aquellos puntos en los que la función pasa exactamente por cada uno de los ejes.

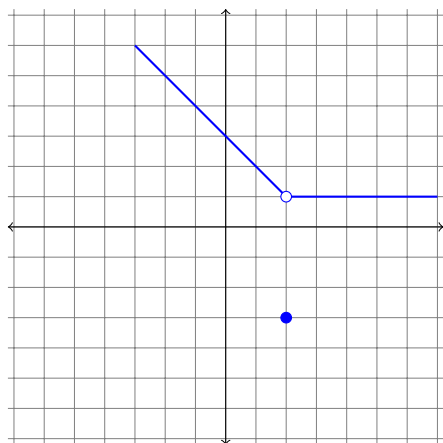


- Los **puntos de corte con el eje horizontal** tienen siempre la segunda coordenada nula:  $(x, 0)$
- Como mucho puede haber un **punto de corte con el eje vertical**, y tiene siempre la primera coordenada nula:  $(0, y)$

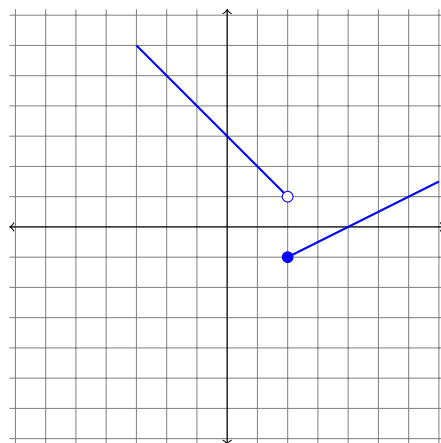
## CONTINUIDAD

Una función es **continua** si su gráfica podría dibujarse sobre un papel sin levantar el lápiz en ningún momento. En caso contrario decimos que tiene una **discontinuidad** y la clasificamos en dos tipos diferentes:

**Discontinuidad evitable:** Hay un punto colocado en una posición que no es la adecuada para ser continua.



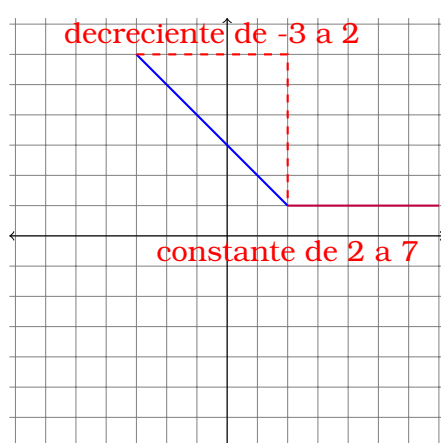
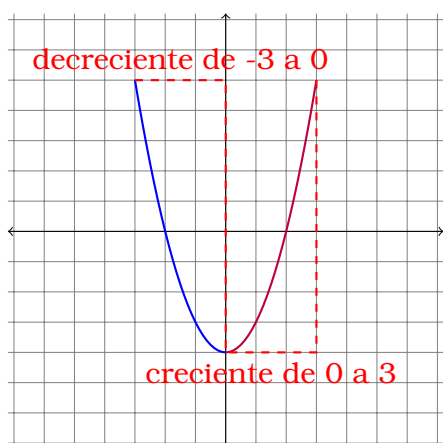
**Discontinuidad de salto:** Hay un salto vertical (hacia arriba o hacia abajo, pero no hacia los lados) entre un trozo de línea y el siguiente.



## MONOTONÍA

El estudio de la **monotonía** consiste en observar en qué intervalos la función es creciente, decreciente o constante.

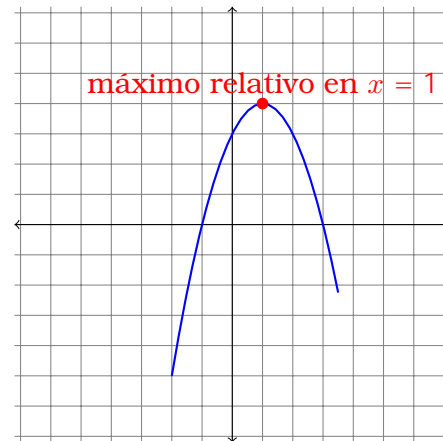
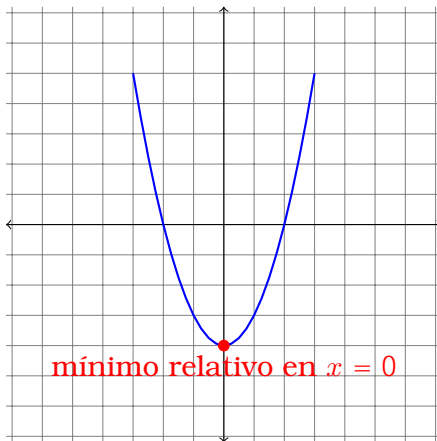
- **Creciente:** al aumentar el valor de la variable independiente también aumenta el valor de la variable dependiente.  
En la gráfica, cuando nos movemos a la derecha también nos movemos hacia arriba.
- **Decreciente:** al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el valor de la variable dependiente.  
En la gráfica, cuando nos movemos a la derecha también nos movemos hacia abajo.
- **Constante:** la variable dependiente toma siempre el mismo valor.  
En la gráfica resulta un segmento horizontal.



## EXTREMOS

Los **extremos relativos** de una función son aquellos puntos en los que la gráfica muestra un punto más elevado o más bajo que aquellos a su alrededor.

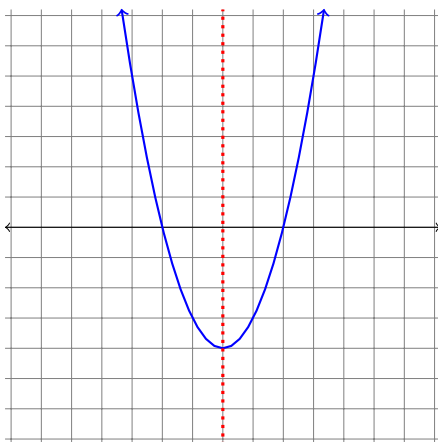
- **Máximo:** A su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente. Parece la cima de una colina.
- **Mínimo:** A su izquierda la función es decreciente y a su derecha creciente. Parece el punto más bajo de un valle.



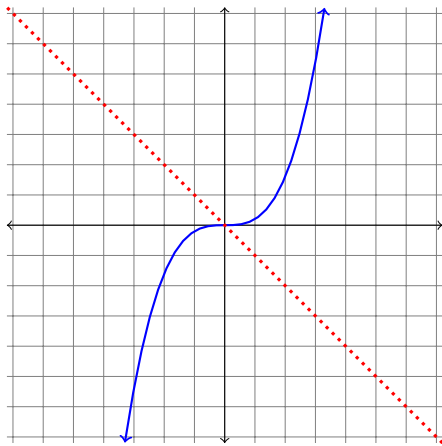
## SIMETRÍA

Decimos que una función presenta una **simetría** cuando una de sus mitades es el reflejo exacto de la otra, con respecto a una recta que hace las veces de espejo y que llamamos **eje de simetría**.

En este curso estudiaremos dos tipos de simetrías:

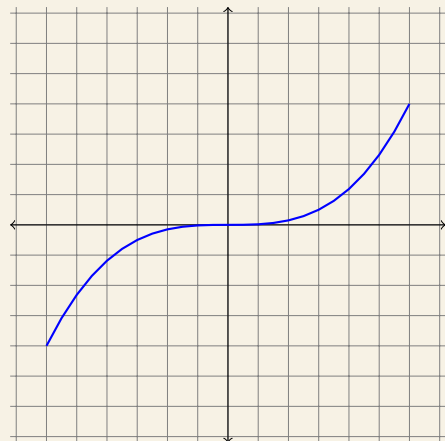
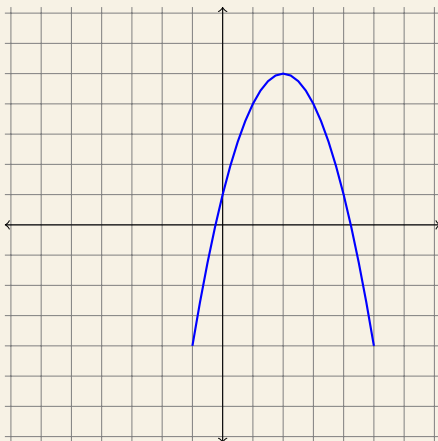
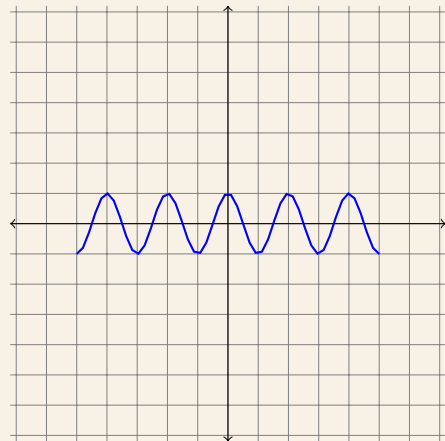
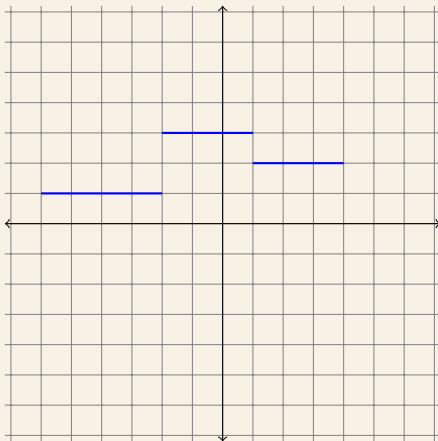


Una **función par** es aquella en la que el eje de simetría es el eje de coordenadas vertical  $x = 0$ , por lo que la gráfica a la izquierda de dicho eje es igual a la gráfica a la derecha.



Una **función impar** a aquella en la que el eje de simetría es la recta  $y = x$ , por lo que la gráfica a la izquierda del eje vertical es justamente la opuesta a la gráfica a la derecha.

6. Estudia las características de las siguientes gráficas de funciones:



7. Representa en Geogebra las siguientes funciones y estudia sus características:

a)  $f(x) = x^3$

e)  $f(x) = 3x^4$

i)  $f(x) = |2x| - 3$

b)  $f(x) = 3x^3$

f)  $f(x) = \frac{x^3}{5} + 4$

j)  $f(x) = x^4 - 5x^2$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

g)  $f(x) = |x|$

k)  $f(x) = x^5 - 3x^3$

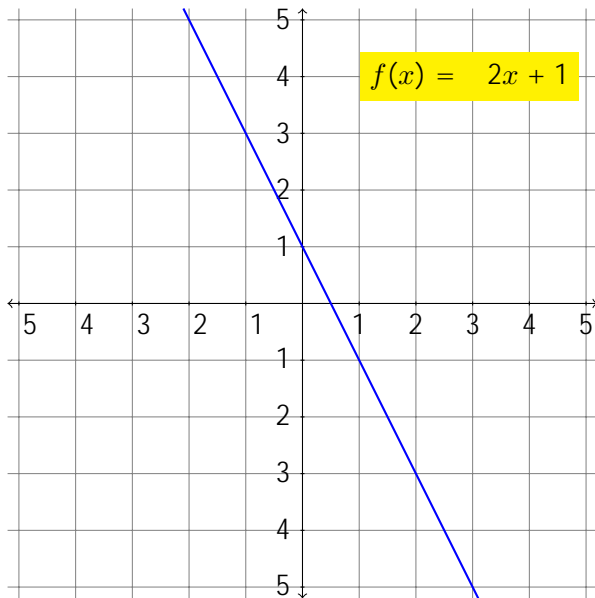
d)  $f(x) = x^4$

h)  $f(x) = |2x - 3|$

l)  $f(x) = x^7 + 3x^4 - 5x^2 + 1$

# FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

## FUNCIÓN LINEAL



Una **función lineal** es una función de la forma  $f(x) = mx + n$  donde  $m$  y  $n$  son dos números conocidos.

Le llamamos lineal porque su gráfica se corresponde con una línea recta.



Las rectas verticales **no** son la gráfica de ninguna función.

1. Construye la tabla de valores y representa la gráfica de las siguientes funciones lineales:

a)  $f(x) = x + 3$

c)  $f(x) = 3x$

e)  $f(x) = 2$

g)  $f(x) = x + 4$

b)  $f(x) = x - 3$

d)  $f(x) = -3x$

f)  $f(x) = 4x - 1$

h)  $f(x) = 1 - x$

2. Comprueba si el punto  $P = (3, 2)$  pertenece a alguna de las siguientes rectas:

a)  $f(x) = x + 1$

b)  $f(x) = 2x - 3$

c)  $f(x) = 7 - 3x$

d)  $f(x) = 3x - 7$

## PENDIENTE Y ORDENADA DE LA RECTA

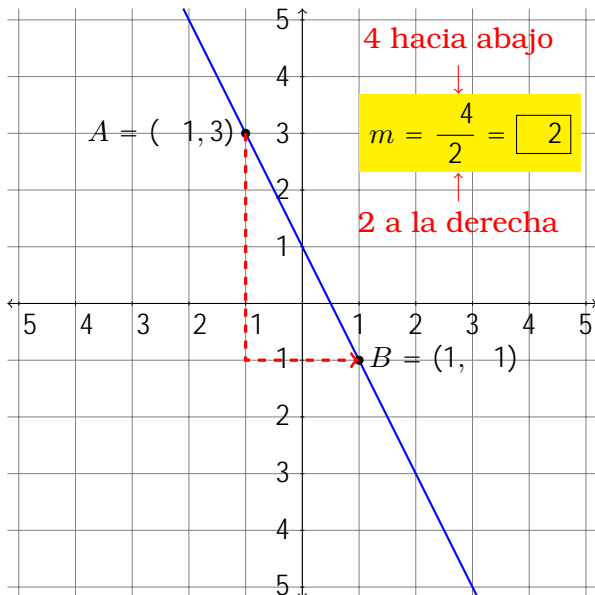
La **pendiente** representa la inclinación de la recta y corresponde al valor  $m$ .

Para calcularla necesitaremos dos puntos de la recta, y observar cuánto nos trasladamos hacia arriba por cada punto que nos trasladamos hacia la derecha.

Es decir, es la diferencia entre las coordenadas verticales dividida entre la diferencia de las coordenadas horizontales:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$





- Si la pendiente es positiva ( $m > 0$ ) la función lineal es creciente.
- Si la pendiente es cero ( $m = 0$ ) la función lineal es constante.
- Si la pendiente es negativa ( $m < 0$ ) la función lineal es decreciente.

3. Indica si las siguientes funciones son crecientes, decrecientes o constantes:

a)  $f(x) = x + 3$

c)  $f(x) = 3x$

e)  $f(x) = 2$

g)  $f(x) = x + 4$

b)  $f(x) = x - 3$

d)  $f(x) = -3x$

f)  $f(x) = 4x - 1$

h)  $f(x) = 1 - x$

4. Calcula la pendiente de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos. ¿Son crecientes, decrecientes o constantes?

a)  $A = (3, 4), B = (2, 5)$

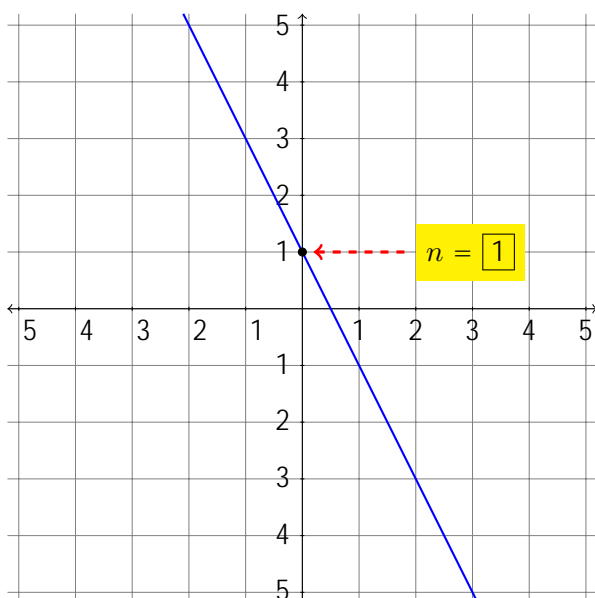
d)  $G = (2, 1), H = (5, 3)$

b)  $C = (3, 4), D = (4, 3)$

e)  $I = (4, 3), J = (5, 0)$

c)  $E = (0, 0), F = (2, 4)$

f)  $K = (2, 4), L = (2, 4)$



El **término independiente** (también llamado **ordenada respecto al origen**) representa la altura a la que se encuentra la recta y corresponde al valor  $n$ .

Para hallarlo solo necesitaremos observar el punto de la recta que corta al eje vertical.

Si no dispongo de la gráfica, puedo tomar la expresión  $f(x) = mx + n$ , con  $m$  ya conocida, y sustituir las coordenadas de uno de los puntos conocidos.

Consideremos la recta que pasa por los puntos  $A = (3, 2)$  y  $B = (4, 5)$ .

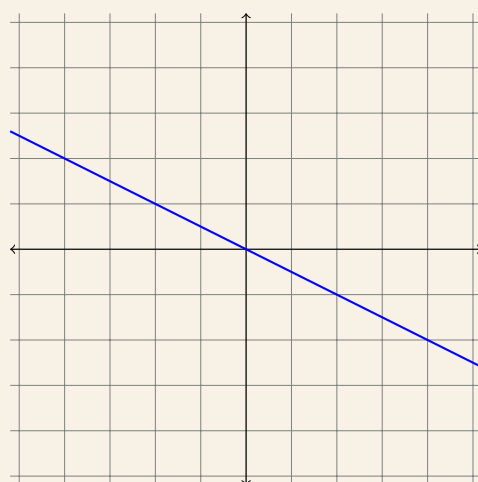
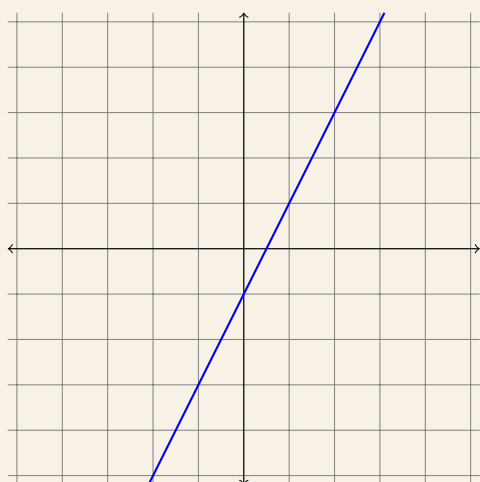
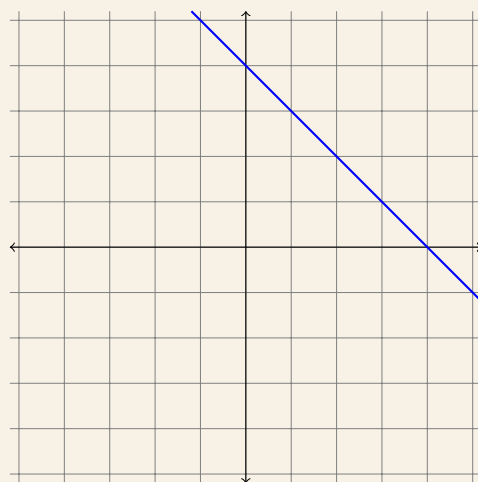
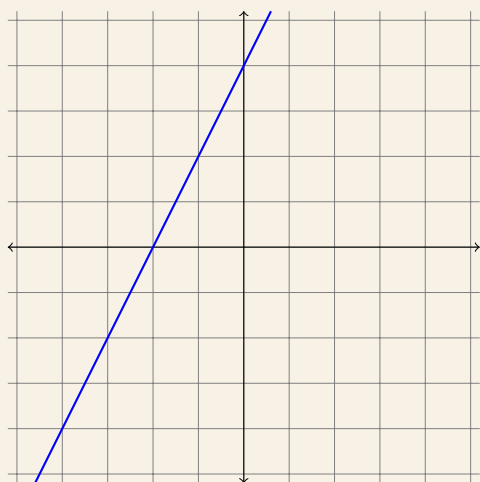
Su pendiente es  $m = \frac{5 - 2}{4 - 3} = \frac{3}{1} = 3$ , por lo tanto tiene una expresión del tipo  $f(x) = 3x + n$ .

Para hallar el valor de  $n$  sustituyo la coordenadas del punto  $A$  ( $x = 3, f(x) = 2$ ). Podría hacerlo también con las del punto  $B$  o cualquier otro punto dela recta.

$$2 = 3(3) + n \Rightarrow 2 = 9 + n \Rightarrow n = -7$$

Por lo tanto la expresión algebraica de la recta será  $f(x) = 3x - 7$ .

5. Observa las siguientes gráficas y deduce cuál es su expresión algebraica ( $f(x) = mx + n$ ):



6. Halla la expresión algebraica ( $f(x) = mx + n$ ) de las funciones lineales que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, utilizando la fórmula de obtención de la pendiente:

a)  $A = (0, 1), B = (2, 3)$

d)  $R = (1, 7), S = (-1, 3)$

b)  $C = (3, 4), D = (2, 3)$

e)  $F = (3, 1), G = (2, -1)$

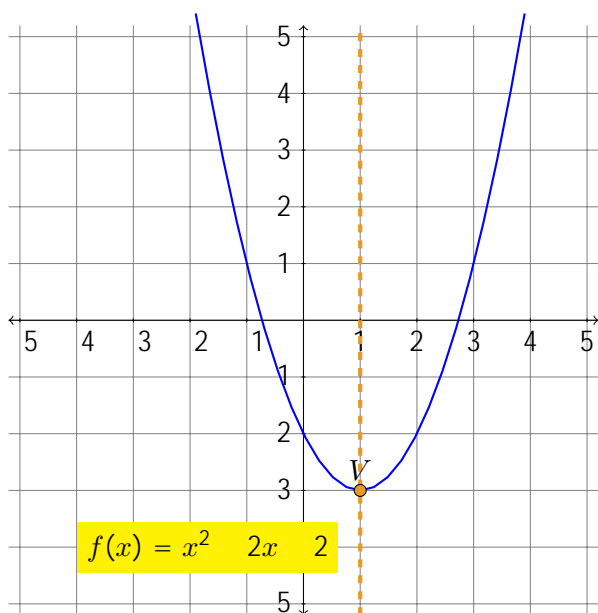
c)  $P = (-5, 3), Q = (-3, 3)$

f)  $I = (0, 0), J = (-5, -3)$

Problemas:

7. Un grifo vierte 36 litros de agua cada minuto.
- Escribe la función que relaciona el volumen de agua con las horas que está el grifo abierto.
  - ¿Cuánto tiempo tardará en llenar una piscina de 2 m x 3 m x 10 m?
8. Hemos ido al mercado y hemos visto que los chinchos están a 4'50 € el kilo, mientras que la lubina está a 21 € el kilo.
- Escribe las funciones que relacionan el precio con los kilogramos comprados.
  - Elabora tablas de valores y representa las dos gráficas.
  - ¿Cuál es la pendiente? ¿Y la ordenada en el origen?
9. En una tienda de ropa han empezado las rebajas haciendo un descuento del 20 % en todos los artículos de temporada.
- ¿Cuál es el precio de un artículo que antes valía 60 €? ¿Y de otro de 70 €?
  - Escribe la función que relaciona el precio original con el precio rebajado.
10. He contratado una potencia eléctrica de 4'6 kW en una compañía cuyo precio del término de potencia es de 0'1233 €/kW/día (que representa una cantidad fija que he de pagar todos los meses). Además me cobran un promedio de 0'15252 € por cada kWh consumido.
- Escribe la función que relaciona la cantidad a pagar en la factura mensual con los kWh consumidos.
  - Elabora una tabla de valores y represéntela gráficamente.
  - ¿Cuál es la pendiente? ¿Y la ordenada en el origen?
11. Quiero sacarme el carnet de conducir y he comparado las ofertas de tres autoescuelas diferentes. Representa las tres opciones gráficamente (en un mismo dibujo) y decide cuál es más ventajosa.
- Una me cobra una matrícula de 40 €, más 25 € por cada clase práctica.
  - Otra no me cobra matrícula, pero en cambio cada clase práctica cuesta 30 €.
  - La última me hace una oferta: por 550 € puedo hacer todas las prácticas que quiera.
12. Hemos abierto un pozo con una abertura de 3 m<sup>2</sup>.
- Si tiene una profundidad de  $x$  metros, ¿cuál será el volumen de agua que puede contener?
  - ¿Qué profundidad debe tener para alcanzar una capacidad de 5 000 litros?

## FUNCIÓN CUADRÁTICA



Una **función cuadrática** es una función de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números conocidos.

Su gráfica se corresponde a una parábola vertical.



La parábola, como figura geométrica, puede tener orientación vertical, horizontal o con cualquier otro grado de inclinación.

Pero las únicas que son gráficas de funciones son las verticales.

Todas las funciones cuadráticas tienen un único extremo relativo que llamaremos **vértice**.

Además esas funciones siempre tienen un **eje de simetría** que es la recta vertical que pasa por su vértice.

Por ese motivo localizar el vértice es fundamental para estudiar una parábola.

### ORIENTACIÓN DE LA PARÁBOLA

El coeficiente  $a$  nos da información respecto a la orientación (hacia arriba o hacia abajo) y la amplitud (más abierta o más cerrada) de la parábola.

13. Elabora una tabla de valores para  $x = -2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = 2$  y representa las siguientes funciones lineales:

a)  $f(x) = x^2$

b)  $f(x) = 2x^2$

c)  $f(x) = -x^2$

d)  $f(x) = -2x^2$

¿Qué conclusiones puedes sacar sobre la información que nos da el parámetro  $a$ ?

## LOCALIZACIÓN DEL VÉRTICE

El modo más sencillo de localizar el vértice es utilizando los puntos de corte con el eje horizontal, es decir, los que obtenemos a partir de resolver la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Si hay un único punto de corte con el eje horizontal, está claro que ese punto debe ser el vértice de la parábola.

14. Halla el punto de corte con el eje horizontal para localizar el vértice de las siguientes funciones cuadráticas:

a)  $f(x) = x^2 - 2x + 1$

c)  $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

b)  $f(x) = x^2 + 4x - 4$

d)  $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$

Utilízalo como referencia para elaborar una tabla de valores que te permita representarlas gráficamente.

Si hay dos puntos de corte con el eje horizontal entonces deben ser simétricos el uno de otro con respecto al eje de simetría.

Eso implica que el eje de simetría (y por ende el vértice) debe estar justo en el punto medio entre ambos puntos de corte.

15. Halla los puntos de corte con el eje horizontal para localizar el vértice de las siguientes funciones cuadráticas:

a)  $f(x) = x^2 - 1$

c)  $f(x) = x^2 + x - 6$

b)  $f(x) = x^2 + 4x - 3$

d)  $f(x) = 4x^2 - 4x + 3$

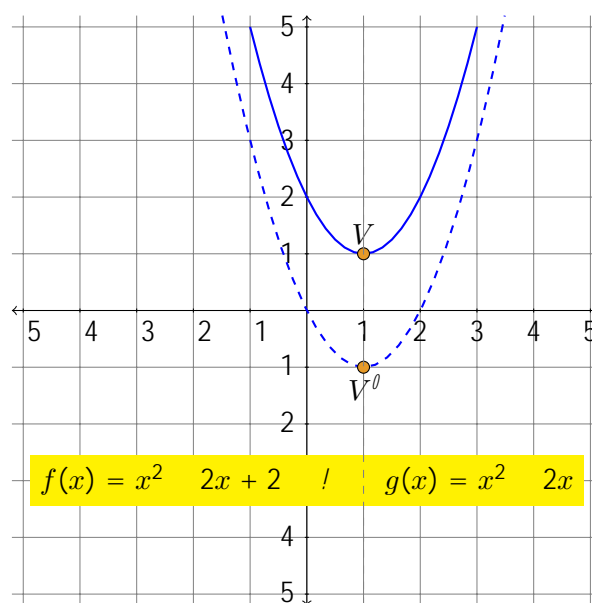
Elaborar sus tablas de valores y represéntalas gráficamente.

¿Y si no hay puntos de corte con el eje horizontal?

Entonces si  $a > 0$  sabemos que la gráfica está toda por encima del eje horizontal, y si  $a < 0$  sabemos que está toda por debajo.

Podemos trasladarla hacia abajo o arriba, obteniendo una nueva parábola cuyo vértice tendrá la misma coordenada  $x$ , y de la cual podamos obtener puntos de corte con facilidad.

Un punto de la parábola muy sencillo de calcular es el  $(0, c)$ , por lo tanto sabemos que si trasladamos la parábola justamente  $-c$  obtendremos una nueva parábola adecuada.



16. Halla el vértice de las siguientes funciones cuadráticas, elabora una tabla con al menos dos valores menores y dos mayores que el vértice, y finalmente representálas:

a)  $f(x) = x^2 - 6x + 10$

c)  $f(x) = x^2 + 3x - 4$

b)  $f(x) = 16x^2 - 8x + 5$

d)  $f(x) = 2x^2 - 5x - 5$

Este razonamiento puede extenderse a cualquier parábola. Incluso aquellas que tienen puntos de corte con el eje pueden ser trasladadas.

Así para hallar el vértice de una función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  podremos siempre buscar los puntos de corte con el eje horizontal de la parábola trasladada  $g(x) = ax^2 + bx$ .

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \quad ! \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Como el vértice tendrá por coordenada  $x$  justamente el punto medio de esas dos soluciones, podemos obtener una expresión general:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

17. Halla el vértice de las siguientes funciones cuadráticas, elabora una tabla de valores y finalmente representálas:

a)  $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

c)  $f(x) = x^2 - 2$

b)  $f(x) = 5x^2 + 6x + 3$

d)  $f(x) = 3x^2 + 9x - 7$

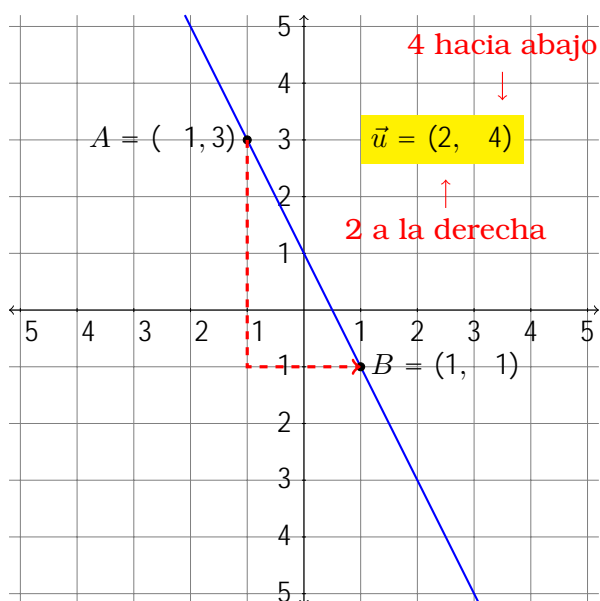
18. En una distribuidora de material de oficina venden el paquete de cien bolígrafos por 27 €. Se plantean realizar una promoción según la cual por cada paquete adicional descontarán 1'5 € en el precio de cada unidad.

- a) Si llamamos  $x$  al número de paquetes que adquiere un cliente, ¿cuál será el precio unitario al que se le cobrarán? ¿Y cuál será el total a facturar?
- b) Si sabemos que el coste de fábrica es de 16 € por paquete, ¿cuál es el beneficio obtenido por la venta de  $x$  paquetes?
- c) Estudia la función obtenida y decide si esa promoción es viable, y en caso afirmativo ¿cuál será el máximo descuento asumible?

# RECTAS EN EL PLANO

Entendemos una **recta** como una colección infinita de puntos que se extiende en una determinada dirección. Necesitamos por lo tanto definir formalmente qué es una dirección, concepto a partir del cual podremos dar ecuaciones para describir cualquier recta.

## DIRECCIÓN DE LA RECTA



Para definir la **dirección** en la que se extiende una recta, simplemente observamos dos puntos cualesquiera y cuantificamos el movimiento con respecto a ambas coordenadas.

Si los puntos  $A = (-1, 3)$  y  $B = (1, -1)$  pertenecen a la recta, con respecto a la primera coordenada nos hemos movido desde -1 hasta 1 (es decir, 2 unidades) y con respecto a la segunda coordenada nos hemos movido desde 3 hasta -1 (es decir, -4 unidades). Para eso nos hemos movido en la dirección  $(2, -4)$ .

1. Halla la dirección de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos:

a)  $A = (0, 1), B = (2, 3)$

b)  $C = (3, 4), D = (2, 3)$

c)  $E = (-1, 3), F = (4, 3)$

d)  $G = (3, 1), H = (2, -1)$

e)  $I = (0, 0), J = (-5, 3)$

f)  $K = (3, 4), L = (3, 7)$

g)  $M = (1, 7), N = (-1, 3)$

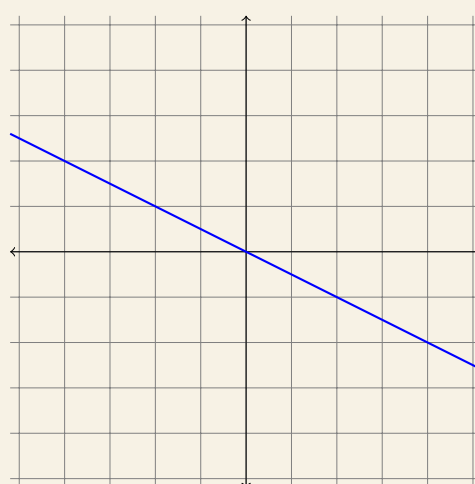
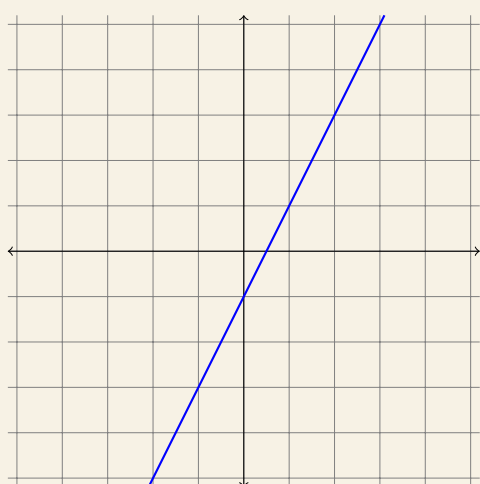
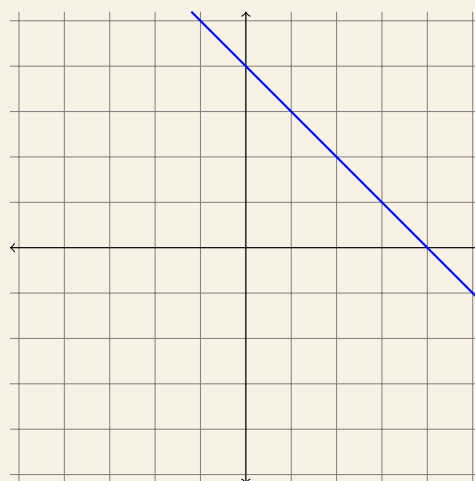
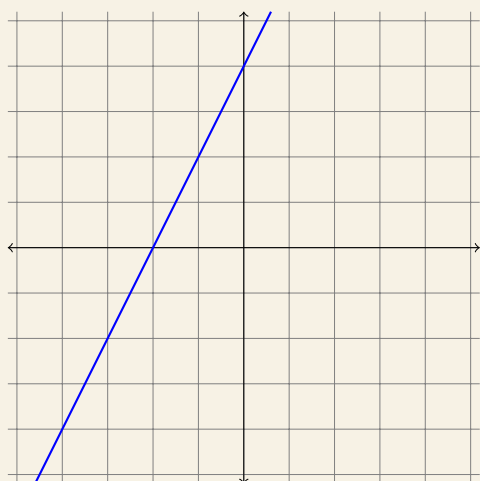
h)  $P = (-5, 3), Q = (3, 2)$

La recta tiene infinitos puntos, y si tomo otros dos puntos arbitrarios de la misma recta obtendré unas coordenadas distintas para la dirección de la misma.

Llamamos **vector** a cada pareja de coordenadas que indica una dirección, y todos los vectores que podamos hallar para la dirección de una recta son equivalentes entre sí.

Eso quiere decir simplemente que son proporcionales, un vector puede ser el doble, o el triple, o la décima parte de otro vector que indique la misma dirección.

2. Obtén un vector que indique la dirección de cada una de estas rectas:



3. Dibuja en tu cuaderno una recta vertical. ¿Cuál es su dirección?

## PENDIENTE DE LA RECTA

La dirección de una recta está íntimamente relacionada con su pendiente, y es muy sencillo obtener la una a partir de la otra.

$$\vec{u} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \quad ! \quad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

4. Estas son las direcciones de varias rectas. Halla su pendiente:

a)  $\vec{a} = (3, 4)$

b)  $\vec{b} = (6, 8)$

c)  $\vec{c} = (4, 3)$

d)  $\vec{d} = (0, 1)$

5. ¿Qué ocurre si intentas obtener la pendiente de una recta vertical?



6. Estas son las pendientes de varias rectas. Halla un vector con coordenadas enteras que de su dirección.

a)  $m = 2$

b)  $m = 2$

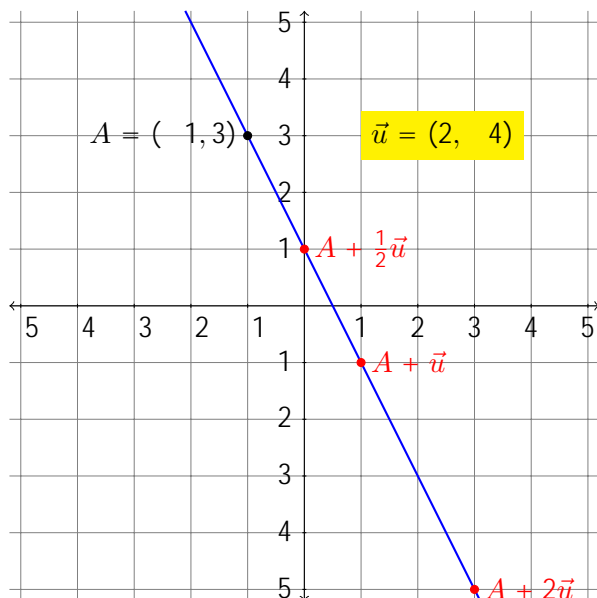
c)  $m = 0^{\circ}5$

d)  $m = 0^{\circ}25$

## ECUACIONES DE LA RECTA

Para describir algebraicamente una recta necesitamos conocer al menos un punto que pertenezca a ella y además su dirección. Esos datos nos permiten expresar una ecuación que deben cumplir todos los puntos de la recta.

### ECUACIÓN VECTORIAL



La forma más sencilla de plantear una ecuación de la recta es tomar un punto de referencia y a partir de ahí movernos en la dirección de la recta tanto como el vector, o dos veces el vector, o media vez el vector, etc.

Esa «cantidad de veces» el vector puede ser cualquier número, y lo caracterizaremos con el parámetro  $t$  que puede tomar cualquier valor real.

$$(x, y) = (x_A, y_A) + t (x_u, y_u)$$

$$(x, y) = (1, 3) + t (2, 4)$$

7. Halla la ecuación vectorial de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos:

a)  $A = (0, 1), B = (2, 3)$

e)  $I = (0, 0), J = (5, 3)$

b)  $C = (3, 4), D = (2, 3)$

f)  $K = (3, 4), L = (3, 7)$

c)  $E = (1, 3), F = (4, 3)$

g)  $M = (1, 7), N = (1, 3)$

d)  $G = (3, 1), H = (2, 1)$

h)  $P = (5, 3), Q = (3, 2)$

8. ¿Existe algún valor del parámetro  $t$  para el que el punto  $R = (3, 5)$  pertenezca a cada una de las rectas anteriores?

## ECUACIONES PARAMÉTRICAS

La ecuación vectorial se puede reescribir, observando por un lado lo que ocurre con la coordenada  $x$  y por otro lado lo que ocurre con la coordenada  $y$ .

$$\begin{aligned}x &= x_A + t \cdot x_U \\y &= y_A + t \cdot y_U\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2t \\y &= 3 - 4t\end{aligned}$$

9. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, con las que ya trabajamos en ejercicios anteriores:

a)  $A = (0, 1), B = (2, 3)$

e)  $I = (0, 0), J = (5, 3)$

b)  $C = (3, 4), D = (2, 3)$

f)  $K = (3, 4), L = (3, 7)$

c)  $E = (-1, 3), F = (4, 3)$

g)  $M = (1, 7), N = (-1, 3)$

d)  $G = (3, 1), H = (2, -1)$

h)  $P = (-5, 3), Q = (-3, 2)$

10. ¿Existe algún valor del parámetro  $t$  para el que el punto  $S = (-3, -1)$  pertenezca a cada una de las rectas anteriores?

## ECUACIÓN CONTINUA

Utilizar un parámetro es útil para plantear ecuaciones, pero comprobar si un punto pertenece a una recta resulta complejo. Por eso intentaremos librarnos de él, utilizando el método de igualación (que vimos en el tema de sistemas de ecuaciones).

$$\frac{y - y_A}{y_U} = \frac{x - x_A}{x_U}$$

$$\frac{y - 3}{4} = \frac{x + 1}{2}$$

11. Halla la ecuación continua de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, utilizando las ecuaciones paramétricas que ya has obtenido, en aquellos casos en los que sea posible:

a)  $A = (0, 1), B = (2, 3)$

e)  $I = (0, 0), J = (5, 3)$

b)  $C = (3, 4), D = (2, 3)$

f)  $K = (3, 4), L = (3, 7)$

c)  $E = (-1, 3), F = (4, 3)$

g)  $M = (1, 7), N = (-1, 3)$

d)  $G = (3, 1), H = (2, -1)$

h)  $P = (-5, 3), Q = (-3, 2)$

12. ¿A cuáles de las rectas anteriores pertenece el punto  $T = (5, 5)$ ?

13. a) ¿Qué tipos de rectas no tienen ecuación continua? ¿Por qué?

b) ¿Qué ecuación sencilla podría describir esas rectas?

## ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE

La ecuación continua ya facilita mucha información pero podemos simplificarla multiplicando por el coeficiente  $y_u$ , obteniendo la pendiente  $m = \frac{y_u}{x_u}$  en el otro miembro de la ecuación.

$$y - y_A = m (x - x_A)$$

$$y - 3 = 2 (x + 1)$$

Además es posible calcular la ecuación punto-pendiente incluso para rectas horizontales, a pesar de no haber obtenido previamente la ecuación continua.

14. Halla la ecuación punto-pendiente de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, utilizando la ecuación continua que ya has obtenido:

a)  $A = (0, 1), B = (2, 3)$

d)  $I = (0, 0), J = (-5, 3)$

b)  $C = (3, 4), D = (2, 3)$

e)  $M = (1, 7), N = (-1, 3)$

c)  $G = (3, 1), H = (2, -1)$

f)  $P = (-5, 3), Q = (-3, 2)$

15. La recta que pasa por los puntos  $E = (-1, 3)$  y  $F = (4, 3)$  es horizontal y por lo tanto no tiene ecuación continua. ¿Cuál es su ecuación punto-pendiente?

16. La recta que pasa por los puntos  $K = (3, 4)$  y  $L = (3, 7)$  tampoco tiene ecuación continua, pero en este caso no se puede calcular la punto-pendiente. ¿Por qué?

17. ¿A cuáles de las rectas anteriores pertenece el punto  $U = (-11, 7)$ ?

## ECUACIÓN EXPLÍCITA

Bastaría despejar la variable  $y$  de la ecuación de la recta para obtener una ecuación que coincide con la expresión que hemos visto en el tema de funciones lineales.

$$y = m x + n$$

$$y = 2x + 1$$

18. Halla la ecuación explícita de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos:

a)  $A = (0, 1), B = (2, 3)$

e)  $I = (0, 0), J = (-5, 3)$

b)  $C = (3, 4), D = (2, 3)$

f)  $K = (3, 4), L = (3, 7)$

c)  $E = (-1, 3), F = (4, 3)$

g)  $M = (1, 7), N = (-1, 3)$

d)  $G = (3, 1), H = (2, -1)$

h)  $P = (-5, 3), Q = (-3, 2)$

19. ¿A cuáles de las rectas anteriores pertenece el punto  $V = (-1, 0)$ ?

## ECUACIÓN GENERAL

Esta ecuación puede obtenerse a partir de la continua, la punto-pendiente o la explícita. Basta operar y reordenar los términos de manera adecuada.

$$Ax + By + C = 0$$

$$2x + y - 1 = 0$$

20. Halla la ecuación general de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, utilizando alguna de las ecuaciones obtenidas anteriormente:

a)  $A = (0, 1), B = (2, 3)$

e)  $I = (0, 0), J = (5, 3)$

b)  $C = (3, 4), D = (2, 3)$

f)  $M = (1, 7), N = (1, 3)$

c)  $E = (1, 3), F = (4, 3)$

g)  $P = (5, 3), Q = (3, 2)$

d)  $G = (3, 1), H = (2, 1)$

21. ¿A cuáles de las rectas anteriores pertenece el punto  $V = (7, 4)$ ?

22. Observa cada una de las ecuaciones generales que has obtenido y también la pendiente de esas rectas. ¿Puedes encontrar alguna relación?

Una vez conocidas todas las ecuaciones de la recta, es importante entender la información que nos ofrecen y saber trasladarla a otra de las ecuaciones.

23. Escribe todas las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:

a)  $A = (4, 6), B = (3, 8)$

c)  $E = (4, 7), F = (8, 7)$

b)  $C = (3, 4), D = (5, 2)$

d)  $G = (2, 9), H = (2, 6)$

24. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta  $3x + 2y - 5 = 0$ .

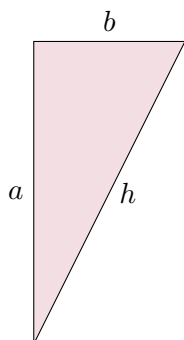
25. Escribe la ecuación general de la recta  $\frac{y - 5}{2} = \frac{x - 3}{5}$ .

26. Escribe la ecuación punto-pendiente de la recta  $y = 4x + 2$ .

27. Escribe la ecuación explícita de la recta  $3x + 2y + 8 = 0$ .

# GEOMETRÍA PLANA

## TEOREMA DE PITÁGORAS



Uno de los teoremas clásicos de la geometría es el teorema de Pitágoras, aplicado a **triángulos rectángulos**.

Para entenderlo, debemos conocer los nombres de las partes de un triángulo rectángulo:

- La **hipotenusa** es el lado opuesto al ángulo recto, y es siempre el mayor de los tres.
- Los **catetos** son los lados contiguos al ángulo recto.

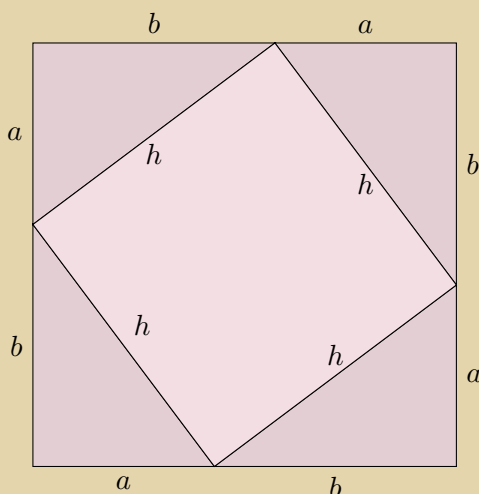
### Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$h^2 = a^2 + b^2$$

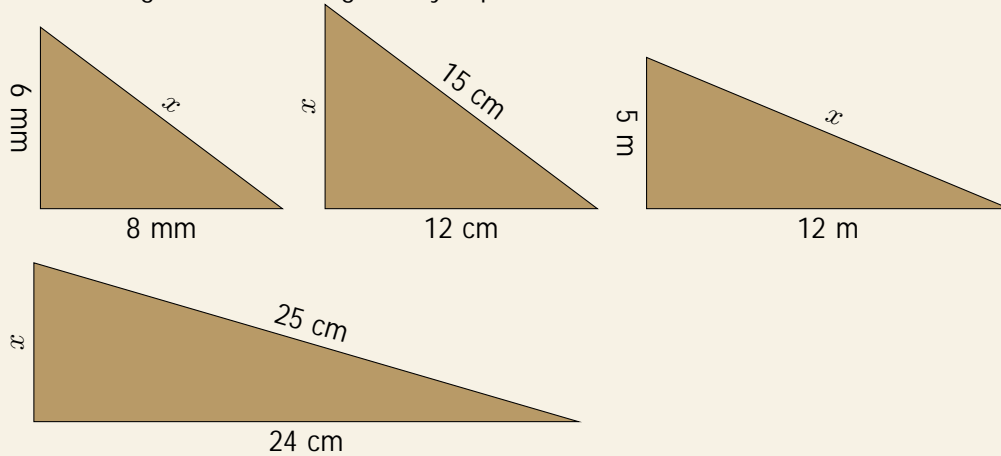
Intenta demostrar el teorema de Pitágoras:

28. En la siguiente figura hay cuatro triángulos rectángulos iguales que encierran un cuadrado:



- Halla el área del cuadrado grande, teniendo en cuenta que su lado mide  $a + b$ .  
¡Recuerda las identidades notables!
- Halla el área de los rectángulos y el área del cuadrado pequeño.
- El área del cuadrado grande es igual al área de los cuatro triángulos más el área del cuadrado pequeño.  
Escribe algebraicamente esa igualdad.
- Despeja  $h^2$ .  
¿Qué expresión obtienes?

29. Halla la longitud de las incógnitas, y exprésalas en las unidades adecuadas:



El teorema de Pitágoras nos permite conocer características de otras figuras, dividiéndolas en triángulos rectángulos convenientes.

30. ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1 metro?
31. Halla la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 3 metros.
32. Calcula la longitud del lado de un rombo sabiendo que su diagonal mayor mide 80 cm y su diagonal menor mide 60 cm.
33. Calcula la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 4 cm.

## PERÍMETRO Y ÁREA

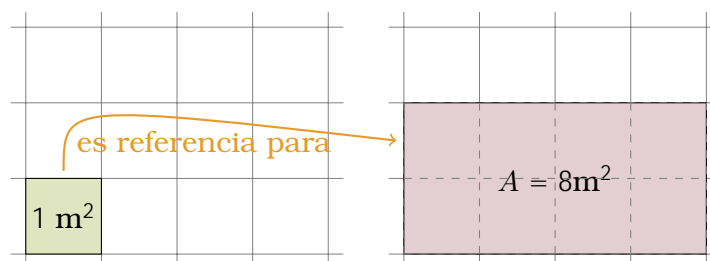
El **perímetro de un polígono** es la medida del contorno que rodea a la figura. Se calcula sumando todos los lados de la figura, y se expresa en unidades de longitud (metro, centímetro, kilómetro, etc.).

El **área de un polígono** es la medida de la extensión que ocupa la figura.

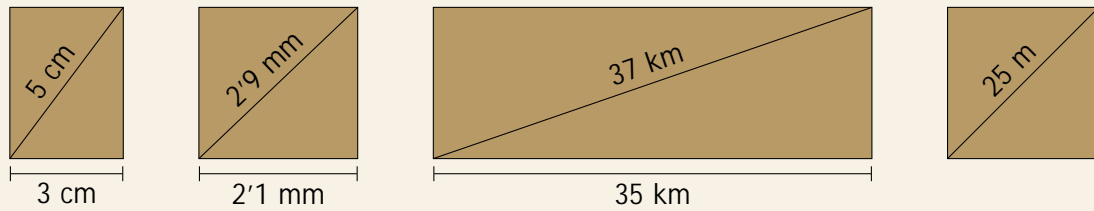
Se calcula tomando como referencia una figura cuadrada de lado 1 unidad, y se expresa en cuadrados de unidades de longitud ( $m^2$ ,  $cm^2$ ,  $km^2$ , etc.)

### ÁREA DEL RECTÁNGULO

El área de un rectángulo se obtiene por composición de múltiples cuadrados de lado unitario, por lo que puede calcularse multiplicando base por altura.



34. Aplica el teorema de Pitágoras y calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:



35. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo cuya base mide 1'5 metros y cuya altura mide el triple que la base.
36. La diagonal de un rectángulo mide 1 metro más que uno de sus lados. El otro lado mide 5 metros. Ayúdate de un dibujo para expresarlo algebraicamente. Calcula el perímetro y el área del rectángulo.
37. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo cuya base mide 1 cm más que su altura y cuya diagonal mide 29 centímetros.
38. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo cuya altura mide 11 centímetros y cuya base es 1 centímetro menor que la diagonal.

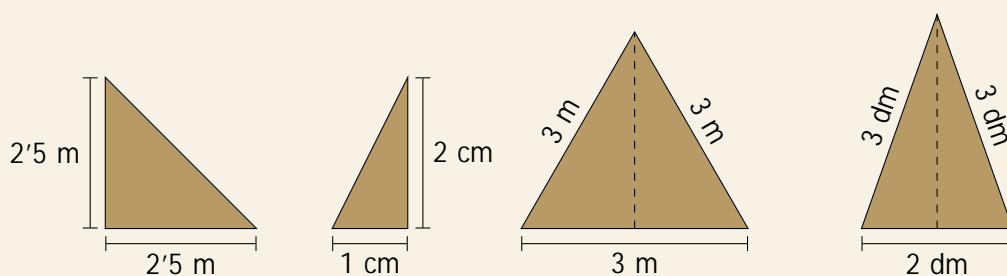
## ÁREA DEL TRIÁNGULO

Un triángulo ocupa la mitad de superficie que un rectángulo con la misma base y altura. Este hecho es muy evidente cuando se trata de un triángulo rectángulo.

Cuando hablamos de otros triángulos la observación no es directa, pero si los dividimos en dos partes trazando su altura podemos ver que también es la mitad del rectángulo correspondiente.



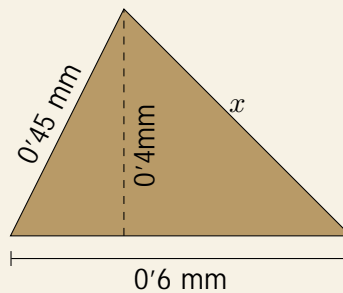
39. Aplica el teorema de Pitágoras y calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:



40. ¿Cuál es el perímetro de este triángulo?

En este ejercicio necesitarás hallar un valor adicional para poder calcular la longitud del lado desconocido.

Eso implica aplicar el teorema de Pitágoras en varias ocasiones.



41. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 centímetros y uno de sus catetos 10 centímetros.

- a) Utiliza el teorema de Pitágoras para hallar la longitud del otro cateto.
- b) Halla el perímetro y el área del triángulo.

42. Calcula el perímetro y el área de los siguientes triángulos rectángulos:

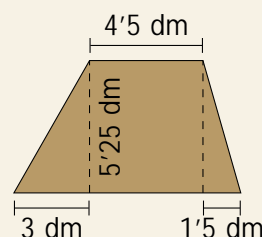
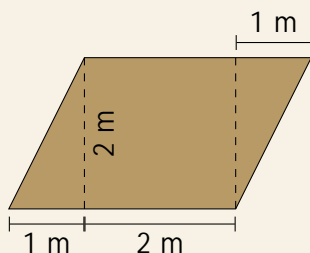
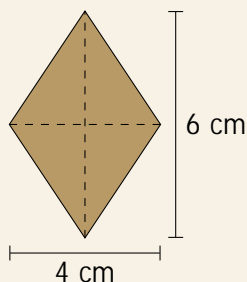
- a) Un cateto mide 4 cm y el otro 3 cm.
- b) Un cateto mide 40 m y la hipotenusa mide 41 m.
- c) Un cateto mide 8 mm y la hipotenusa mide 17 mm.
- d) Un cateto mide 12 cm y el otro 35 cm.
- e) Un cateto mide 60 m y la hipotenusa mide 61 m.
- f) Un cateto mide 20 cm y el otro 21 cm.

43. Halla el perímetro y el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 7 decímetros.

## ÁREA DE OTROS POLÍGONOS

Conocido el modo en que se calculan el área de un rectángulo y el área de un triángulo, ya podemos hallar la de cualquier otra figura poligonal descomponiéndola en rectángulos y triángulos convenientes.

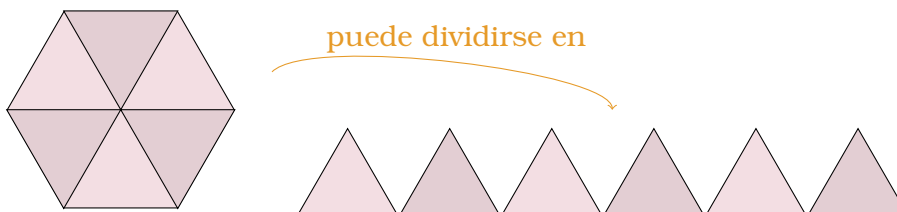
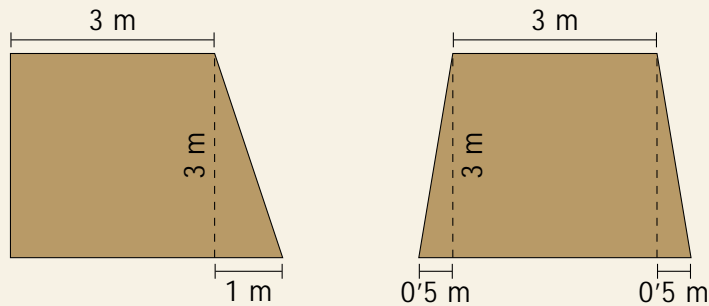
44. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:



45. El lado de un rombo mide 12'5 cm y una de sus diagonales 15 cm. Calcula su perímetro y su área.



46. Compara el perímetro y el área de estos dos trapecios:



Un caso particular son los polígonos regulares, que pueden dividirse en tantos triángulos iguales como lados tienen.

Cada uno de esos triángulos tiene como base uno de los lados del polígono y como altura la apotema, de modo que su área es:

$$A_T = \frac{\text{lado} \cdot \text{apotema}}{2}$$

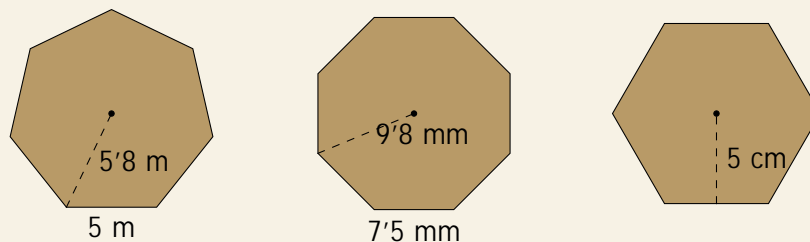
Y por lo tanto el área total del polígono es:

$$A = n^{\circ} \text{ lados} \cdot \frac{\text{lado} \cdot \text{apotema}}{2}$$



El hexágono regular está formado por 6 triángulos equiláteros. Por eso el lado del hexágono es igual a su radio.

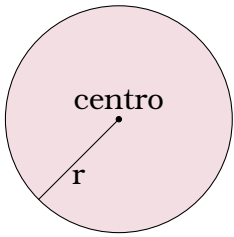
47. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:



48. Halla el lado de un pentágono regular de  $61.5 \text{ cm}^2$  de área y  $4.1 \text{ cm}$  de apotema.

49. Averigua la apotema de un hexágono regular de área  $93.5 \text{ cm}^2$ .

## FIGURAS CIRCULARES



El **perímetro de un círculo**, es decir, la longitud de la circunferencia, viene dada en función de su radio por la expresión  $2\pi r$ .

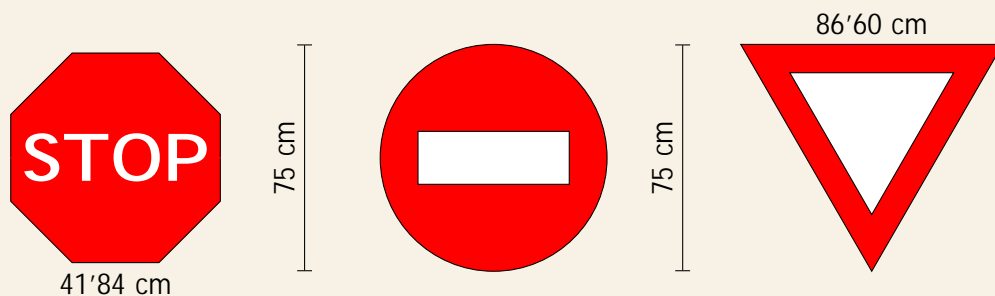
El **área de un círculo** también viene dada en función de su radio, por la expresión  $\pi r^2$ .



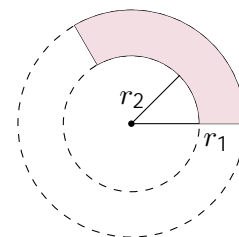
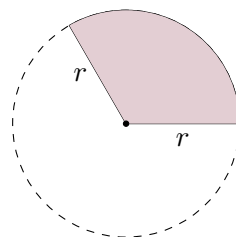
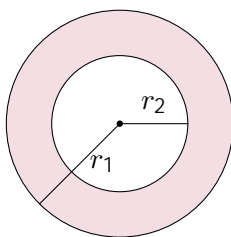
$\pi$  es un número irracional, es decir, tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

Para evitar errores de utilizaremos el valor que nos facilita la calculadora.

50. Halla el perímetro y el área de un círculo cuyo radio mide 2 metros.
51. Halla el perímetro y el área de un círculo cuyo diámetro mide 2 metros.
52. Compara la superficie de distintas señales de tráfico, todas de la misma altura, para saber cuánto aluminio se necesita para su fabricación:



53. Halla el área de un círculo en el cual se puede inscribir un cuadrado de lado 3 centímetros.



El **área de una corona circular** es la diferencia del área del círculo grande menos el área del círculo pequeño.

$$A = A_{\text{grande}} - A_{\text{pequeño}}$$

El **área del sector circular** es una porción (¡recuerda la razón de proporción!) del círculo completo, que tiene un ángulo total de  $360^\circ$ .

$$A = \frac{\text{ángulo}}{360} A_{\text{círculo}}$$

El **área del trapezio circular** se calcula empleando primero el razonamiento de la corona y a continuación el del sector.

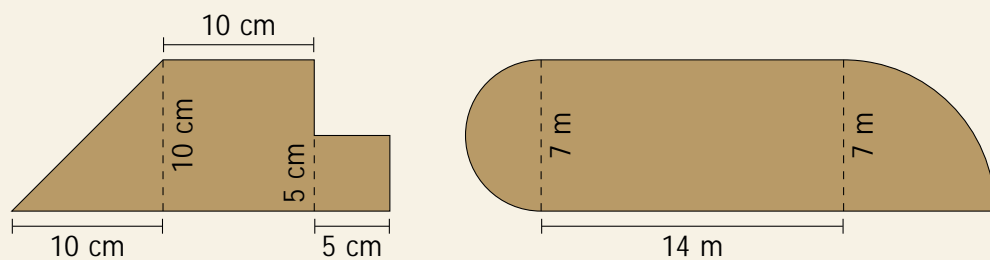
54. Calcula el área de una corona circular cuyos radios miden 3 y 5 metros.
55. Calcula el perímetro y el área de un semicírculo de radio 4 metros.
56. Calcula el perímetro y el área de un cuarto de corona circular cuyos radios miden 1 y 3 metros.

## FIGURAS COMPUESTAS

Como el estudio de rectángulos y triángulos es sencillo, para hallar el área de otras figuras poligonales es conveniente descomponerlas en esas figuras.

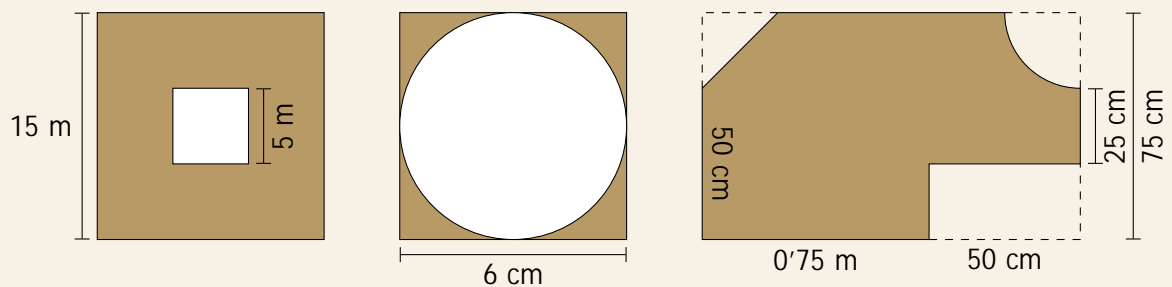
Si la figura tiene alguna parte circular, lógicamente esa se descompondrá aparte.

57. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:



En ocasiones las figuras tienen huecos, bien sean interiores o estén justo en un borde. En ese caso podemos restarle a una figura grande el área del borde.

58. Calcula el área de las siguientes figuras:

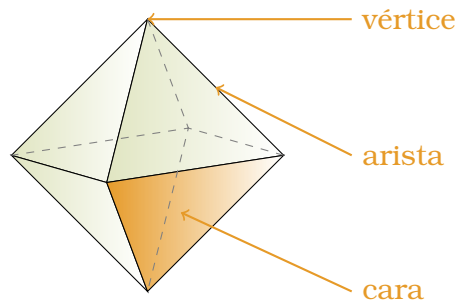


# CUERPOS GEOMÉTRICOS

## POLIEDROS

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por 4 o más polígonos.

- Llamamos **caras** a cada uno de los polígonos que limitan al poliedro.
- Llamamos **aristas** a los lados de dichos polígonos. Cada arista es común a dos caras.
- Llamamos **vértices** a los puntos extremos de los lados. En cada vértice concurren varias aristas.



El **área de un poliedro** es la suma de las áreas de sus caras.

Para calcularlo de forma sencilla consideraremos su desarrollo plano.

El **volumen de un poliedro** es el espacio que ocupa.

Para calcularlo necesitamos conocer el área de la base y la altura del poliedro.



Las unidades de volumen con las que trabajaremos serán los metros cúbicos ( $m^3$ ) y sus múltiplos, así como los litros (l) y sus múltiplos.

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$$

## PRISMAS

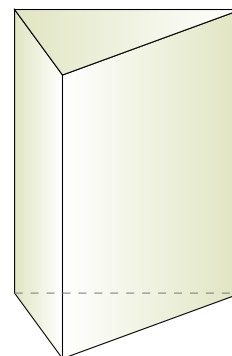
Un **prisma** es un poliedro formado por dos bases poligonales iguales unidas mediante caras laterales que son paralelogramos.

Los hexaedros (o cubos) y los ortoedros son casos particulares de prismas.

El área de un prisma es la suma del área de sus bases y caras laterales.

El volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

$$V = A_{\text{base}} \text{ altura}$$



1. Halla el área y el volumen de los cubos cuyas aristas midan:

a) 5 cm

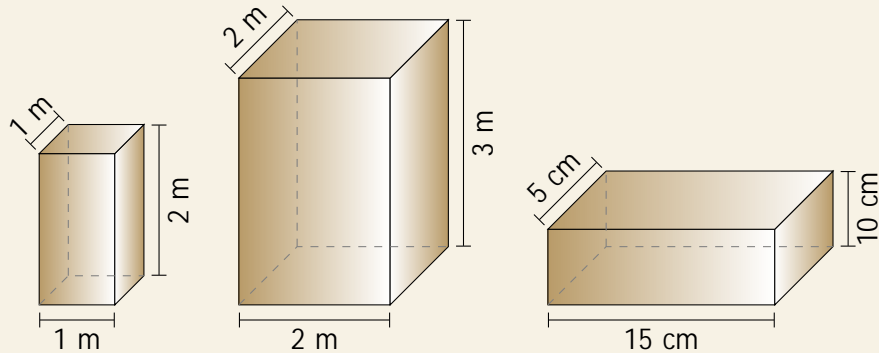
b) 25 mm

c) 10 cm

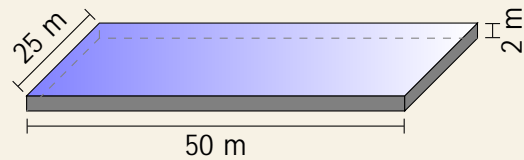
d) 1'1 dm

2. Halla la longitud de la arista de un cubo cuya área es  $12 \text{ cm}^2$  y calcula su volumen.

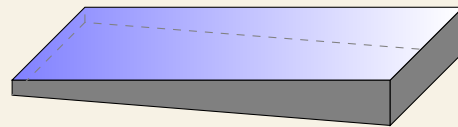
3. Calcula el área y el volumen de los siguientes ortoedros:



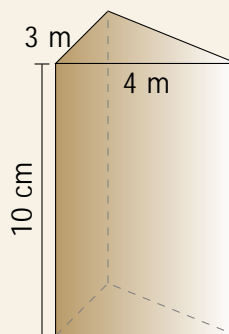
4. Las dimensiones de una piscina olímpica son 50 m de largo, 25 m de ancho y 2 m de profundidad. ¿Cuántos litros de agua necesitaremos para llenarla?



5. Las dimensiones de otra piscina son similares (50 m de largo, 25 m de ancho) pero la profundidad va de 2 m a 6 m. ¿Cuántos litros de agua necesitaremos para llenarla?



6. Calcula el área y el volumen de los siguientes prismas triangulares:



7. Esboza un dibujo de un prisma de 10 cm de altura y cuya base es un rombo con diagonal mayor 24 cm y diagonal menor 18 cm. Calcula su área y su volumen.

8. Calcula el área y el volumen de un prisma de 15 cm de altura y que tiene por base un rectángulo de lados 2 y 3 cm.

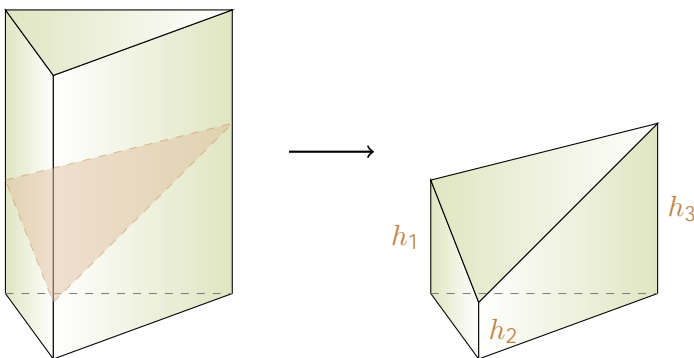
9. Calcula el área y el volumen de un prisma recto de 3 m de altura y que tiene por base un triángulo equilátero de 2 m de arista.

10. Calcula el área y el volumen de un prisma de 20 cm de altura y cuya base es un triángulo rectángulo con catetos 5 y 7 cm.
11. Calcula el área y el volumen de un prisma de 10 cm de altura y cuya base es un hexágono regular de lado 4 cm.
12. Calcula el área y el volumen de un prisma de 10 cm de altura y cuya base es un polígono irregular de perímetro 35 cm y área 25 cm<sup>2</sup>.
13. Un tetrabrick de leche mide 7 cm de ancho, 7 cm de fondo y 20 cm de alto.
  - a) ¿Qué cantidad de material es necesaria para fabricarlo?
  - b) ¿Qué volumen tiene su interior? Exprésalo en mililitros.

Para pensar un poco:

14. El volumen de un prisma rectangular es de 3375 cm<sup>3</sup> y la suma de sus tres aristas concurrentes en un vértice es 65 cm. Halla la longitud de cada una de las aristas, sabiendo que están en progresión geométrica.

## PRISMA TRUNCADO



Si cortamos un prisma con un plano no paralelo a las bases, obtenemos dos fragmentos irregulares.

A cada uno de ellos le llamaremos **prisma truncado** o **tronco de prisma**.

Para calcular el área de este tipo de figuras hemos de tener en cuenta que cada una de sus caras será ahora diferente y, en general, irregular.

El volumen de un tronco de prisma es el producto del área de la base por la media aritmética de las tres alturas medidas en sus aristas verticales.

$$V = A_{\text{base}} \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_n}{n}$$

15. Calcula el volumen de los siguientes troncos de prisma:
  - a) Su base es un triángulo rectángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm. Sus alturas son 1 cm, 4 cm y 3 cm.
  - b) Su base es un rectángulo de lados 20 cm y 15 cm. Tiene dos alturas de 4 cm y otras dos de 5 cm.
  - c) Su base es un triángulo equilátero de lado 4 m. Sus alturas son 1 m, 2 m y 6 m.

## PIRÁMIDES

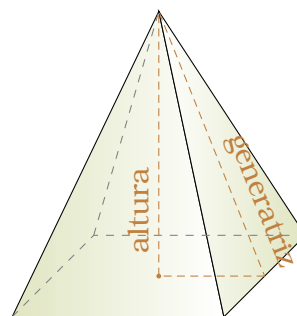
Una **pirámide** es un poliedro formado por una base poligonal y caras laterales triangulares que confluyen a un punto común llamado vértice.

Un caso particular de pirámide es el **tetraedro**, un poliedro regular formado por 4 triángulos equiláteros.

El área de una pirámide es la suma del área de su base y sus caras laterales.

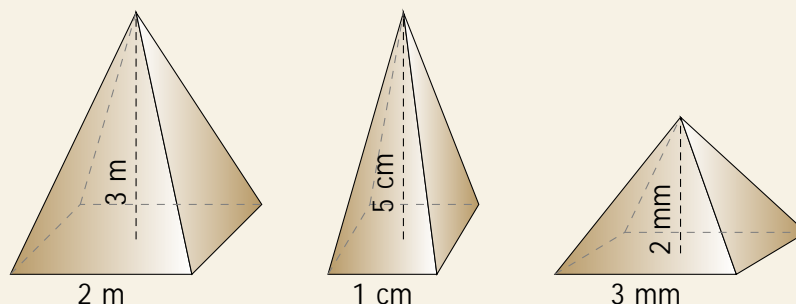
El volumen de una pirámide es la tercera parte del producto del área de la base y la altura.

$$V = \frac{A_{\text{base}} \cdot \text{altura}}{3}$$



Debemos observar que la altura de la pirámide y su generatriz (altura de una de sus caras laterales) se pueden relacionar mediante el teorema de Pitágoras, por lo que es habitual que los problemas nos faciliten solo uno de los dos datos.

16. Calcula el área y el volumen de las siguientes pirámides de base cuadrada:



17. Calcula el área y el volumen de una pirámide triangular en la que las aristas de la base miden 2 mm y la altura es 12 mm.

18. Calcula el área y el volumen de una pirámide cuadrangular de altura 6 cm y cuya base tiene 16 cm de arista.

19. Calcula el área y el volumen de una pirámide hexagonal en la que la arista de la base mide 3 cm y la arista lateral 5 cm.

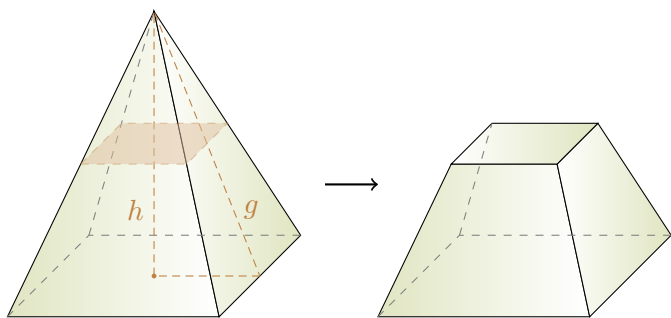
20. La Gran Pirámide de Giza se asienta sobre una base de  $52900 \text{ m}^2$  y tiene una altura de 140 metros. Utiliza tus conocimientos de semejanza para calcular el volumen de maquetas de la pirámide realizadas en las siguientes escalas:

a) 1:20

b) 1:100

c) 1:1000

## PIRÁMIDE TRUNCADA



Para obtener una **pirámide truncada** o **tronco de pirámide** también la cortaremos con un plano.

En esta ocasión escogeremos uno paralelo a la base para que la figura resultante sea más sencilla, de modo que obtendremos un tronco con dos bases paralelas.

En este caso, el fragmento eliminado es también una pirámide y además es **semejante** a la original.

21. Hemos partido una pirámide de 10 metros de altura y base cuadrada de 3 metros de arista, justo a la mitad de su altura, obteniendo un tronco de pirámide de 5 metros de altura.

- Utiliza un razonamiento de semejanza para hallar las dimensiones de la base superior. Calcula el área de ambas bases.
- Halla la generatriz de la pirámide original, y utiliza un razonamiento de semejanza para deducir el segmento de la misma que pertenece al tronco. Calcula el área lateral del tronco de pirámide.
- Calcula el área y el volumen del tronco de pirámide.

22. Tenemos un tronco de pirámide cuya base mayor tiene un área de  $900 \text{ cm}^2$ , cuya base menor tiene un área de  $25 \text{ cm}^2$  y cuya altura es de 12 cm.

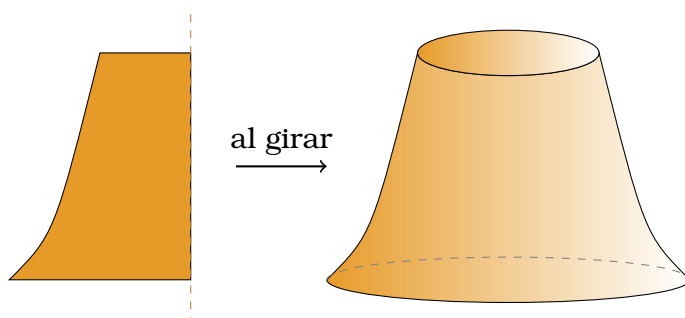
- Deduces la razón de semejanza entre la pirámide completa y el trozo eliminado.
- Utiliza la razón de semejanza para conocer la altura que tendría la pirámide completa.
- Calcula el volumen del tronco de pirámide.

## SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Los cuerpos que vamos a estudiar a continuación se llaman **sólidos de revolución**, es decir, son figuras no poliédricas que se obtienen a partir de una figura plana que gira sobre un eje.

Algunas de estas figuras tienen un desarrollo plano que consta de figuras circulares y poligonales sencillas, lo que permite nos permite conocer sus áreas.

Sus volúmenes, por otro lado, son análogos a los de los poliedros que hemos estudiado.



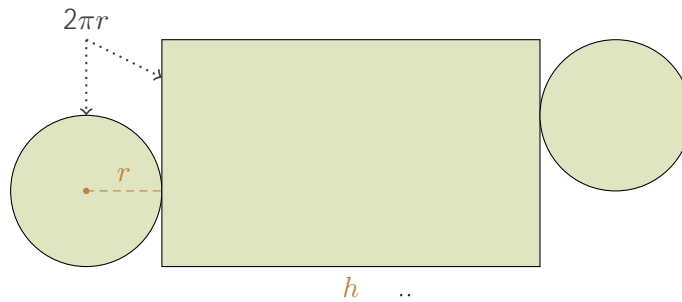


# CILINDROS

Un **cilindro** es una figura formada por dos bases circulares unidas entre sí por una superficie curva.

Dado que las bases son círculos, el área de la base se calcula simplemente con la fórmula del área de un círculo.

En el desarrollo plano del cilindro vemos que la superficie que une ambas bases equivale a un rectángulo cuya longitud es la misma que la circunferencia ( $2\pi r$ ) y cuya altura es la altura del cilindro ( $h$ ).

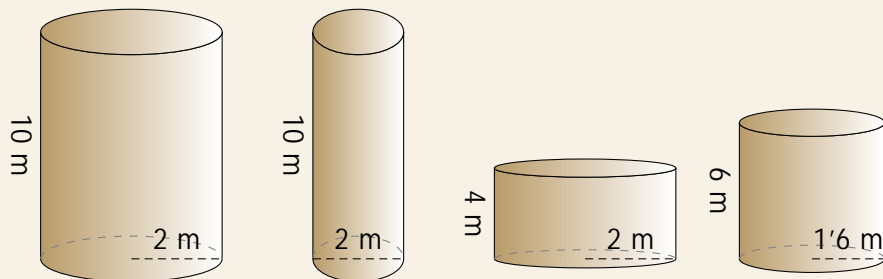


$$A = 2 A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \quad ! \quad \begin{aligned} A_{\text{base}} &= \pi r^2 \\ A_{\text{lateral}} &= 2\pi r h \end{aligned}$$

El volumen de un cilindro se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

$$V = A_{\text{base}} \text{ altura}$$

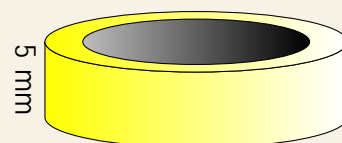
23. Calcula el área y el volumen de los siguientes cilindros:



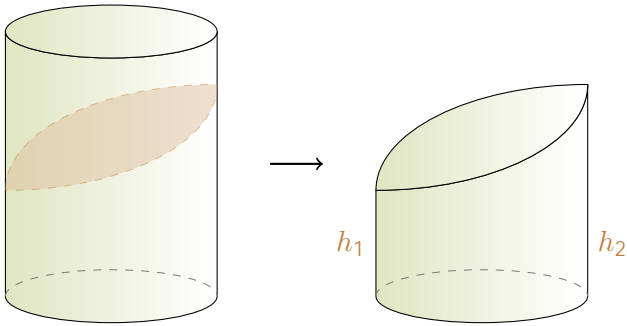
24. Una lata de refresco mide 10 centímetros de altura, y tiene una base circular de diámetro 6'5 centímetros.

- a) ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  de aluminio son necesarios para su fabricación?
- b) Calcula el volumen de refresco que puede albergar y exprésalo en mililitros.

25. Un anillo de 5 mm tiene un diámetro interior de 16'6 mm y un diámetro exterior de 17 mm. ¿Qué cantidad de oro fundido es necesario para fabricarlo?



## CILINDRO TRUNCADO



Si cortamos un cilindro con un plano no paralelo a las bases, obtenemos dos **cilindros truncados** o **troncos de cilindro**.

El volumen de un tronco de cilindro es el producto del área de la base por la media aritmética de la mayor y la menor altura a la que el cilindro ha sido cortado.

$$V = A_{\text{base}} \frac{h_1 + h_2}{2}$$

26. Calcula el volumen de los siguientes troncos de cilindro:

- El radio de su base es 3 m, su altura mínima es 1 m y su altura máxima es 2 m.
- El radio de su base es 2 m, su altura mínima es 1 m y su altura máxima es 3 m.
- El radio de su base es 15 cm, su altura mínima es 8 cm y su altura máxima es 10 cm.

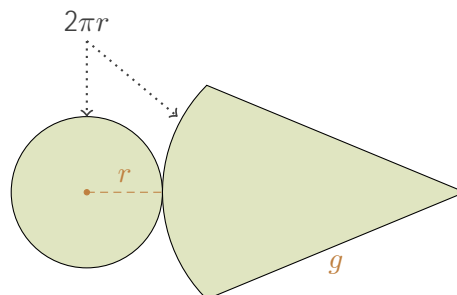
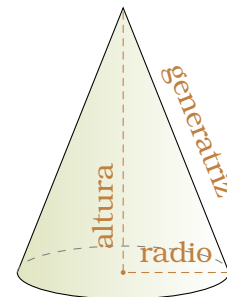
## CONOS

Un **cono** es una figura formada por una base circular y una superficie curva que la une con su vértice.

Dado que la base es una figura conocida, el cálculo del área de la base no entraña ninguna dificultad.

En el desarrollo plano del cono vemos que el lateral es un sector circular de radio la generatriz  $g$ , cuyo arco coincide con la longitud de la circunferencia de la base.

Es decir, la circunferencia completa hubiese medido  $2\pi g$  pero tenemos un trozo de solo  $2\pi r$ , así que trata de una proporción  $\frac{2\pi r}{2\pi g}$  de un círculo de radio  $g$ .



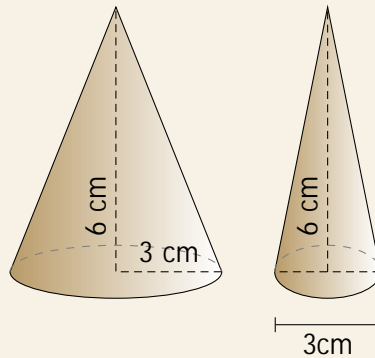
$$A = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \quad ! \quad \begin{cases} A_{\text{base}} = \pi r^2 \\ A_{\text{lateral}} = \frac{2\pi r}{2\pi g} \pi g^2 = \pi r g \end{cases}$$

El volumen de un cono es la tercera parte del producto del área de la base y la altura.

$$V = \frac{A_{\text{base}} \cdot \text{altura}}{3}$$

Al igual que ocurría en la pirámide, la altura del cono y su generatriz se pueden relacionar mediante el teorema de Pitágoras, por lo que es habitual que los problemas nos faciliten solo uno de los dos datos.

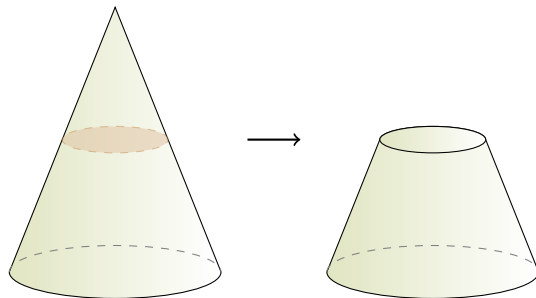
27. Calcula el área y el volumen de los siguientes conos:



28. Calcula el área y el volumen de un cono de altura 5 metros y cuya base tiene radio 2 metros.

29. Calcula el área y el volumen de un cono de altura 5 metros y cuya base tiene diámetro 2 metros.

## CONO TRUNCADO



Para obtener un **cono truncado** o **tronco de cono** también lo cortaremos con un plano paralelo a la base para que la figura resultante sea más sencilla, de modo que obtendremos un tronco con dos bases paralelas.

En este caso, el fragmento eliminado es también un cono y además es **semejante** al original.

30. Hemos partido un cono de 10 metros de altura y 3 metros de radio, justo a la mitad de su altura, obteniendo un tronco de cono de 5 metros de altura.

- Calcula el área de ambas bases.
- Calcula el volumen del tronco de pirámide.

31. Tenemos un tronco de cono cuya base mayor tiene un área de  $144 \text{ cm}^2$ , cuya base menor tiene un área de  $16 \text{ cm}^2$  y cuya altura es de 12 cm.

- ¿Qué altura tendría el cono completo?
- Calcula el volumen del tronco de pirámide.

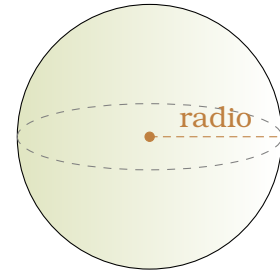
## ESFERAS

Una **esfera** es una superficie curva cuyos puntos equidistan de otro llamado centro. El área de la esfera se calcula mediante la fórmula:

$$A = 4\pi r^2$$

El volumen de la esfera se calcula mediante la fórmula:

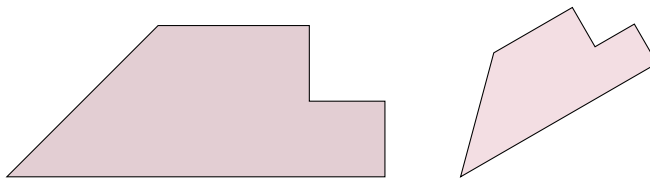
$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$



32. Calcula el área y el volumen de una esfera de radio 2 metros.
33. Calcula el área y el volumen de una esfera de diámetro 2 metros.
34. Calcula el área y el volumen de una esfera de radio 6 metros.
35. Calcula el área y el volumen de una esfera de radio 12 metros.
36. En una heladería me han ofrecido un helado en cucurucho. He medido el cono desde la punta hasta el borde de la circunferencia, y son 10 cm. También he medido el diámetro de la circunferencia, y son 4 cm.
  - a) ¿Qué volumen de helado cabe en el cono?
  - b) Además de llenar todo el cucurucho con helado, asoma sobre el borde media esfera adicional. ¿Qué volumen de helado hay en esa semiesfera?
  - c) Entonces, ¿cuántos mililitros de helado me han ofrecido en total?

# SEMEJANZA

Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma, aunque tengan distinto tamaño o estén colocadas en otra posición.



## RAZÓN ENTRE LONGITUDES

Las figuras poligonales con el mismo número de lados son semejantes si:

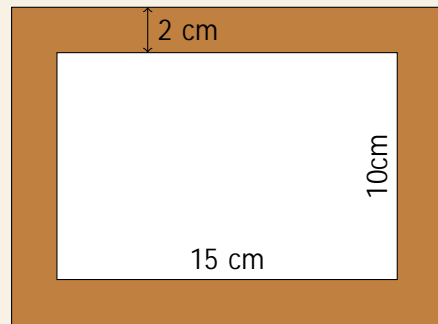
- Sus ángulos son iguales.
- Sus lados son proporcionales.

1. Un cuadrado cuyo lado mide 2 metros y otro cuyo lado mide 3 centímetros, ¿son semejantes?
2. Un triángulo equilátero cuyo lado mide 3 centímetros y otro cuyo lado mide 2 kilómetros, ¿son semejantes?
3. Un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5 cm, y un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 5 cm y 6 cm, ¿son semejantes?
4. Un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5 cm, y otro triángulo rectángulo cuyos lados miden 1'5 cm, 2 cm y 2'5 cm, ¿son semejantes?
5. Un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5 cm, y otro triángulo rectángulo cuyos lados miden 5 cm, 12 cm y 13 cm, ¿son semejantes?
6. ¿Es posible que al reducir con una fotocopiadora un triángulo cuyos lados miden 9, 18 y 12 cm resulte un triángulo de lados 4, 8 y 6 cm?

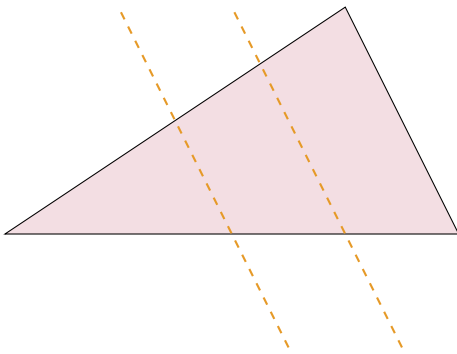
La **razón de semejanza** es la constante de proporcionalidad entre dos figuras semejantes, es decir, el número por el que hemos de multiplicar todas las longitudes de los segmentos de una de las figuras para obtener las longitudes de los segmentos de la otra.

7. Dibuja un rectángulo cuya base mida 5 unidades y cuya altura mida 2 unidades. Dibuja también otro rectángulo semejante con razón de semejanza 2, es decir, que mida el doble.
8. Dibuja un rectángulo cuya base mida 2 unidades y cuya altura mida 1 unidad, y otro cuya base mida 6 unidades y cuya altura mida 3 unidades. ¿Cuál es la razón de semejanza entre ellos?
9. Dibuja un triángulo isósceles cuya base mida 3 cuadrículas y cuya altura mida 2 cuadrículas. Dibuja también otro triángulo semejante con razón de semejanza 2'5.

10. ¿Cuál es la razón de semejanza entre un hexágono regular cuyo lado mide 2 cm y otro de lado 1'5 cm?
11. Dibuja un cuadrado de lado 2 unidades y otro cuadrado de lado 3 unidades. ¿Cuál es la razón de semejanza entre ellos?
12. Una fotografía con una anchura de 15 cm y una altura de 10 cm se coloca en un marco de 2 cm de ancho. ¿Son la fotografía y el rectángulo exterior del marco semejantes?



## TEOREMA DE TALES

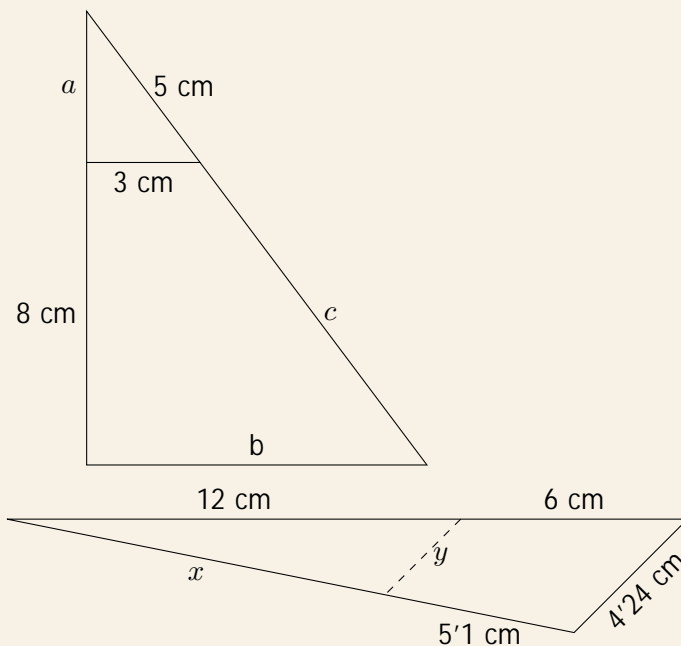


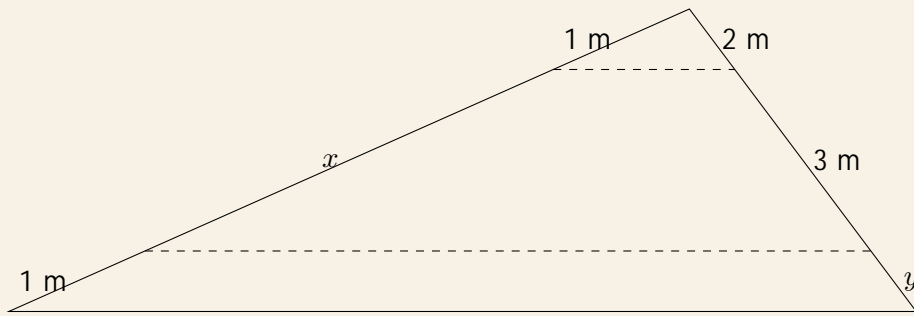
### Teorema primero

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

— Tales de Mileto

13. Halla los valores desconocidos de las siguientes figuras:

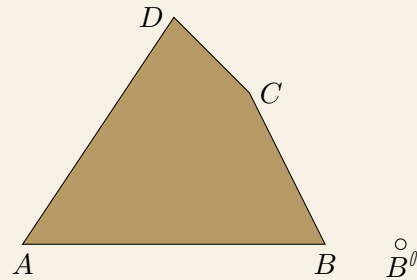




14. Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 cm y 6 cm. Une los puntos medios de los catetos. a) El triángulo que obtienes, ¿es semejante a él? b) El trozo restante, ¿qué figura es?

15. Observa el polígono irregular que une los puntos  $A = (0,0)$ ,  $B = (4,0)$ ,  $C = (3,2)$  y  $D = (2,3)$  y dibújalo en tu cuaderno tomando la cuadrícula como referencia.

Dibuja una figura semejante que pase por el punto  $B' = (5,0)$ .



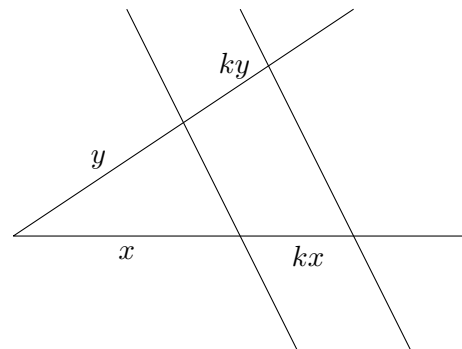
Una consecuencia directa de este teorema es que dos rectas paralelas que corten a rectas secantes dan lugar a segmentos proporcionales.

En la práctica, eso quiere decir que hay una razón de proporcionalidad para dividir los segmentos de un mismo lado entre sí:

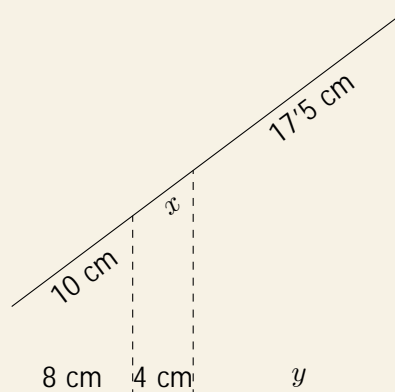
$$\frac{kx}{x} = k = \frac{ky}{y}$$

Y además también hay una razón de proporcionalidad para dividir los segmentos de un lado entre los del otro:

$$\frac{ky}{kx} = \frac{y}{x}$$



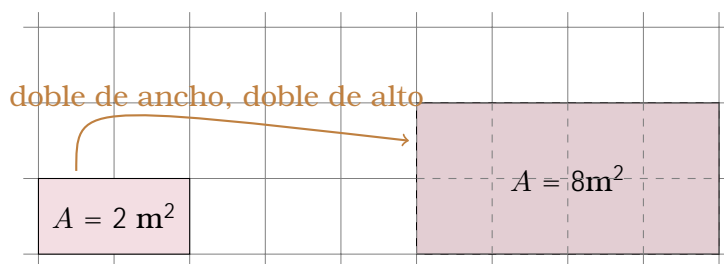
16. Halla la longitud de los segmentos indicados:



17. Dibuja un triángulo rectángulo de catetos 15 y 8 unidades de longitud.  
Si se unen los puntos medios de dichos catetos, ¿resulta un triángulo semejante a él?
18. Dibuja un segmento de 5 cm de longitud iguales y divídelo en 3 partes iguales.  
Para ello dibuja otro segmento que mida tres unidades (puedes ayudarte con un compás) y divide en triángulos semejantes aplicando el teorema de Tales.
19. Divide un segmento de 7 cm de longitud en 4 partes iguales.
20. Divide un segmento de 4 cm de modo que una de ellas sea el doble de la otra.
21. Divide un segmento de 10 cm de longitud en tres partes proporcionales a 1, 2 y 3.

## RAZÓN ENTRE ÁREAS

La **razón entre las áreas** de dos figuras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza.



Por ejemplo, si tenemos una figura cuya altura y se multiplica por 2 entonces el área se multiplica por  $2^2 = 4$ .

22. a) Halla el área de un cuadrado cuyo lado mide 1 cm.  
b) Utiliza semejanza para hallar el área de cuadrados cuyo lado mida:
  - 3 cm
  - 6 cm
  - 0'5 cm
  - 0'25 m
23. a) Halla el área de un rectángulo cuya base mide 3 cm y cuya altura mide 2 cm.  
b) Halla el área de un rectángulo cuyos lados miden el triple que el anterior.
24. a) Halla el área de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm y cuya altura mide 4 cm, aplicando el teorema de Pitágoras.  
b) Halla el área de un triángulo rectángulo cuyos lados miden la tercera parte que el anterior.
25. Tenemos un rectángulo cuya área es  $50 \text{ m}^2$ .  
¿Cuál será el área de un rectángulo semejante cuyos lados midan la quinta parte?
26. Partimos de un círculo cuya área es  $20 \text{ m}^2$  y construimos otro con un radio un 50 % mayor. ¿Cuál es su área?

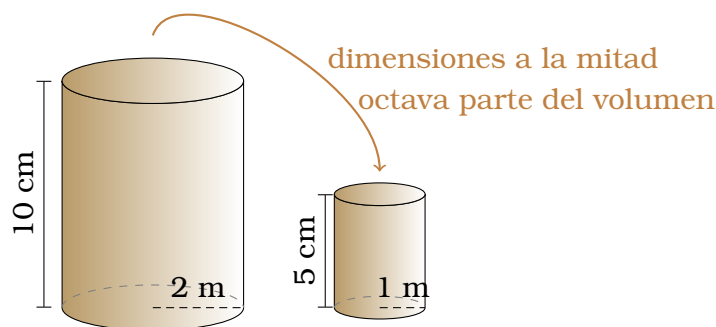


27. Tenemos dos polígonos irregulares semejantes. Uno de ellos tiene un área de  $100 \text{ cm}^2$  y el otro de  $200 \text{ cm}^2$ . ¿Cuál es su razón de semejanza?
28. Dibuja un cuadrado cuyo lado mide  $1 \text{ mm}$ , otro cuyo lado mide  $1 \text{ cm}$  y otro cuyo lado mide  $1 \text{ dm}$ . ¿Cuál es la relación entre sus áreas?
29. Halla la relación entre:
- |                                 |                                  |                                  |                                  |
|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $\text{km}^2$ y $\text{m}^2$ | c) $\text{cm}^2$ y $\text{mm}^2$ | e) $\text{km}^2$ y $\text{hm}^2$ | g) $\text{km}^2$ y $\text{cm}^2$ |
| b) $\text{m}^2$ y $\text{cm}^2$ | d) $\text{m}^2$ y $\text{mm}^2$  | f) $\text{km}^2$ y $\text{dm}^2$ | h) $\text{km}^2$ y $\text{mm}^2$ |
30. Teniendo en cuenta que una hectárea (ha) es equivalente a un hectómetro cuadrado ( $\text{hm}^2$ ), ¿a cuántos metros cuadrados equivale un área?

## RAZÓN ENTRE VOLÚMENES

El **volumen** de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

La **razón entre los volúmenes** de dos poliedros semejantes es el cubo de la razón de semejanza.



31. a) Halla el volumen de un cubo cuya arista mide  $1 \text{ cm}$ .  
 b) Utiliza semejanza para hallar el volumen de cubos arista mida:
- |                  |                  |                    |                    |
|------------------|------------------|--------------------|--------------------|
| ■ $3 \text{ cm}$ | ■ $6 \text{ cm}$ | ■ $0,5 \text{ cm}$ | ■ $0,25 \text{ m}$ |
|------------------|------------------|--------------------|--------------------|
32. Tenemos una esfera cuyo volumen es  $2000 \text{ mm}^3$ .  
 ¿Cuál será el volumen de otra esfera cuyo radio mida la cuarta parte?
33. Halla la relación entre:
- |                                 |                                 |                                  |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| a) $\text{km}^3$ y $\text{m}^3$ | b) $\text{m}^3$ y $\text{cm}^3$ | c) $\text{cm}^3$ y $\text{mm}^3$ | d) $\text{m}^3$ y $\text{mm}^3$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
34. Teniendo en cuenta que un litro equivale a un decímetro cúbico, halla la relación entre:
- |                              |                               |                               |                                |
|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $\text{m}^3$ y $\text{l}$ | b) $\text{km}^3$ y $\text{l}$ | c) $\text{l}$ y $\text{cm}^3$ | d) $\text{cl}$ y $\text{mm}^3$ |
|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|

## Problemas

35. La ampliación de una fotografía al 150 % mide 195 milímetros de alto y 255 de ancho. ¿Cuánto medía la fotografía original?
36. En el jardín tenemos una manguera con un diámetro de 3 cm, pero queremos comprar otra que eche el doble de agua. ¿Qué radio debe tener?
37. Una escultura de 1 metro de altura pesa 27 kg. ¿Cuánto pesará una copia, elaborada con el mismo material, cuya altura sea 25 cm?

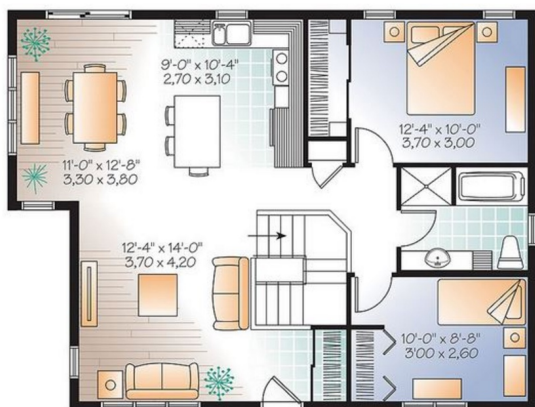
## ESCALAS

Un **mapa** es una representación gráfica de una zona geográfica.



Mapa de Galicia en Google Maps

Un **plano** es una representación gráfica de otro tipo de elementos, como pueden ser una vivienda o las calles de una ciudad.



Plano extraído de arqhys.com

Una **maqueta** es la representación en tres dimensiones de cualquier objeto, típicamente reducida con respecto al original.



Maqueta de Aedes Ars

La **escala** de un mapa, plano o maqueta es la razón de semejanza entre la representación y la realidad.

La escala numérica tiene un formato específico, en el que se indica que por cada unidad en la representación la medida real tiene un cierto número de unidades.

1 : 10

Escala 1 : 250 000

1 mm	!	250 000 mm = 250 m
4 mm	!	1 000 000 mm = 1 km
1 cm	!	250 000 cm = 2'5 km
0'1 m	!	25 000 m = 25 km

La escala es una razón, por lo tanto no se refiere a ninguna unidad.  
Las medidas son las que sí deben indicar unidad.

Los problemas de escalas pueden resolverse de un modo sencillo utilizando una regla de tres, relacionando la representación con la realidad.

Conocida la escala y la medida en el mapa:

Mapa	Realidad
1	160 000
$2\frac{2}{3}$ cm	$x$ cm

Conocida la escala y la medida en la realidad:

Mapa	Realidad
1	160 000
$x$ km	20 km

Para averiguar la escala, conociendo ambas medidas:

Mapa	Realidad
1	$x$
2 cm	250 cm

38. Tenemos un mapa a escala 1:50 000.

- a) La distancia entre dos pueblos en el mapa es de 11 cm. ¿Cuál es la distancia real?
- b) La distancia real entre otros dos pueblos es de 3'75 km. ¿A qué distancia estarán en el mapa?

39. La distancia entre Madrid y Burgos es 243 km.

Si en el mapa la distancia entre ambas ciudades es 8'1 cm, ¿a qué escala está dibujado?

40. Se ha construido el plano de una habitación cuyas dimensiones son 9 m de largo y 6 m de ancho. En el plano, el largo de la habitación es 12 cm.

- a) ¿A qué escala está dibujado el plano?
- b) ¿Cuál es el ancho de la habitación en el plano?

41. Si un barco mide 21 metros y su maqueta mide 70 centímetros, ¿a qué escala se realizó la maqueta?

42. La torre de Hércules en A Coruña, tiene una altura total de 55 metros.

Si queremos realizar una maqueta de la misma a escala 1:110, ¿qué altura tendrá dicha maqueta?

43. Si una mosca tiene una longitud de 9 mm y su maqueta mide 18 cm, ¿a qué escala se realizó la maqueta?

44. Un mapa de España está construido a escala 1:2500000.

¿A cuántos kilómetros se encuentran dos ciudades que en el mapa están separadas 10 cm?

45. En un mapa de América del Sur construido a escala 1:84 000 000 la mayor distancia Este-Oeste corresponde a dos puntos situados a 60 mm, y la mayor distancia Norte-Sur corresponde a 100 mm aproximadamente. ¿Cuántos kilómetros representan estas distancias?

46. Ordena las siguientes escalas de mayor a menor:

1:45   1:20   1:65   3:1   1:30   1:1   1:18   5:1

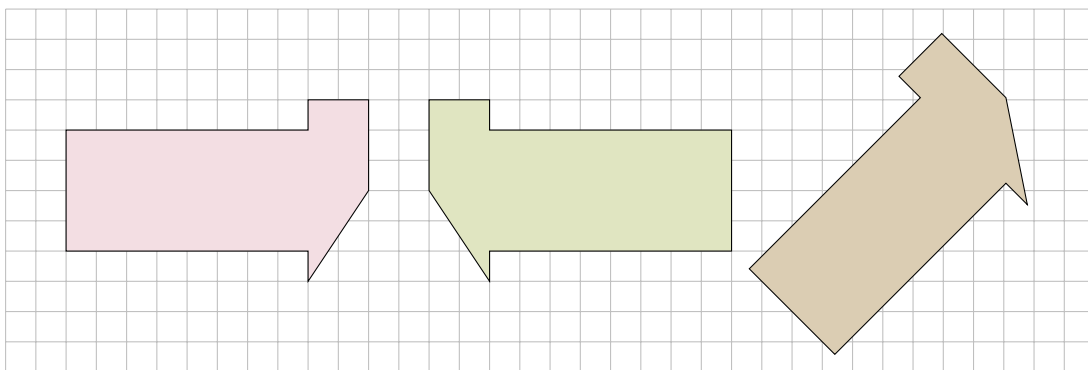
47. Dibuja un plano a escala 1:100 de tu dormitorio.

Indica dónde están puertas, ventanas y mobiliario con símbolos adecuados.

## MOVIMIENTOS EN EL PLANO

Vamos a estudiar un tipo concreto de figuras semejantes: aquellas que además de tener sus ángulos iguales tienen también sus lados iguales.

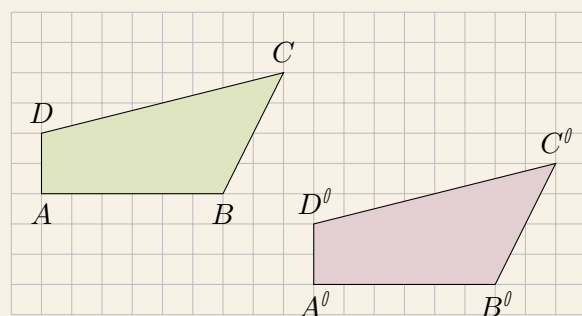
Estas figuras se obtienen a partir de movimientos, es decir, arrastrando la figura a otro lugar, girándola y/o reflejándola.



## TRASLACIONES

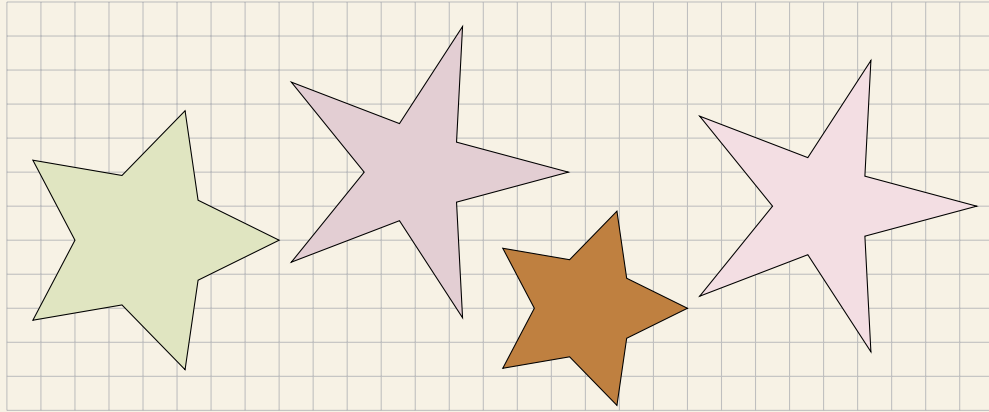
Llamamos **traslación** al movimiento de una figura de un lugar a otro. La nueva figura es exactamente igual, solo que colocada en otro lugar.

48. a) ¿Cuánto tenemos que mover el punto  $A$  para llevarlo al punto  $A'$ ?  
b) ¿Y el punto  $B$  para moverlo a  $B'$ ?  
c) ¿Tendrá que ser exactamente el mismo movimiento para mover  $C$  a  $C'$  y  $D$  a  $D'$ , o podríamos aplicar un vector diferente?



49. Observa las siguientes estrellas de cinco puntas.

¿Hay alguna traslación que nos permita mover una estrella hasta otra? ¿Cuál?



50. Dibuja un polígono irregular con vértices  $A = (3, 1)$ ,  $B = (2, 1)$ ,  $C = (4, 2)$ ,  $D = (1, 5)$  y  $E = (0, 3)$ . Trasládalo según el vector  $\vec{u} = (1, 4)$ .
51. a) ¿Qué ocurrirá si traslado una figura según una traslación de vector  $(4, 3)$  y luego otra de vector  $(2, 1)$ ?
- b) ¿Y si traslado primero según una traslación de vector  $(4, 3)$  y luego otra de  $(4, 3)$ ?
52. ¿Qué movimiento es el inverso de una traslación de vector  $(a, b)$ ?

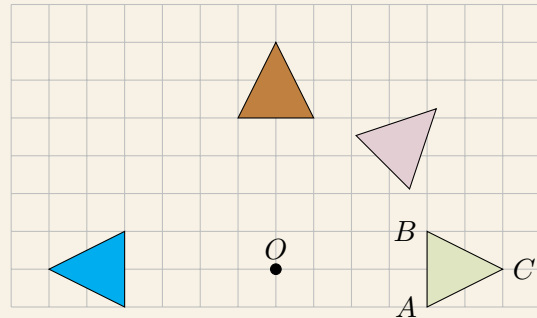
53. Imaginemos que tenemos una colección infinita de puntos  $(n, 0)$ , siendo  $n$  cualquier número entero. ¿Qué ocurrirá si le aplico las siguientes traslaciones?
- a) de vector  $(3, 0)$                       b) de vector  $(-1, 2)$                       c) de vector  $(75, 2)$
54. Considera la recta  $y = 3x + 5$ . ¿Qué recta obtengo si aplico las siguientes traslaciones?
- a) de vector  $(3, 0)$                       b) de vector  $(0, 2)$                       c) de vector  $(1, 3)$
55. ¿Qué traslaciones deja a una recta  $y = ax + b$  invariante?

## GIROS

Llamamos **giro o rotación** al movimiento de una figura alrededor de un punto y con una amplitud determinada por un ángulo.

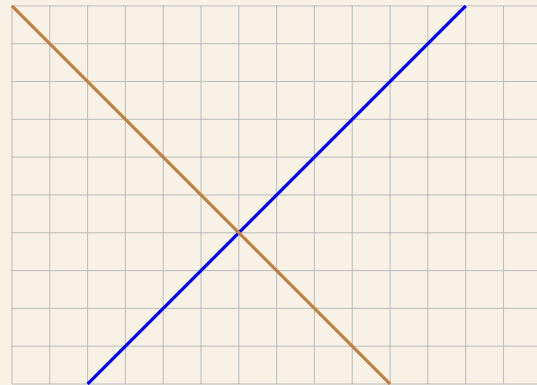
56. El triángulo verde de la imagen ha sido rotado con respecto al punto  $O$ .

- ¿De qué ángulo ha sido el giro para obtener cada uno de los otros triángulos?
- ¿A qué puntos corresponden los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  en cada uno de los triángulos girados?

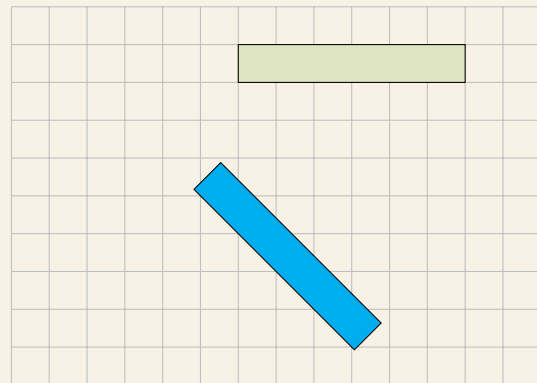


57. a) ¿Qué ocurrirá si giro una figura  $45^\circ$  y luego otros  $30^\circ$ ?  
b) ¿Qué ocurrirá si giro una figura  $220^\circ$  y luego  $140^\circ$ ?

58. a) ¿Qué punto permanece invariante en este giro de una recta para obtener la otra?  
b) ¿Con respecto a que punto hemos girado?  
c) ¿Cuál es el ángulo de giro?



59. a) ¿Con respecto a que punto hemos girado una figura para obtener la otra?  
b) ¿Cuál es el ángulo de giro?

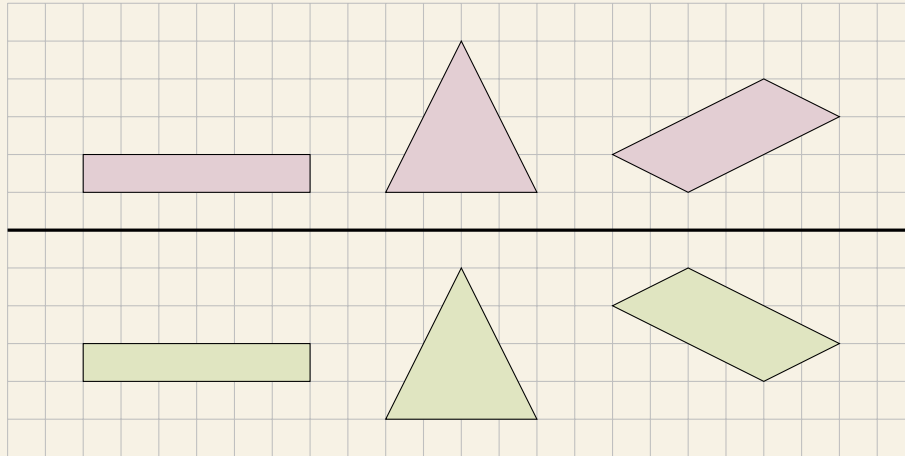


60. a) ¿Qué movimiento es el inverso de un giro de centro  $O$  y ángulo  $\alpha$ ?  
b) ¿Qué punto permanece invariante en ese giro?

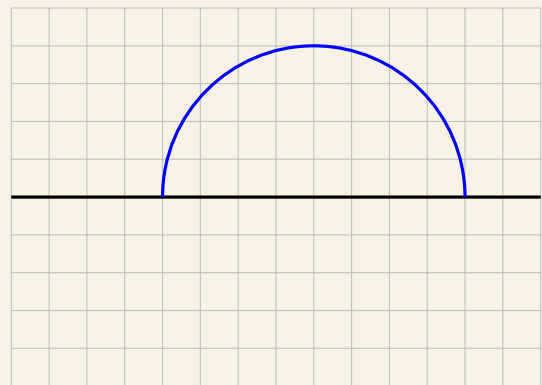
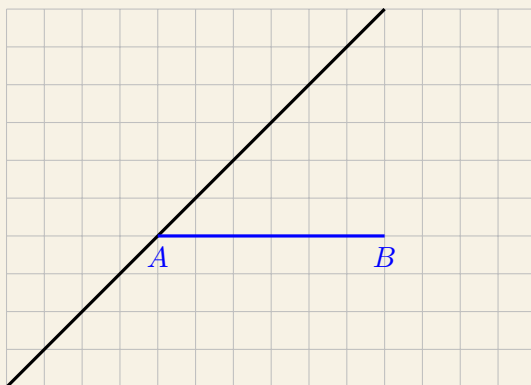
## SIMETRÍAS

Llamamos **simetría axial o reflexión** al movimiento de una figura que produce un reflejo de la misma con respecto al eje de simetría dado.

61. ¿Cuáles de las siguientes figuras están reflejadas con respecto al eje horizontal dibujado?

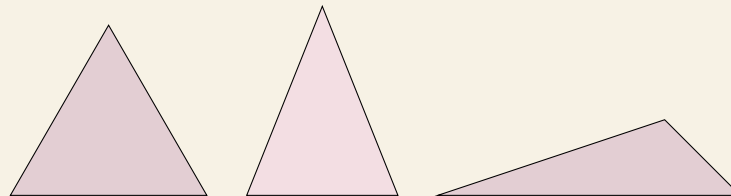


62. Dibuja el simétrico de las figuras representadas respecto a los respectivos ejes, y describe la figura resultante.

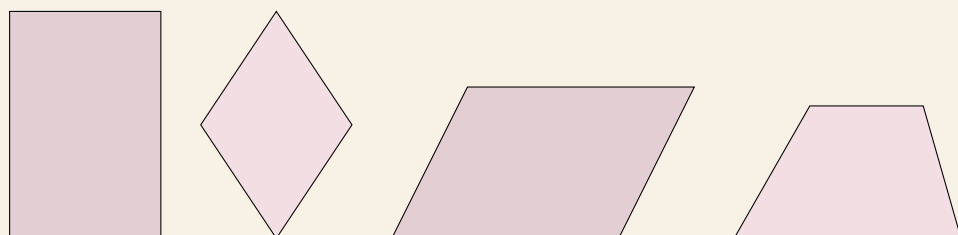


63. Observa las siguientes figuras y halla todos los posibles ejes de simetría que tienen.

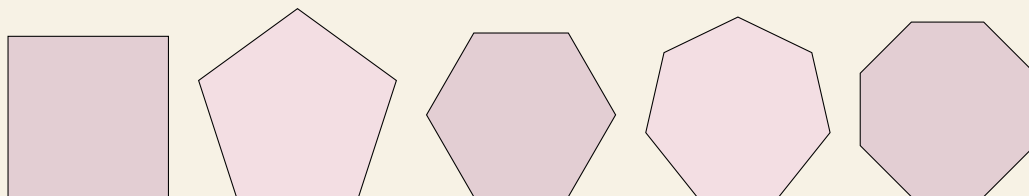
a) Triángulos:



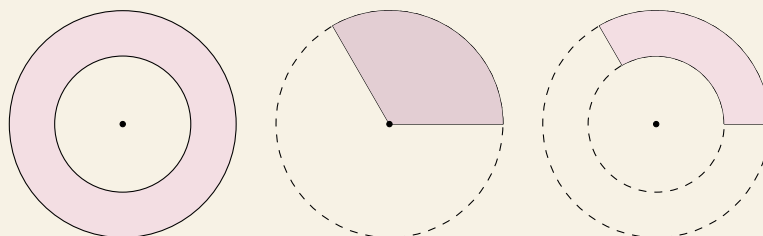
b) Cuadriláteros:



c) Polígonos regulares:



d) Figuras circulares:



## COMBINACIÓN DE MOVIMIENTOS

Las traslaciones, giros y simetrías son movimientos elementales. Si combinamos varios de ellos obtenemos un nuevo movimiento más complejo.

64. Dibuja un polígono irregular cuyos vértices son los puntos  $A = (0, 0)$ ,  $B = (3, 0)$ ,  $C = (2, 1)$  y  $D = (2, 2)$ . Apunta las nuevas coordenadas de los vértices tras cada uno de estos movimientos:
- Trasládalo según el vector  $\vec{u} = (4, 1)$
  - Después gíralo con respecto al origen  $O = (0, 0)$  un ángulo de  $90^\circ$ .
  - Finalmente refléjalo con respecto al eje de coordenadas vertical.
65. ¿Qué movimientos necesitas combinar para obtener una figura a partir de la otra? (La rejilla puede necesitar ser más amplia que la que aparece aquí dibujada.)

