MATEMÁTICAS
orientadas a las enseñanzas
ACADÉMICAS

4

Material elaborado para su uso en el aula.
Se distribuye bajo licencia CreativeCommons Reconocimiento-NoComercial 3.0
Es decir, puedes compartirlo y adaptarlo, a condición de que reconozcas la autoría (p.ej. con un enlace a mi web) y no lo utilices con ninguna finalidad comercial.

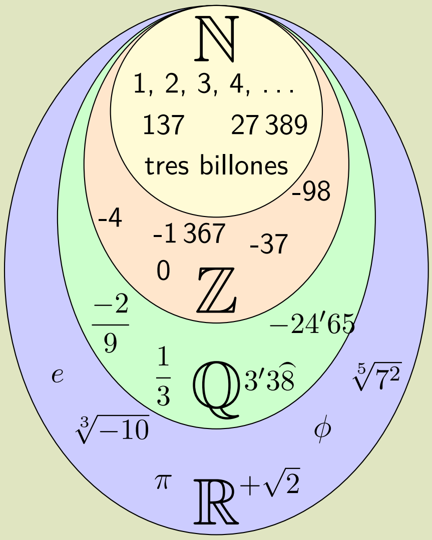
laurafigueiredo.net

Índice

(cc) BY-NC

(cc) BY-NC

Números reales



En cursos anteriores hemos trabajado fundamentalmente con **números naturales** ($\mathbb{N}$) y **números enteros** ($\mathbb{Z}$) y **números racionales** ($\mathbb{Q}$) escritos tanto en forma fraccional como en forma decimal.

En este curso lo iniciaremos con un brevísimo repaso de operaciones con fracciones, pues necesitaremos manejarlas con soltura para poder realizar las operaciones con fracciones algebraicas.

Pero en este tema sobre todo avanzaremos de forma significativa en el manejo de **números reales** ($\mathbb{R}$):

- Ampliaremos los conocimientos de radicales.
- Introduciremos el concepto de logaritmo.

Operaciones con fracciones

Solo es posible **sumar o restar** aquellas fracciones que tienen el mismo denominador.
Si no lo tuviesen, procederíamos hallando fracciones equivalentes a ellas que tengan un denominador común.

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-1=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}-\frac{12}{12}=\frac{7}{12}$$

El **producto** de fracciones se obtiene multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador.
El **cociente** de dos fracciones es igual al producto de la primera por la inversa de la segunda (es decir, multiplicando en zig zag).
En cualquier caso, es recomendable simplificar antes de operar si es posible.

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 3}{7\cdot 4}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6} \qquad \frac{5}{6}:\frac{9}{8}=\frac{5\cdot 8}{6\cdot 9}=\frac{40}{54}=\frac{20}{27}$$

El orden de las operaciones se mantiene en todos los conjuntos numéricos.
Utilizaremos pasos intermedios siempre que sea necesario y procuraremos ser cuidadosos a la hora de operar con signos.

Jerarquía de operaciones

1. Paréntesis y corchetes
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones
4. Sumas y restas

(cc) BY-NC

1. Opera y simplifica:

a) $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}\cdot\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\right)$

b) $\frac{5}{3}-\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{2}-\frac{1}{3}$

c) $\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{2}-\frac{1}{3}\right)$

d) $\frac{5}{36}-\left(\frac{7}{16}+\frac{1}{4}:\frac{3}{5}\right)$

e) $\left(\frac{2}{3}\cdot 5-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{7}{2}$

f) $\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{5}\cdot 2$

g) $\left[\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}-2\right]\cdot\frac{5}{3}$

h) $\frac{8}{3}-\left[2:\left(\frac{1}{3}-1\right)-\frac{5}{2}\right]$

i) $-3\cdot\frac{4}{15}-\left(\frac{7}{8}\cdot 5-9\right)$

j) $1-\frac{3}{2}\cdot 4-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)$

k) $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)\cdot 5-\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}$

l) $1-\left[\frac{3}{2}\cdot 5-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)\right]$

Fracción generatriz

La **fracción generatriz** de un número decimal es aquella fracción irreducible equivalente al número.

Recordemos que en el caso de un decimal exacto basta con escribir el número sin coma decimal y dividirlo por el múltiplo de 10 adecuado.

$$4'25=\frac{425}{100}=\frac{17}{4}$$

De un decimal periódico

Debemos multiplicar nuestro número por dos múltiplos de 10 que nos permitan obtener sendos resultados con idénticos decimales y proceder a restarlos entre si.
De este modo se simplifica la parte periódica y se puede despejar de forma sencilla.

Veámoslo con un decimal periódico puro como $x=2'\widehat{35}$:

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 235'353535\ldots \\ x & = & 2'353535\ldots \\ \hline 99x & = & 233 \end{array}$$

Por lo tanto $x=2'\widehat{35}=\frac{233}{99}$.

Veámoslo también con un decimal periódico mixto como $x=2'3\widehat{5}$:

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 235'555555\ldots \\ 10x & = & 23'555555\ldots \\ \hline 90x & = & 212 \end{array}$$

Por lo tanto $x=2'3\widehat{5}=\frac{212}{90}=\frac{106}{45}$.

(cc) BY-NC

Fórmula de aplicación directa

La fracción generatriz de un número periódico es equivalente a:

$$\frac{\text{todas las cifras del número - las cifras no periódicas}}{\text{tantos 9 como cifras periódicas, tantos 0 como cifras decimales no periódicas}}$$

$$33'4\widehat{92} = \frac{33492 - 334}{990} = \frac{16579}{495}$$

2. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

   a) $1'6$
   b) $7'67$
   c) $4'25$
   d) $-2'35$
   e) $10'225$
   f) $7'\widehat{6}$
   g) $-10'\widehat{42}$
   h) $4'\widehat{9}$
   i) $15'\widehat{15}$
   j) $24'\widehat{6}$
   k) $2'0\widehat{25}$
   l) $-15'1\widehat{5}$
   m) $3'\widehat{2}$
   n) $3'\widehat{20}$
   ñ) $-12'1\widehat{7}$
   o) $5'3\widehat{5}$
   p) $0'1\widehat{9}$
   q) $3'0\widehat{01}$

3. Realiza las operaciones siguientes expresando los números en forma de fracción:

   a) $7'2\widehat{3} + 0'\widehat{6}$
   b) $4'\widehat{72} : 0'\widehat{22}$
   c) $2'\widehat{15} - 2'\widehat{1}$
   d) $0'75 + 0'\widehat{25} \cdot 1'\widehat{6}$

Potencias

Una **potencia** de exponente natural es una forma abreviada de escribir el producto de factores iguales. Ese factor se llama **base** y el número de veces que la base se multiplica por si misma se llama **exponente** .

$$(-10)^3 = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10)$$

Potencias de base negativa

Cuando la potencia tiene base positiva, el resultado es siempre positivo.
Cuando la potencia tiene base negativa:

- si el exponente es par, el resultado es positivo.
- si el exponente es impar, el resultado es negativo.

Fíjate muy bien siempre en los signos negativos.
No es lo mismo que el signo forme parte de la base de la potencia que que esté fuera de ella.

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$
$$-3^2 = -3 \cdot 3 = 9$$

(cc) BY-NC

1. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) 7^3
b) $(-7)^3$
c) -4^4
d) 10^8
e) $(-11)^2$
f) -6^2
g) 5^4
h) -8^3
i) $(-3)^8$
j) 3^5
k) $(-5)^4$
l) -13^4
m) 2^6
n) $(-2)^6$
ñ) -2^6
o) 16^2
p) $(-1)^{99}$
q) -1^{99}

Operaciones con potencias

Potencias de la misma base

Para **multiplicar** potencias de la misma base basta con sumar sus exponentes.

$$7^2 \cdot 7^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 7^5$$

Para **dividir** potencias de la misma base basta con restar sus exponentes.

$$3^9 : 3^4 = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^5$$

Para calcular la **potencia de una potencia** basta con multiplicar sus exponentes.

$$(10^5)^3 = 10^5 \cdot 10^5 \cdot 10^5 = 10^{15}$$

2. Escribe como una única potencia:

a) $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^4$
b) $7^6 : 7^2 : 7$
c) $12^{15} \cdot 12^3 : 12^9$
d) $(-10)^5 \cdot (-10)^2 : (-10)^4$
e) $(5^2)^3 : 5^5$
f) $9^5 \cdot (9^2 \cdot 9^3)^2$
g) $6^9 \cdot (6^{15} : 6^{12})^2$
h) $(10^8 : 10^5)^3 \cdot 10^7$
i) $(4^5 \cdot 4^6)^2 : (4^2 \cdot 4^4)^3$

Potencias del mismo exponente

La **potencia de un producto** es igual al producto de potencias.

$$(12 \cdot 5)^3 = 12^3 \cdot 5^3$$

La **potencia de un cociente** es igual al cociente de potencias.

$$(15 : 3)^4 = 15^4 : 3^4$$

3. Escribe como una única potencia:

a) $7^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4$
b) $2^2 \cdot 3^2 \cdot (-1)^2$
c) $4^6 \cdot 6^6 : 8^6$
d) $(-15)^3 : 5^3$
e) $9^7 \cdot 8^7 : 6^7$
f) $(-20)^5 : 10^5 \cdot (-1)^5$
g) $8^4 \cdot 3^4 : 6^4$
h) $9^6 : (-15)^6 \cdot 25^6$
i) $36^{-4} \cdot (-2)^{-4} : 24^{-4}$

(cc) BY-NC

4. Factoriza los números compuestos y escribe como una única potencia:

a) $9^8 : 3^9$
b) $8^3 \cdot 2^5$
c) $(8^3)^2 \cdot 16^2$
d) $3^5 \cdot 9^6 : 27^2$
e) $25^4 : 125 \cdot 5^6$
f) $(-4)^7 : (-2)^5$

Potencias de exponente entero

Toda potencia de **exponente 0** procede de una división de potencias iguales, por eso siempre tiene valor 1.

$$12^0 = \frac{12^5}{12^5} = 1$$

Toda potencia de **exponente negativo** es igual a la inversa de la potencia con dicho exponente en valor absoluto.

$$\frac{1}{3^2} = \frac{3^0}{3^2} = 3^{-2}$$

5. Expresa como una única potencia:

a) $7^{-3} \cdot 7^0 \cdot 7^5$
b) $5^{-6} : 5^{-4}$
c) $12^{-7} : 12^5 \cdot 12^{20}$
d) $\frac{1}{7^2} \cdot 7^5 : 7^{-6}$
e) $3^9 \cdot 3^{-7} : (3^2 \cdot 3^{-3})^2$
f) $2^{-6} : 2^{-10} \cdot 2$
g) $(4^3 : 4^{-3})^{-4} \cdot (4^{-3} \cdot 4^{-1})^5$
h) $(6^4 \cdot 6^{-1})^{-2} \cdot (6^2)^3 : 6$
i) $((-3)^4 \cdot (-3)^2)^3 : (3^4 \cdot 3)^3$

Potencias de base racional

La **potencia de una fracción** es la que resulta de elevar el numerador y el denominador al exponente dado.

$$\left(-\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{(-7)^3}{9^3}$$

Recuerda que una potencia de **exponente negativo** es igual a la inversa de la potencia con exponente en valor absoluto.

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{-4} = \left(\frac{10}{3}\right)^4$$

6. Calcula:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$
b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-6} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$
c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-7} : \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{20}$
d) $\left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-5} : \left(\frac{1}{7}\right)^{-6}$
e) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-6} : \left(\frac{4}{3}\right)^{-10} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)$
f) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-3} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\right]^{-4}$

(cc) BY-NC

Notación científica

La **notación científica** es una forma de escribir los números que acomoda valores demasiado grandes ($100\,000\,000\,000$) o pequeños ($0'000\,000\,000\,01$) para ser escritos de manera convencional.
Los números expresados en notación científica constan de dos factores:

- un número con una única cifra entera
- una potencia de base 10

Expresión convencional	Notación científica
$400\,000$	$4 \cdot 10^5$
$32\,000\,000$	$3'2 \cdot 10^7$
$0'000\,5$	$5 \cdot 10^{-4}$
$0'000\,000\,027$	$2'7 \cdot 10^{-8}$

7. Escribe en notación científica:

   a) $12\,000\,000$ *c*) $0'000\,000\,37$ *e*) $15\,320\,000\,000$ *g*) $0'000\,004\,236$

   b) $365\,800\,000\,000$ *d*) $0'004\,075$ *f*) $-1'320\,000\,000$ *h*) $-0'000\,000\,017$

8. Escribe en notación decimal:

   a) $3'24 \cdot 10^6$ *b*) $-4'26 \cdot 10^8$ *c*) $5'78 \cdot 10^{-8}$ *d*) $-2'98 \cdot 10^{-7}$

9. Me han hecho un análisis de sangre, y el resultado dice que tengo 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3.

   a) Expresa en notación científica los glóbulos rojos que hay en cada mm^3.

   b) Expresa en notación científica los glóbulos rojos que tendré en total, teniendo en cuenta que tengo aproximadamente 4'5 litros de sangre.

10. Utiliza la calculadora para operar en notación científica:

    a) $3 \cdot 10^{21} + 1'2 \cdot 10^{20}$ *c*) $(1'435 \cdot 10^{17}) \cdot (7'286 \cdot 10^{-15})$

    b) $2'25 \cdot 10^{-15} - 3'17 \cdot 10^{-13}$ *d*) $(5'25 \cdot 10^{12}) : (2'5 \cdot 10^9)$

11. Se estima que el volumen de agua de los océanos es de $1\,285\,600\,000$ km^3 y el volumen de agua dulce 35 millones de km^3.
    Escribe esas cantidades en notación científica y expresa la proporción de agua dulce.

12. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente $9'109 \cdot 10^{-31}$ kg.
    Teniendo en cuenta que el hidrógeno cuenta con un único electrón, ¿qué masa tiene el núcleo del átomo de hidrógeno?

(cc) BY-NC

Radicales

La raíz cuadrada es la operación inversa a la potencia de exponente 2.
La raíz cúbica es la operación inversa a la potencia de exponente 3.
La raíz cuarta es la operación inversa a la potencia de exponente 4.
Y así sucesivamente.

$$\sqrt[n]{x} = a \Longleftrightarrow a^n = x$$

El número que está dentro del símbolo de raíz (x) se llama **radicando** y el número pequeño que aparece en el exterior (n) se llama **índice**. Cuando el índice es 2 no es necesario indicarlo.

Potencias de exponente racional

Los radicales de índice n se corresponden con potencias de exponente $\frac{1}{n}$.

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Si el radical tiene un exponente basta aplicar las propiedades de las operaciones de potencias para simplificarlo.

$$\sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$$

13. Transforma las siguientes potencias en radicales:

    a) $5^{\frac{1}{6}}$ b) $2^{\frac{1}{5}}$ c) $8^{\frac{3}{4}}$ d) $7^{\frac{2}{3}}$ e) $10^{\frac{-2}{3}}$ f) $3^{\frac{-5}{2}}$

14. Convierte los siguientes radicales en potencias de exponente fraccionario y simplifica la fracción:

    a) $\sqrt[4]{3^{12}}$ b) $\sqrt[16]{9^8}$ c) $\sqrt[10]{7^{15}}$ d) $\sqrt[4]{-3^{12}}$

15. Calcula, transformando en potencia o radical cuando sea preciso:

    a) $\sqrt[3]{11^6}$ b) $16^{0'5}$ c) $\sqrt{81^{0'5}}$ d) $\sqrt{32^{0'6}}$

Simplificación de radicales

Para simplificar un radical, se expresa en forma de potencia de exponente fraccionario y se halla la fracción irreducible del exponente.

$$\sqrt[10]{3^5} = 3^{\frac{5}{10}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

(cc) BY-NC

16. Simplifica los siguientes radicales:

   a) $\sqrt[8]{7^2}$ b) $\sqrt[10]{2^4}$ c) $\sqrt[6]{11^12}$ d) $\sqrt[21]{3^7}$ e) $\sqrt[6]{5^3}$ f) $\sqrt[15]{13^{10}}$

17. Factoriza los radicandos y simplifica:

   a) $\sqrt[4]{64}$ b) $\sqrt[2]{1024}$ c) $\sqrt[5]{1024}$ d) $\sqrt[4]{1024}$ e) $\sqrt[2]{729}$ f) $\sqrt[3]{729}$

Operaciones con radicales como potencias

Teniendo en cuenta que los radicales son potencias de exponente racional, es lógico pensar que podemos emplear todas las reglas de operaciones para potencias.
Pero en este caso debemos tener muy claras las reglas de operaciones con fracciones.

Radicales con el mismo radicando

Para **multiplicar** radicales con el mismo radicando debemos sumar las inversas de sus índices.

$$\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{7^5}$$

Para **dividir** radicales con el mismo radicando debemos restas las inversas sus índices.

$$\sqrt[4]{3} : \sqrt[8]{3} = 3^{\frac{1}{4}} : 3^{\frac{1}{8}} = 3^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{3}$$

18. Multiplica los siguientes radicales y simplifica cuando sea posible:

   a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3^3}$ b) $\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[6]{7^2}$ d) $\sqrt[3]{11} \cdot \sqrt[6]{11^4}$

19. Divide los siguientes radicales y simplifica cuando sea posible:

   a) $\sqrt{3} : \sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt[4]{7} : \sqrt[6]{7}$ d) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[6]{2}$

La **potencia de un radical** es igual al radical de la potencia.

$$\left(\sqrt{10^3}\right)^5 = \left(10^{\frac{3}{2}}\right)^5 = 10^{\frac{15}{2}} = \sqrt{10^{15}}$$

La **raíz de un radical** se calcula multiplicando los índices.

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$$

(cc) BY-NC

20. Simplifica las siguientes potencias de radicales:

a) $\left(\sqrt{10}\right)^4$ *b*) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^2$ *c*) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$ *d*) $\left(\sqrt[6]{7^5}\right)^3$

21. Opera las siguientes raíces de radicales:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}}$ *b*) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{9}}$ *c*) $\sqrt{\sqrt[4]{7}}$ *d*) $\sqrt[3]{\sqrt{15}}$

Radicales con el mismo índice

El **radical de un producto** es igual al producto de radicales.

$$\sqrt[3]{10} = (2 \cdot 5)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}$$

El **radical de un cociente** es igual al cociente de radicales.

$$\sqrt[4]{\frac{20}{3}} = \left(\frac{20}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{20^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{3}}$$

22. Factoriza los radicandos y convierte en producto de radicales:

a) $\sqrt{45}$ *b*) $\sqrt[3]{60}$ *c*) $\sqrt[3]{24}$ *d*) $\sqrt{225}$

23. Realiza las siguientes operaciones, siempre que sea posible:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ *b*) $\sqrt[4]{3} : \sqrt[4]{27}$ *c*) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5}$ *d*) $\sqrt[3]{7} : \sqrt[4]{2}$

Radicales con distinto radicando y distinto índice

Cuando queremos multiplicar o dividir dos radicales cualesquiera, podemos convertirlos en potencias con el mismo exponente utilizando razonamientos de fracciones equivalentes.

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{7^3} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{4}{12}} \cdot 7^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{5^4} \cdot \sqrt[12]{7^9} = \sqrt[12]{5^4 \cdot 7^9}$$

24. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{3}$ *b*) $\sqrt[6]{3} : \sqrt[4]{2}$ *c*) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{5}$ *d*) $\sqrt[3]{7} : \sqrt[4]{2}$

Extracción de factores de un radical

Otra forma de hacer más manejable un radical es extrayendo los factores que sea posible. Cuando el exponente del radicando es mayor que el índice, lo separamos en dos partes: una de ellas ha de ser múltiplo del índice. Esa parte podrá simplificarse a un número entero.

(cc) BY-NC

$$\sqrt[4]{13^{11}} = \sqrt[4]{13^8 \cdot 13^3} = \sqrt[4]{13^8} \cdot \sqrt[4]{13^3} = 13^2 \cdot \sqrt[4]{13^3}$$

25. Extrae los factores del radical que sea posible:

    a) $\sqrt{11^7}$ b) $\sqrt[5]{7^{12}}$ c) $\sqrt[4]{2^9}$ d) $\sqrt[3]{5^9}$ e) $\sqrt{3^9}$ f) $\sqrt[5]{3^{-6}}$

26. Factoriza y extrae factores del radical:

    a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt[3]{32}$ c) $\sqrt[5]{64}$ d) $\sqrt{729}$ e) $\sqrt[4]{729}$ f) $\sqrt[3]{625}$

En un caso general, factorizamos el radicando y aplicamos la propiedad del producto de potencias del mismo exponente.

$$\sqrt[3]{2^5 \cdot 5^3 \cdot 7^8} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^6 \cdot 7^2} = 2 \cdot 7^2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 6 \cdot 7^2}$$

27. Extrae factores del radical:

    a) $\sqrt{2^{17} \cdot 5^{20} \cdot 7^{15}}$ c) $\sqrt[3]{2^{30} \cdot 7^{54} \cdot 11^{14}}$ e) $\sqrt[3]{2^{18} \cdot 13^2 \cdot 7^{20}}$

    b) $\sqrt{2^{25} \cdot 3^8 \cdot 13^{17}}$ d) $\sqrt[3]{2^{24} \cdot 3^{18} \cdot 5^{15}}$ f) $\sqrt[6]{5^{28} \cdot 17^{15} \cdot 29^{12}}$

28. Factoriza y extrae factores del radical:

    a) $\sqrt{75}$ c) $\sqrt[3]{48}$ e) $\sqrt{1375}$ g) $\sqrt{24}$ i) $\sqrt{1620}$ k) $\sqrt[3]{3240}$

    b) $\sqrt{162}$ d) $\sqrt[4]{80}$ f) $\sqrt[3]{432}$ h) $\sqrt{87}$ j) $\sqrt[4]{104}$ l) $\sqrt[4]{405}$

Suma y resta de radicales

Las reglas de las operaciones con potencias no facilitan ningún método para sumar o restar radicales.
Pero en aquellos casos en los que los radicales sean **semejantes** (es decir, mismo radicando y mismo índice) podemos aplicar un razonamiento algebraico para extraer factor común y realizar la operación.

$$5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (5+7)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

Si no son semejantes no podremos operar, y debemos dejar la operación indicada.

29. Realiza las siguientes operaciones:

    a) $3\sqrt{6} + 2\sqrt{6}$ b) $5\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$ c) $-3\sqrt[3]{25} - 7\sqrt[3]{25}$ d) $\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} + 5\sqrt[3]{5}$

30. Plantea cuidadosamente y opera:

    a) $\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\sqrt[3]{7} + \dfrac{\sqrt[3]{7}}{4}$ c) $\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{5} - \dfrac{\sqrt[4]{5}}{2}$ d) $\dfrac{-\sqrt{15}}{3} + 3\sqrt{15}$

(cc) BY-NC

31. Extrae factores de los radicales y opera cuando sea posible:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}$ *b*) $\sqrt[3]{88}-\sqrt[3]{297}$ *c*) $\sqrt{45}-\sqrt[3]{40}$ *d*) $\sqrt{12}+\sqrt{18}$

Racionalización

Cuando trabajamos con fracciones siempre procuramos simplificar el denominador lo máximo posible, por lo que es usual evitar tener radicales en los denominadores.
El procedimiento por el que el radical del denominador se elimina se llama **racionalización**.

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

El procedimiento general consiste en utilizar un radical adecuado con el mismo índice que el del denominador.

$$\frac{5}{\sqrt[7]{5^2}}=\frac{5}{\sqrt[7]{5^2}}\cdot\frac{\sqrt[7]{5^5}}{\sqrt[7]{5^5}}=\frac{5\sqrt[7]{5^5}}{5}=\sqrt[7]{5^5}$$

porque

$$\sqrt[7]{5^2}\cdot\sqrt[7]{5^5}=\sqrt[7]{5^7}=5$$

32. Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$ *b*) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ *c*) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ *d*) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ *e*) $\frac{7}{\sqrt[2]{27}}$ *f*) $\frac{16}{\sqrt[4]{8}}$

33. Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}$ *b*) $\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{7}}$ *c*) $\frac{4\sqrt[3]{9}}{3\sqrt[4]{8}}$ *d*) $\frac{7\sqrt[3]{49}}{\sqrt[4]{7}}$ *e*) $\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ *f*) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{12}}$

Logaritmos

Cuando planteamos un radical, estamos buscando la base de una potencia que para un exponente dado tiene cierto valor.
En cambio, cuando planteamos un **logaritmo** estamos buscando el exponente de una potencia que para una base dada tiene cierto valor.

$$a^n=x\Longrightarrow\begin{cases}\sqrt[n]{x}=a\\ \log_a x=n\end{cases}$$

(cc) BY-NC

- $\log_2 16 = 4$ porque $16 = 2^4$
- $\log_3 \dfrac{1}{9} = -2$ porque $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$
- $\log_2 0'5 = -1$ porque $2^{-1} = \dfrac{1}{2} = 0'5$

No existe $\log_a 0$ para ningún valor $a \neq 0$, puesto que no hay ningún exponente que pueda cumplir que $a^n = 0$.

El procedimiento general para calcular un logaritmo consiste en factorizar el número expresándolo como potencia de la base del logaritmo.

- $\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7$
- $\log 0'01 = \log 10^{-2} = -2$

34. Calcula:

a) $\log_7 49$
b) $\log_5 125$
c) $\log_3 243$
d) $\log_2 32$
e) $\log_5 512$
f) $\log_{15} 3375$
g) $\log_4 64$
h) $\log_3 81$

En general, se indica siempre la base del logaritmo como un subíndice ($\log_a x$) salvo en los siguientes casos:

- Si no se indica nada (simplemente $\log x$) se trata de un **logaritmo decimal**, es decir, de base 10.
- Si se escribe $\ln x$ se trata de un **logaritmo neperiano**, es decir, cuya base es el número irracional e.

35. Calcula:

a) $\log 10\,000$
b) $\log 0'000\,001$
c) $\ln e^3$
d) $\ln \frac{1}{e^5}$

36. Utiliza fracciones generatrices para calcular:

a) $\log_5 0'04$
b) $\log_3 0'\widehat{037}$
c) $\log_6 0'02\widehat{7}$

(cc) BY-NC

Propiedades

Estudiaremos una serie de propiedades de los logaritmos.
Algunas son triviales:

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$

Pero sobre todo debemos destacar las más instrumentales, pues les daremos mucho uso a lo largo de este tema.

$$\log_a(x \cdot y) = log_a x + \log_a y$$

Demostración

Identificamos cada uno de los elementos:

$r = \log_a(x \cdot y) \quad m = \log_a x \quad n = \log_a y$

entonces

$$\left.\begin{array}{l} a^r = xy \\ a^m = x \\ a^n = y \end{array}\right\} \Longrightarrow a^r = a^m \cdot a^n \Longrightarrow r = m + n$$

$$\log_a \frac{x}{y} = log_a x - \log_a y$$

Demostración

Identificamos cada uno de los elementos:

$r = \log_a \frac{x}{y} \quad m = \log_a x \quad n = \log_a y$

entonces

$$\left.\begin{array}{l} a^r = \frac{x}{y} \\ a^m = x \\ a^n = y \end{array}\right\} \Longrightarrow a^r = \frac{a^m}{a^n} \Longrightarrow r = m - n$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

Demostración

Sea $r = \log_a x$, entonces $a^r = x$

$x^n = (a^r)^n = a^{nr} \Longrightarrow \log_a x^n = n \cdot r$

Para realizar cálculos como los siguientes podemos utilizar las propiedades anteriores:

- $\log 25 + \log 4 = \log 100 = 2$
- $\log_2 24 - \log_2 6 = \log_2 4 = 2$
- $\log_4 32 = \log_4 4^2 \cdot 2 = \log_4 4^2 + \log_4 2 = 2 + \log_4 \sqrt{4} = 2 + \log_4 4^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{2} = 2'5$

37. Expresa como un único logaritmo:

a) $3\log_2 5 + \log_2 7$ *b*) $\log_4 9 - 2\log_4 5$ *c*) $2\log_5 3 + \log_5 10$ *d*) $3\log_7 1 + \log_7 6$

(cc) BY-NC

38. Calcula, aplicando las propiedades de los logaritmos cuando sea preciso:

a) $\log 10 + \ln e$

b) $\log_5 1 + \log_5 25$

c) $\log_3 1 + \log_2 2 - \log 10$

d) $\log_{12} 18 + \log_{12} 4 + \log_{12} 2$

e) $\log 2 + \log 25 - log5$

f) $\ln \sqrt{e} + 3 \ln \sqrt{e} - \ln \sqrt[3]{e^2}$

39. Aplica las propiedades de los logaritmos para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\log x + \log 2 = \log 20$

b) $\log x + \log(2x) = \log 50$

c) $\log(2x) - 2\log 3 = \log 2$

d) $\log_2 x^2 - \log_2 x = 3$

40. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $x \log 2 + 3 = x \log 10$

b) $\log_2 5x - 1 = 4$

c) $\log_x 2 + \log_x 5 = 2$

d) $\log 2 + \log(x+3) = \log(x+5)$

e) $\log(15 - 2x) = 2 \log x$

f) $\log(x^2 + 3x + 2) - \log(x+1) = \log 1 - x$

Aunque comienza a estar obsoleta debido a los avances tecnológicos, mencionar que se puede realizar un cambio de base de logaritmos aplicando esta última propiedad:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Demostración

Sea $r = log_a x$, entonces $a^r = x$

$\log_b a^r = \log_b x \Longrightarrow r \log_b a = \log_b x \Longrightarrow$

$r = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

41. Calcula el valor de $\log_5 20$ sabiendo que:

$\log 20 = 1'301$ $\qquad$ $\log 5 = 0'699$

42. Resuelve la ecuación $\log_{x+3} 9 = \log_5 3.$

Aproximación y errores

Las **cifras significativas** de una medida son las que aportan información relevante. Habitualmente trabajaremos aproximando por **redondeo** a esas cifras significativas:

- Si la primera cifra no significativa es menor que 5, se ignoran todas las cifras no significativas.
- Si la primera cifra no significativa está entre 5 y 9, se suma 1 a la última cifra significativa.

Valor exacto	Redondeo a centésimas
$2'\widehat{3}$	$2'33$
$2'\widehat{6}$	$2'67$

(cc) BY-NC

43. Redondea los siguientes números a las unidades de millar:

a) $3\,125\,345$ b) $1\,198\,542$ c) $15\,738\,928$ d) $695\,258$

44. Redondea los siguientes números a las décimas:

a) $\frac{40}{3}$ b) $\frac{7}{18}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\sqrt{7}$ e) π f) $\log_2 3$

Al aproximar asumimos un cierto margen de **error**.
También hay errores que no derivan del cálculo sino de la medición, pues ni siquiera las herramientas más precisas son totalmente exactas.

Error absoluto

El **error absoluto** es la desviación con respecto al valor exacto, medido en valor absoluto (es decir, sin importar si el error es por exceso o por defecto).

$$e_a = |\text{valor exacto} - \text{valor aproximado}|$$

Cuando esa resta involucre fracciones, deberemos emplear la fracción generatriz del valor aproximado.

45. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las unidades de millar por redondeo cada uno de los siguientes números.

a) $4\,345\,734$ b) $8\,945\,354$ c) $22\,873\,996$ d) $423\,298$

46. Calcula el error absoluto cometido al aproximar a las milésimas por redondeo cada uno de los siguientes números, utilizando fracciones generatrices cuando sea conveniente.

a) $4'\widehat{32}$ b) $27'\widehat{56}$ c) $12'0\widehat{2}$ d) $21'3\widehat{34}$ e) $1'1\widehat{6}$

47. Aproxima lo mejor que puedas el error absoluto cometido al aproximar a las décimas por redondeo los siguientes números:

a) $\sqrt{7}$ b) π c) $\log_2 3$

48. ¿Cuál es el mayor error que se puede cometer al aproximar un número a las décimas por redondeo? ¿Y a las centésimas?

Llamamos **cota de error absoluto** a un número que tenemos la seguridad que es mayor que el error absoluto,

(cc) BY-NC

Error relativo

No es lo mismo cometer un error 1 kg cuando pesas la harina de una tarta que cuando pesas un camión.
Por eso necesitamos una medida relativa que nos indique un error porcentual.

$$e_r = \frac{e_a}{\text{valor exacto}}$$

49. Calcula el error relativo cometido al redondear a las unidades de millar cada uno de los siguientes números.

    a) $12\,125\,265$ b) $3\,729\,613$ c) $51\,644\,795$ d) $234\,512$

50. Calcula el error relativo cometido al redondear a las milésimas cada uno de los siguientes números, utilizando fracciones generatrices cuando sea conveniente.

    a) $3'\widehat{6}$ b) $15'8\widehat{4}$ c) $7'\widehat{54}$ d) $9'\widehat{45}$ e) $1'2\widehat{15}$

51. Aproxima el error relativo cometido al aproximar a las décimas por redondeo los siguientes números:

    a) $\sqrt{7}$ b) π c) $\log_2 3$

(cc) BY-NC

Polinomios y fracciones algebraicas

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de varios monomios no semejantes, a los que llamamos **términos**.
A los polinomios se les suele nombrar con una letra mayúscula y, entre paréntesis, las incógnitas involucradas en él.

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 7x - 17$$

Deseamos escribir los polinomios como un producto de **factores irreducibles**, del mismo modo que factorizamos números naturales como producto de factores primos.

Factorización de polinomios

Identidades notables

El cuadrado de la suma NO es igual a la suma de los cuadrados.
El cuadrado de la resta NO es igual a la resta de los cuadrados.

1. Desarrolla las siguientes expresiones:

   a) $(m+n)^2$ b) $(m-n)^2$ c) $(m+n)(m-n)$

2. Halla la identidad notable que corresponde a cada polinomio:

   a) $25x^2 + 20x + 4$ d) $100x^4 + 100x^2 + 25$ g) $\frac{4}{25}x^2 + 2x + \frac{25}{4}$
   b) $64x^2 - 96x + 36$ e) $9x^6 - 12x^5 + 4x^4$ h) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$
   c) $100x^2 - 16$ f) $49x^8 - 25x^4$ i) $\frac{100}{49}x^2 - \frac{1}{9}$

3. Comprueba si los siguientes polinomios corresponden a una identidad notable, y en caso afirmativo hállala:

   a) $x^2 + 6x - 3$ c) $25x^2 - 10x + 1$ e) $9x^5 - 6x^3 + 1$
   b) $4x^2 + 20x + 9$ d) $9x^4 - \frac{1}{4}$ f) $0'01x^4 + 2x^2 + 100$

(cc) BY-NC

Extracción de factor común

Si los términos de un polinomio tienen divisores comunes puede aplicarse la propiedad distributiva para expresarlo como producto de un **factor común** por un polinomio de grado menor.

$$\begin{aligned} A &= 8x^4 + 2x^3 - 6x \\ &= 2x \cdot (4x^3 + x^2 - 3) \end{aligned}$$

4. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

a) $x^5 + 7x^3 - 4x^2$

b) $2x^3 + 12x + 8$

c) $3x^2 - 5x$

d) $2x^4 + 8x^2 - 4x$

e) $75x^4 + 15x^3 - 25x^2$

f) $-9x^5 + 6x^4 - 12x^3$

g) $\frac{x}{5} - \frac{x^2}{2}$

h) $\frac{3}{16}x^4 - \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{4}$

i) $2x^2 + 3xy$

Regla de Ruffini

La **regla de Ruffini** es un método que permite dividir de forma sencilla un polinomio cualquiera entre binomios de la forma $x - a$, siendo a un número conocido.

Para ello primero escribiremos los coeficientes del dividendo (asegurándonos de poner un 0 como coeficiente de los términos nulos) y el valor de a a su izquierda.

Veámoslo con un ejemplo:
Efectuaremos la división $(2x^3+x^2-1) : (x-3)$, observando que el signo de $a = 3$ es positivo.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Bajamos el coeficiente más a la izquierda, lo multiplicamos por a y colocamos el resultado en la siguiente columna.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & & 6 & & \\ \hline & 2 & \cdot 3 & & \end{array}$$

A continuación sumamos los dos números de la columna, y nuevamente multiplicamos por a para obtener el valor siguiente.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & & 6 & 21 & \\ \hline & 2 & 7 & \cdot 3 & \end{array}$$

Repetimos el procedimiento hasta llegar a la última columna.
El último valor que obtenemos es el resto de la división, los anteriores corresponden a los coeficientes del cociente.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & & 6 & 21 & 63 \\ \hline & 2 & 7 & 21 & \boxed{62} \end{array} \longrightarrow \text{resto}$$

$2x^2 + 7x + 21$

(cc) BY-NC

5. Haz las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini y escribe el cociente como un polinomio:

a) $(x^3 - x^2 - 17x + 20) : (x - 4)$
b) $(x^3 - 5x^2) : (x - 5)$
c) $(3x^3 + 8x^2 + 2x - 4) : (x + 2)$
d) $(7x^3 + 2x^2 + 3x - 5) : (x - 7)$
e) $(3x^3 - 2x^2 - 12x + 8) : \left(x - \dfrac{2}{3}\right)$
f) $(3x^4 - 5x^2 + x - 2) : (x - 1)$
g) $(2x^3 + 3x^2 - 6x - 5) : (x + 6)$
h) $(x^4 - 2x^3 - 1) : (x - 4)$
i) $(x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 15x + 8) : (x + 8)$
j) $\left(x^3 + \dfrac{17}{5}x^2 - \dfrac{19}{5}x - 2\right) : \left(x + \dfrac{2}{5}\right)$

Debemos tener en cuenta que los únicos valores enteros que puede tomar a son divisores (positivos y negativos) del término independiente, pues son los que nos permiten obtener un cero en el resto.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -9 & -18 \\ -2 & & -2 & 0 & 18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

Divisores de -18:
$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18$

Es importante tener en cuenta que el polinomio puede tener otros factores del tipo $x - a$ donde a sea un número racional no entero, pero no tenemos ninguna regla que nos permita prever cuáles pueden ser esos valores.

Teorema del factor

Un resultado útil a la hora de elegir cuáles de los posibles divisores del término independientes nos permitirán factorizar el polinomio es el **teorema del resto** pues indica que el resto de dividir un polinomio $P(x)$ entre $x - a$ tiene siempre valor $P(a)$.

$$P(x) : (x - a) = Q(x) + P(a)$$

Una consecuencia directa es que el binomio $x-a$ será factor de $P(x)$ únicamente si $P(a) = 0$. Es el llamado **teorema del factor**.

Por lo tanto *antes* de aplicar la regla de Ruffini comprobaremos si los divisores del término independiente nos permitirán obtener una división con resto cero.

6. Factoriza los siguientes polinomios aplicando la regla de Ruffini:

a) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$
b) $2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$
c) $x^3 - x^2 - 21x + 45$
d) $2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 8x + 4$
e) $3x^4 - 17x^3 + 9x^2 + 41x + 12$
f) $2x^5 - 14x^4 + 38x^3 - 50x^2 + 32x - 8$
g) $x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 50x - 125$
h) $x^4 - 72x^2 + 1296$

(cc) BY-NC

Aplicación de las ecuaciones de segundo grado

Las raíces de un polinomio $P(x)$ serán las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

Si la ecuación de segundo grado tiene soluciones x_1 y x_2 entonces el polinomio es divisible entre los binomios $x - x_1$ y $x - a_2$, pero además debemos tener en cuenta que puede existir un factor numérico que nos permita ajustar la factorización, y que concidirá con el valor del coeficiente a del polinomio.

$P(x) = 2x^2 - 5x - 3$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad P(x) = 2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

7. Factoriza los siguientes polinomios de segundo grado:

   a) $6x^2 - x - 1$ b) $6x^2 - 13 + 6$ c) $225x^2 - 60x + 4$ d) $5x^2 - 2x + 6$

Procedimiento general de factorización

Aunque no hay un procedimiento único para la factorización de cualquier polinomio, siempre será recomendable empezar por aquellos métodos que permiten simplificarlo de la forma más sencilla.
Además debemos tener en cuenta que no todas las herramientas valen para todos los casos.

Herramientas a utilizar

1. Extracción de factor común
2. Ecuación de segundo grado
3. Identidades notables
4. División utilizando la regla de Ruffini

8. Factoriza los siguientes polinomios extrayendo factor común y utilizando identidades notables:

   a) $x^4 - 4x^2$
   b) $x^5 + 6x^4 + 9x^3$
   c) $9x^3 - 6x^2 + x$
   d) $4x^7 + 4x^6 + x^5$
   e) $25x^4 + 20x^3 + 4x^2$
   f) $\frac{1}{100}x^3 + \frac{3}{50}x^2 + \frac{9}{10}x$

9. Para factorizar cada uno de los siguientes polinomios deberás utilizar dos herramientas diferentes:

   a) $x^4 - x^3 - 2x^2$
   b) $24x^4 + 14x^3 - 3x^2$
   c) $4x^3 - 3x + 1$
   d) $9x^3 + 3x^2 - 8x - 4$
   e) $18x^2 + 60x + 50$
   f) $16x^4 - 72x^2 + 81$

(cc) BY-NC

10. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 18x$

b) $2x4 + x^3 - 4x^2 - 3x$

c) $x^4 - 2x^3 - 8x^2$

d) $4x^4 - 16x^3 + 13x^2 - 3x$

e) $6x^4 - 5x^3 - 75x^2 - 10x + 24$

f) $9x^4 + 51x^3 + 67x^2 + 29x + 4$

g) $x^3 - 5x^2 - 29x + 105$

h) $9x^3 - 27x^2 - x + 3$

i) $25x^4 - 70x^3 + 44x^2 - 8x$

j) $x^4 - 2x^3 - 48x^2$

Fracciones algebraicas

Una **fracción algebraica** es una fracción cuyo denominador y numerador son polinomios, por lo que podemos expresarla como $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Para trabajar con fracciones algebraicas tomaremos los procedimientos de las fracciones numéricas y los aplicaremos a polinomios.

Simplificación de fracciones algebraicas

Para simplificar una fracción dividimos numerador y denominador entre el mismo factor, que en este caso será un polinomio. Dado que no contamos con criterios sencillos que nos permitan reconocer factores sencillos, debemos proceder a factorizar los polinomios antes de nada.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2} = \frac{x+3}{x-1}$$

11. ¿Pueden simplificarse las siguientes fracciones algebraicas? En caso afirmativo, simplifícalas.

a) $\dfrac{3x^2 + 12x + 12}{x^2 - 4}$

b) $\dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 4x - 3}$

c) $\dfrac{3x^4 + 11x^3 + 8x^2 - 4x}{3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 1}$

Una técnica a tener en cuenta cuando uno de los polinomios es difícil de factorizar es comprobar si las raíces del otro polinomio lo son también del primero.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 1}{4x^4 + 20x^3 + 21x^2 - 18x - 27}$$

$P(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \longrightarrow$ tiene raíces ± 1

- $Q(1) = 4 \cdot 1^4 + 20 \cdot 1^3 + 21 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 - 27 = 0 \quad \Longrightarrow Q(x)$ puede dividirse entre $x - 1$
- $Q(-1) = 4 \cdot (-1)^4 + 20 \cdot (-1)^3 + 21 \cdot (-1)^2 - 18 \cdot 1 - 27 = -4 \quad \Longrightarrow$ no es raíz de $Q(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) : (x-1)}{Q(x) : (x-1)} = \frac{x+1}{4x^3 + 24x^2 + 45x + 27}$$

(cc) BY-NC

12. ¿Pueden simplificarse las siguientes fracciones algebraicas? En caso afirmativo, simplifícalas.

a) $\dfrac{x^5+2x^4+10x^3+20x^2+25x+50}{x^2-4}$ b) $\dfrac{x^5+2x^4+10x^3+20x^2+25x+50}{x^2+x-6}$

Operaciones con fracciones algebraicas

Recordemos que no se pueden sumar ni restar fracciones con denominadores diferentes.

Con con fracciones algebraicas trabajamos exactamente igual que con las numéricas:
Primero hallamos el **mínimo común múltiplo** de los denominadores, que será el polinomio producto de todos los factores elevados al mayor exponente.

$$\begin{array}{ll} A(x)=4x^2-1 & =(2x+1)\cdot(2x-1) \\ B(x)=4x^3-3x+1 & =(x+1)\cdot(2x-1)^2 \end{array} \implies mcm(A,B)=(x+1)\cdot(2x+1)\cdot(2x-1)^2$$

13. Halla el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de polinomios:

a) $A(x)=x^3+5x^2+6x$
$B(x)=x^3+x^2-2x$

b) $A(x)=x^3-9x^2+15x+25$
$B(x)=5x^3-15x^2-45x-25$

c) $A(x)=3x^2-5x-2$
$B(x)=3x^2+2x-1$

d) $A(x)=x^2+2x-3$
$B(x)=2x^2+3x-2$

Para sumar y para restar fracciones algebraicas debemos hallar **fracciones equivalentes** a ellas pero con un denominador común.
Ese denominador no necesita ser operado, puede expresarse factorizado.

$$\frac{x-1}{x^2+3x+2}-\frac{x+3}{x^2-4}$$

$$\begin{array}{ll} A(x)=x^2+3x+2 & =(x+1)\cdot(x+2) \\ B(x)=x^2-4 & =(x+2)\cdot(x-2) \end{array} \implies mcm=(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$$

$$\frac{x-1}{x^2+3x+2}\cdot\frac{x-2}{x-2}=\frac{x^2-3x+2}{(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)}$$

$$\frac{x+3}{x^2-4}\cdot\frac{x+1}{x+1}=\frac{x^2+4x+3}{(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)}$$

$$\frac{x-1}{x^2+3x+2}-\frac{x+3}{x^2-4}=\boxed{\frac{-7x-1}{(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)}}$$

14. Realiza las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{4}{x-2}$ b) $\dfrac{5}{x-5}-\dfrac{3}{x+3}$ c) $\dfrac{-4}{x+2}+\dfrac{4}{x-1}$ d) $\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{x+3}{x-1}$

(cc) BY-NC

15. Realiza las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\dfrac{5}{x^2-2x}+\dfrac{x}{x+2}$

b) $\dfrac{-2x+1}{2x^2+3x-2}-\dfrac{3-x}{x^2-1}$

c) $\dfrac{3x}{x^2+1}+\dfrac{3x-1}{x^2-9}$

d) $\dfrac{2x+1}{2x^2-2x-12}-\dfrac{x^2+3}{x^3-x^2-5x-3}$

Para multiplicar y dividir fracciones algebraicas no necesitamos (ni debemos) utilizar el mínimo común múltiplo. Basta recordar que las multiplicaciones de fracciones se realizan en línea y las divisiones en zigzag.

Factorizar los polinomios **antes** de multiplicar o dividir hará que resulte más sencillo simplificar después si fuese necesario.

$$\frac{x^2-1}{2x^2+7x+3}\cdot\frac{x^2+x-6}{x+1}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+3)}(2x+1)}\cdot\frac{(x-2)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+1}}=\frac{(x-1)(x-2)}{2x+1}=\boxed{\frac{x^2-3x+2}{2x+1}}$$

16. Realiza las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\dfrac{4}{x+1}\cdot\dfrac{x-3}{2x+2}$

b) $\dfrac{-3}{x^2-1}:\dfrac{9}{x+1}$

c) $\dfrac{x+4}{x^2+4}\cdot\dfrac{-4}{x^2-4}$

d) $\dfrac{x+4}{x-7}\cdot\dfrac{7-x}{4x+2}$

17. Realiza las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\dfrac{x}{4x^2-1}:\dfrac{x^2}{2x-1}$

b) $\dfrac{x}{2x^2+x-1}:\dfrac{x^2-1}{2x-1}$

c) $\dfrac{2x-1}{x^2+2x}:\dfrac{4x}{x^3+2x^2}$

18. Realiza las siguientes operaciones combinadas y simplifica:

a) $\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x-3}{x^2-4}\right)\cdot\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x}{2}$

b) $\left(\dfrac{6}{1-x}-\dfrac{5x}{x-1}\right):\dfrac{x^2-1}{2}+\dfrac{3}{x}$

c) $\left(x+1+\dfrac{x^2}{1-x}\right):\left(1-\dfrac{x}{1+x}\cdot\dfrac{x+1}{x^3}\right)+\dfrac{4}{x^2-1}$

(cc) BY-NC

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Llamamos **solución** de la ecuación a los valores de las incógnitas para los cuales la igualdad es cierta. Para comprobar si un valor es solución de una ecuación, debemos hallar el **valor numérico** de ambos miembros y comprobar si son iguales.

1. Comprueba si el valor indicado es solución de la ecuación:

   a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ para $x = 1$

   b) $\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{x+2}{5} = 0$ para $x = 2$

   c) $\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{x+2}{5} = 0$ para $x = -2$

   d) $6x^2 - x + 1 = 0$ para $x = \frac{1}{3}$

Ecuaciones polinómicas

Una **ecuación polinómica** es aquella equivalente a la ecuación formada por un polinomio igual a cero.

Si llegamos a una ecuación del tipo $0x = 0$, nuestra ecuación tiene **infinitas soluciones** pues cualquier valor de x la cumple.

Si llegamos a una ecuación del tipo $0x$ =nº, nuestra ecuación **no tiene solución** puesto que es imposible al multiplicar por 0 obtener otro número.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis:

   a) $3 \cdot (6x - 10) - 5 \cdot (2 - 4x) = 25x - 1$

   b) $2 \cdot (7x - 1) - 3 \cdot (3x - 6) - 5 \cdot (11x + 6) = 196$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con denominadores:

   a) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{x}{9} = 7$

   b) $\dfrac{x-3}{2} + \dfrac{2x-5}{2} = 5$

   c) $\dfrac{7x-1}{2} - \dfrac{4x-6}{2} = 7$

   d) $3x - \dfrac{1}{4} = 2x + \dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{6}$

   e) $\dfrac{2x-3}{5} + 1 = 4x + 4$

   f) $\dfrac{3x-1}{2} + \dfrac{5x+7}{4} = -7$

   g) $\dfrac{5x+7}{4} - \dfrac{2x+1}{3} = 2$

   h) $\dfrac{6-x}{5} + \dfrac{3x-1}{6} - \dfrac{2x-3}{4} = \dfrac{1}{12}$

   i) $x - 2 - \dfrac{5x+7}{6} = \dfrac{10-4x}{9}$

   j) $\dfrac{9x-1}{12} + \dfrac{6x+6}{8} - \dfrac{3x}{10} = \dfrac{16}{15}$

(cc) BY-NC

Recuerda que las ecuaciones de segundo grado incompletas pueden resolverse de forma sencilla sin utilizar la fórmula, pero que si lo prefieres puedes utilizarla igualmente.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

   a) $x^2 - \frac{16}{121} = 0$
   b) $\frac{1}{2}x^2 - 8 = 0$
   c) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{27} = 0$
   d) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4} = 0$
   e) $x^2 - \frac{1}{3}x = 0$
   f) $\frac{3}{4}x^2 + x = 0$
   g) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = 0$
   h) $\frac{9}{5}x^2 - \frac{3}{25}x = 0$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

   a) $x^2 - x - 6 = 0$
   b) $-x^2 + 2x + 3 = 0$
   c) $x^2 - 2x - 8 = 0$
   d) $6x^2 + 18x + 12 = 0$
   e) $3x^2 - 9x + 12 = 0$
   f) $3x^2 - 9x - 30 = 0$
   g) $2x^2 + 4x + 2 = 0$
   h) $x^2 - 5x - 14 = 0$
   i) $x^2 - 3x + 2 = 0$
   j) $x^2 - 20x + 100 = 0$
   k) $2x^2 + 4x = 0$
   l) $2x^2 - 4 = 0$

Resolución de ecuaciones por factorización

Para resolver ecuaciones por factorización es necesario utilizar un concepto sencillo: el único producto cuyo resultado es cero es aquel en que alguno de los factores es cero.
Al fin y al cabo, si todos fuesen distintos de cero entonces el resultado no podría ser cero.

Por lo tanto si tenemos una expresión algebraica como la siguiente:

$$(x-4) \cdot (x+3) \cdot (2x-3) \cdot (x^2+1) = 0$$

Sabemos que la única forma en la que se puede cumplir esa igualdad es que alguno de sus factores sea cero. Eso dará a lugar a distintas ecuaciones sencillas que procederá a resolver.

$$\boxed{(x-4) \cdot (x+3) \cdot (2x-3) \cdot (x^2-1) = 0}$$

$x - 4 = 0$	$x + 3 = 0$	$2x - 3 = 0$	$x^2 + 1 = 0$
$x = 4$	$x = -3$	$x = \frac{3}{2}$	Sin solución real.

6. Resuelve por factorización:

   a) $x^3 - 5x^2 - 29x + 105 = 0$
   b) $9x^3 - 27x^2 - x + 3 = 0$
   c) $4x^3 - 3x + 1 = 0$
   d) $18x^2 + 60x + 50 = 0$
   e) $9x^4 - 12x^3 - 17x^2 + 8x + 4 = 0$
   f) $2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 8x + 4 = 0$
   g) $4x^7 + 4x^6 + x^5 = 0$
   h) $2x^4 - 12x^3 + 17x^2 + 6x - 9 = 0$

(cc) BY-NC

7. Resuelve por factorización:

a) $3x^4 - 17x^3 + 9x^2 + 41x + 12 = 0$

b) $25x^4 + 20x^3 + 4x^2 = 0$

c) $25x^4 - 70x^3 + 44x^2 - 8x = 0$

d) $\frac{1}{100}x^3 + \frac{3}{50}x^2 + \frac{9}{10}x = 0$

e) $6x^4 + 5x^3 - 33x^2 + 18x = 0$

f) $x^4 - 2x^3 - 48x^2 = 0$

g) $x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 50x - 125 = 0$

h) $\frac{x^4}{27} + \frac{2x^3}{9} + \frac{29x^2}{81} + \frac{4x}{27} + \frac{2}{9} = 0$

Ecuaciones bicuadradas

Llamamos **ecuaciones bicuadradas** a aquellas ecuaciones polinómicas de cuarto grado que pueden convertirse en una ecuación de segundo grado mediante un sencillo cambio de variable.
Tras resolverse la ecuación de segundo grado, debemos revertir el cambio de variable y aplicar la resolución por factorización para llegar a la solución o soluciones.

$$5x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \xrightarrow{t=x^2} 5t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 5} \Longrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{-2}{5} \end{cases} \xrightarrow{t=x^2} P(x) = 5(x^2 - 1)\left(x^2 + \frac{2}{5}\right)$$

- $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = \pm 1}$
- $x^2 + \frac{2}{5}$ no tiene solución real

8. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$

c) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$

d) $18x^4 - 26x^2 + 8 = 0$

e) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

f) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$

b) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

c) $8x^6 - 217x^3 + 27 = 0$

Ecuaciones radicales

Llamamos **ecuaciones radicales** a aquellas ecuaciones en las que alguna incógnita forma parte de un radicando.

Para resolverlas debemos asegurarnos de colocar el radical en un miembro de la igualdad para proceder a elevar al cuadrado, y tener la precaución de *asegurarnos de que la solución obtenida es efectivamente una solución de la ecuación original.*

BY-NC

$\sqrt{5x+4}-1=2x$
$\sqrt{5x+4}=2x+1$
$5x+4=(2x+1)^2$
$5x+4=4x^2+4x+1$
$-4x^2+x+3=0 \Longrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-4)\cdot 3}}{2\cdot(4)}=\dfrac{-1\pm 7}{-8} \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3}{4} \\ x=1 \end{cases}$

Sustituyendo en la ecuación original se puede comprobar que solo el valor $x=1$ la cumple, por lo tanto es la única solución.

10. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales:

a) $\sqrt{x+3}=4$
b) $\sqrt{x-8}=2$
c) $\sqrt{x}+5=7$
d) $\sqrt{2x^2-1}=x$
e) $1+\sqrt{2x+3}=6$
f) $3-\sqrt{x+2}=7$
g) $\sqrt{4x^2-15}-2x+1=0$
h) $5+3\sqrt{x}=8$
i) $x+4=\sqrt{x+10}$

Si tenemos más de un radical en la ecuación, puede ser conveniente colocar cada uno de ellos en uno de los términos.

11. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales:

a) $\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+1}$
b) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{x+3}$
c) $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{x^2+7}$
d) $\sqrt{x^2+3}-\sqrt{2x^2+2}=0$
e) $\sqrt{3x^2-5}=\sqrt{5x-7}$
f) $\sqrt{8x^2+1}-\sqrt{8x-8x^2}=0$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones, en las que es posible que necesites utilizar las ténicas anteriores varias veces:

a) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=5$
b) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=2$
c) $\sqrt{5x+19}-\sqrt{5x}=-1$

Ecuaciones logarítmicas

Llamamos **ecuaciones logarítmicas** a aquellas ecuaciones que involucran logaritmos. Las incógnitas pueden estar en la base o en el argumento del logaritmo.

13. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log_2(2x+3)=3$
b) $\log_x 256=4$

14. Aplica las propiedades de los logaritmos para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\log x+\log 2=\log 20$
b) $\log x+\log(2x)=\log 50$
c) $\log(2x)-2\log 3=\log 2$
d) $\log_2 x^2-\log_2 x=3$

(cc) BY-NC

15. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $x \log 2 + 3 = x \log 10$
b) $\log_2 5x - 1 = 4$
c) $\log_x 2 + \log_x 5 = 2$
d) $\log 2 + \log(x+3) = \log(x+5)$
e) $\log(15 - 2x) = 2 \log x$
f) $\log(x^2 + 3x + 2) - \log(x+1) = \log 1 - x$

INECUACIONES

Si una ecuación es la igualdad entre expresiones algebraicas, una **inecuación** es la desigualdad entre expresiones algebraicas.

La solución de una inecuación es frecuentemente un intervalo o varios intervalos.

$$\begin{gathered} 2x + 7 < 3 \\ 2x < 3 - 7 \\ 2x < -4 \\ x < -2 \end{gathered}$$

Al resolver inecuaciones sencillas hay una diferencia fundamental a tener en cuenta: multiplicar (o dividir) por un número negativo modifica el tipo de desigualdad.

$$\begin{gathered} 2 < 5 \\ -2 > -5 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} -40 > -70 \\ 4 < 7 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} -2x \geq 5 \\ x \leq -2'5 \end{gathered}$$

16. Resuelve las siguientes inecuaciones y expresa la solución como intervalos:

a) $2x - 4 < 5$
b) $3x + 8 > 20$
c) $2x - 6 \leq 5x$
d) $-4x + 10 \geq -6x$
e) $3x + 7 > 5x - 11$
f) $3x + 6 < 30$
g) $8x - 5 \leq 13 + 10x$
h) $\frac{x}{2} - 4 \geq \frac{x}{4} + 1$

17. Resuelve las siguientes inecuaciones y expresa la solución como intervalos:

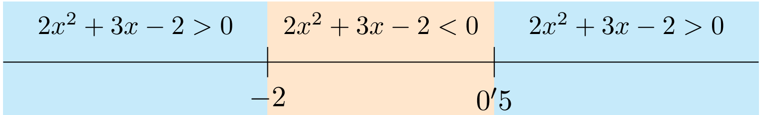
a) $x^2 \leq 4$
b) $3x^2 \geq 75$
c) $45 - 5x^2 > 0$
d) $12 - 3x^2 < 0$

Las inecuaciones polinómicas no siempre pueden resolverse de forma directa.
En ese caso procederemos a resolver la ecuación asociada para averiguar en que valores se cumple exactamente la igualdad, y razonar el tipo de desigualdad que se cumple en los intervalos entre ellos.

(cc) BY-NC

$2x^2+3x-2>0$

$$2x^2+3x-2=0 \Longrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm 5}{4}\Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-2 \end{cases}$$



Por lo tanto la solución es $(-\infty,-2)\cup(0'5,+\infty)$.

18. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

 a) $x^2-x-20\geq 0$ b) $-x^2-2x+8>0$ c) $x^2-3x-10\leq 0$ d) $x^2+x-2<0$

19. Factoriza y resuelve las siguientes inecuaciones:

 a) $x^3-3x>-2$ b) $x^3+x^2-9x-9\leq 0$ c) $6x^3+x^2\geq x$

20. Opera y resuelve las siguientes inecuaciones:

 a) $1-2(x+2)<4(x-9)$
 b) $5(4x-1)\geq -4(x+3)$
 c) $x+3(7-x)<4x-5(3+x)$
 d) $\dfrac{x+5}{4}>2x+\dfrac{x}{3}$

Sistemas de ecuaciones

Recordemos los tres métodos estudiados en cursos anteriores, y que en esta ocasión aplicaremos a sistemas de ecuaciones no lineales:

- **Método de sustitución**: Despejamos una incógnita en una ecuación y la sustituimos en la otra.
- **Método de igualación**: Despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones y las igualamos.
- **Método de reducción**: Multiplicamos las ecuaciones por coeficientes adecuados, de tal modo que al sumarlas una de las incógnitas se anule.

21. Resuelve los siguientes sistemas, empleando el método más conveniente en cada caso:

 a) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=19 \\ 5x^2-4y^2=-11 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$
 d) $\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$
 e) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$
 f) $\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \end{cases}$

(cc) BY-NC

22. Resuelve los siguientes sistemas, empleando el método más conveniente en cada caso:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=29 \\ x+2y=12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-3y^2=1 \\ x+5y=7 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+\dfrac{3}{x}=2 \\ 3x-y-1=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=y^2 \\ y=x^2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \sqrt{x}+2y=-1 \\ x-1=y+1 \end{cases}$

Sistemas de inecuaciones

Los sistemas de inecuaciones más sencillos son aquellos que tienen solo una incógnita. En ese caso la solución será el intervalo o intervalos que cumplan todas desigualdades.

23. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x+1>-2 \\ 4-2x\leq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+3<2 \\ 2x-5<3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}\geq -2 \\ 5x-4\leq 2 \end{cases}$

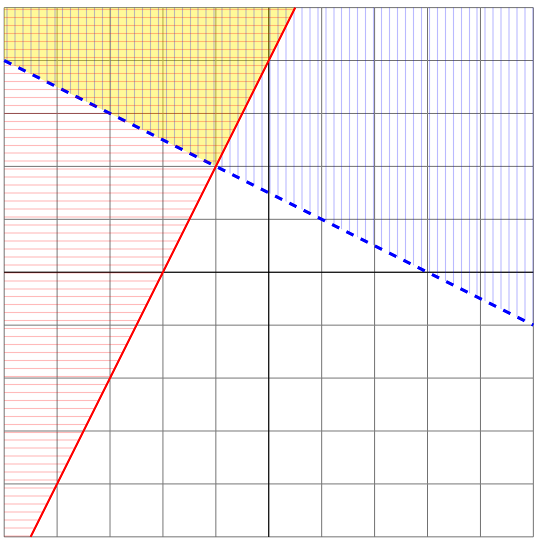
b) $\begin{cases} x>0 \\ 2x\leq 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-5\leq 1 \\ 4-2x>-4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 6x-3\geq x+7 \\ 7x+3\leq 15+3x \end{cases}$

La complejidad aumenta si deseamos resolver sistemas de inecuaciones con dos incógnitas, para lo que emplearemos el método gráfico.
Las soluciones que obtendremos darán lugar a una figura plana (que puede no estar limitada) a la que llamamos **región factible**.

$\begin{cases} x+2y>3 \\ 2x-y\leq -4 \end{cases}$

- Dibujamos la recta $x+2y=3$ y marcamos el semiplano que corresponde a la inecuación $x+2y>3$.
- Dibujamos la recta $2x-y=-4$ y marcamos el semiplano que corresponde a la inecuación $2x-y\leq -4$.

La región que pertenece a ambos semiplanos es la región factible de nuestro problema.



24. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+4y\leq 1 \\ x-2y\geq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y\geq -1 \\ 4x-y\geq -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3x\leq 4 \\ x+y\leq 3 \end{cases}$

BY-NC

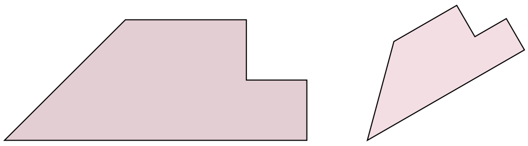
25. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 4y < 1 \\ x - 2y < 2 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 2x + y < -1 \\ 4x - y > -3 \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} 2x + 3y \geq 4 \\ x + y > -3 \end{cases}$

(cc) BY-NC

Geometría clásica

Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma, aunque tengan distinto tamaño o estén colocadas en otra posición.



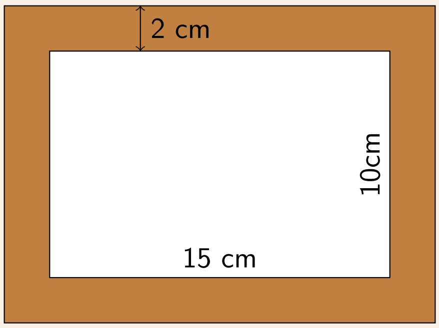
Razón entre longitudes

Las figuras poligonales con el mismo número de lados son semejantes si:

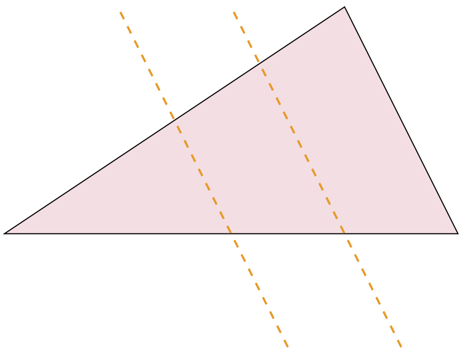
- Sus ángulos son iguales.
- Sus lados son proporcionales.

La **razón de semejanza** es la constante de proporcionalidad entre dos figuras semejantes, es decir, el número por el que hemos de multiplicar todas las longitudes de los segmentos de una de las figuras para obtener las longitudes de los segmentos de la otra.

1. Dibuja un rectángulo cuya base mida 5 unidades y cuya altura mida 2 unidades.
   Dibuja también otro rectángulo semejante con razón de semejanza 2, es decir, que mida el doble.
2. Dibuja un rectángulo cuya base mida 2 unidades y cuya altura mida 1 unidad, y otro cuya base mida 6 unidades y cuya altura mida 3 unidades. ¿Cuál es la razón de semejanza entre ellos?
3. Una fotografía con una anchura de 15 cm y una altura de 10 cm se coloca en un marco de 2 cm de ancho. ¿Son la fotografía y el rectángulo exterior del marco semejantes?



Teorema de Tales

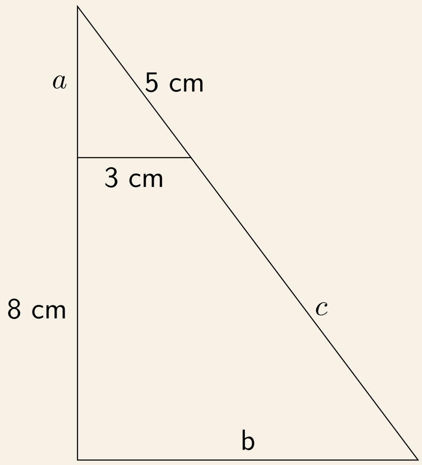


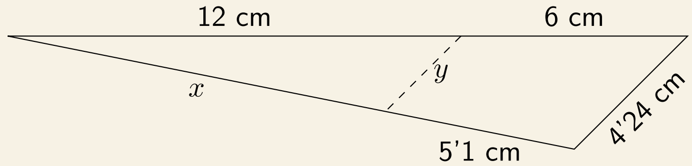
Teorema primero

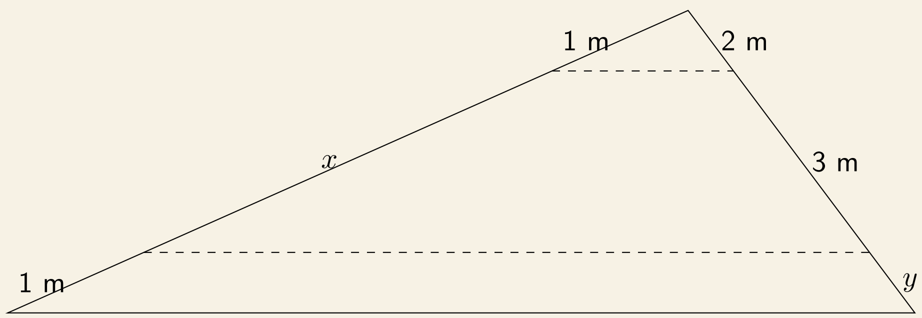
Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.
— Tales de Mileto

(cc) BY-NC

4. Halla los valores desconocidos de las siguientes figuras:







5. Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 cm y 6 cm. Une los puntos medios de los catetos. *a*) El triángulo que obtienes, ¿es semejante a él? *b*) El trozo restante, ¿qué figura es?

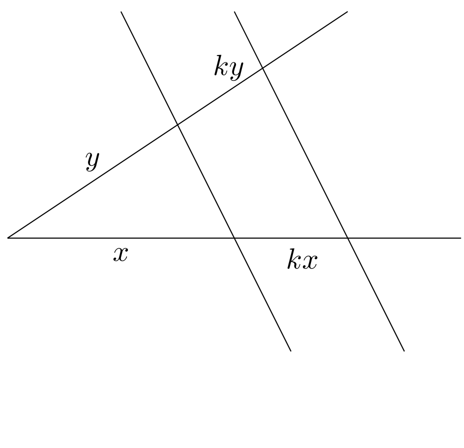
Una consecuencia directa de este teorema es que dos rectas paralelas que corten a rectas secantes dan lugar a segmentos proporcionales.

En la práctica, eso quiere decir que hay una razón de proporcionalidad para dividir los segmentos de un mismo lado entre sí:

$$\frac{kx}{x} = k = \frac{ky}{y}$$

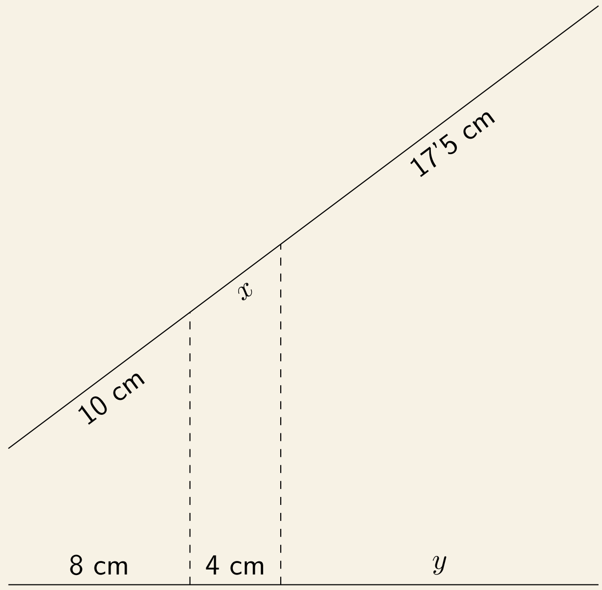
Y además también hay una razón de proporcionalidad para dividir los segmentos de un lado entre los del otro:

$$\frac{ky}{kx} = \frac{y}{x}$$



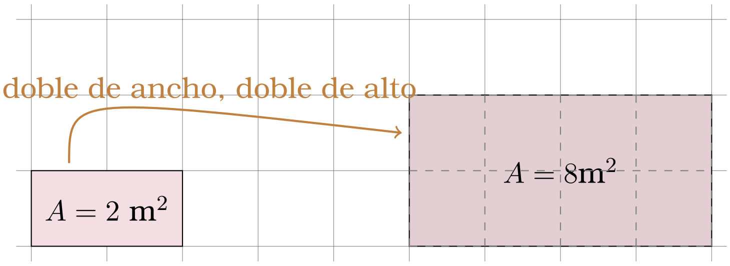
(cc) BY-NC

6. Halla la longitud de los segmentos indicados:



Razón entre áreas

La **razón entre las áreas** de dos figuras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza.



Por ejemplo, si tenemos una figura cuya altura y se multiplica por 2 entonces el área se multiplica por $2^2 = 4$.

7. Tenemos un rectángulo cuya área es 50 m^2.
   ¿Cuál será el área de un rectángulo semejante cuyos lados midan la quinta parte?

8. Partimos de un círculo cuya área es 20 m^2 y construimos otro con un radio un 50 % mayor. ¿Cuál es su área?

9. Tenemos dos polígonos irregulares semejantes. Uno de ellos tiene un área de 100 cm^2 y el otro de 200 cm^2. ¿Cuál es su razón de semejanza?

10. Partimos de una minúscula circunferencia de radio 4 mm, y deseamos dibujar otra circunferencia cuya longitud sea 25 veces mayor. ¿Qué radio tendrá? ¿Cuál será la relación entre sus área?

11. Dibuja un cuadrado cuyo lado mide 1 mm, otro cuyo lado mide 1 cm y otro cuyo lado mide 1 dm. ¿Cuál es la relación entre sus áreas?

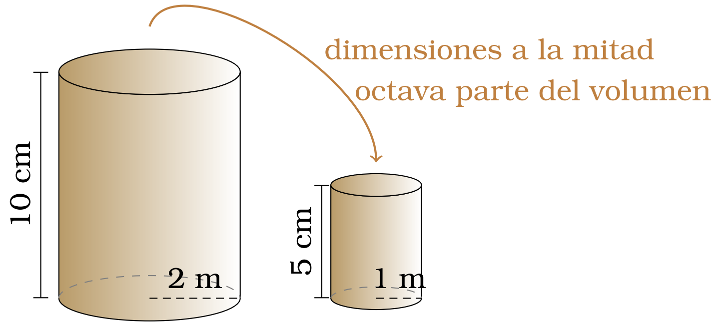
(cc) BY-NC

12. Elabora una tabla de relaciones entre unidades de superficie.

13. Teniendo en cuenta que una hectárea (ha) es equivalente a un hectómetro cuadrado (hm^2), ¿a cuántos metros cuadrados equivale un área?

RAZÓN ENTRE VOLÚMENES

El **volumen** de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura.
La **razón entre los volúmenes** de dos poliedros semejantes es el cubo de la razón de semejanza.



14. Tenemos una esfera cuyo volumen es 2 000 mm^3.
¿Cuál será el volumen de otra esfera cuyo radio mida la cuarta parte?

15. Elabora una tabla de relaciones entre unidades de volumen.

16. Teniendo en cuenta que un litro equivale a un decímetro cúbico, halla la relación entre:

a) m^3 y l *b*) km^3 y l *c*) l y cm^3 *d*) cl y mm^3

Problemas

17. La ampliación de una fotografía al 150 % mide 195 milímetros de alto y 255 de ancho. ¿Cuánto medía la fotografía original?

18. En el jardín tenemos una manguera con un diámetro de 3 cm, pero queremos comprar otra que eche el doble de agua. ¿Qué radio debe tener?

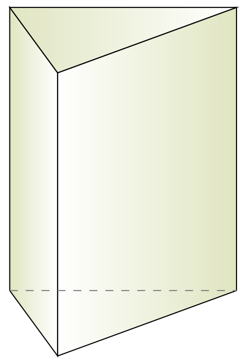
19. Una escultura de 1 metro de altura pesa 27 kg. ¿Cuánto pesará una copia, elaborada con el mismo material, cuya altura sea 25 cm?

(cc) BY-NC

Cuerpos geométricos

Prismas

Un **prisma** es un poliedro formado por dos bases poligonales iguales unidas mediante caras laterales que son paralelogramos.
Los hexaedros (o cubos) y los ortoedros son casos particulares de prismas.

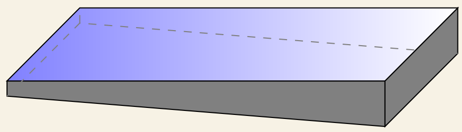


El área de un prisma es la suma del área de sus bases y caras laterales.
El volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

$$V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura}$$

20. Halla la longitud de la arista de un cubo cuya área es 12 cm^2 y calcula su volumen.

21. Las dimensiones de una piscina son 50 m de largo, 25 m de ancho y una profundidad que desciende linealmente desde 2 m hasta 6 m. ¿Cuántos litros de agua necesitaremos para llenarla?



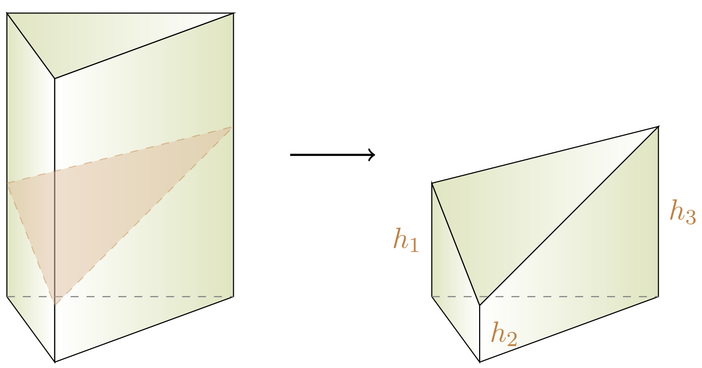
22. Un tetrabrick de leche mide 7 cm de ancho, 7 cm de fondo y 20 cm de alto.

    a) ¿Qué cantidad de material es necesaria para fabricarlo?

    b) ¿Qué volumen tiene su interior? Exprésalo en mililitros.

23. El volumen de un prisma rectangular es de 3375 cm^3 y la suma de sus tres aristas concurrentes en un vértice es 65 cm. Halla la longitud de cada una de las aristas, sabiendo que están en progresión geométrica.

Prisma truncado



Si cortamos un prisma con un plano no paralelo a las bases, obtenemos dos fragmentos irregulares.
A cada uno de ellos le llamaremos **prisma truncado** o **tronco de prisma**.

Para calcular el área de este tipo de figuras hemos de tener en cuenta que cada una de sus caras será ahora diferente y, en general, irregular.

(cc) BY-NC

El volumen de un tronco de prisma es el producto del área de la base por la media aritmética de las tres alturas medidas en sus aristas verticales.

$$V = A_{\text{base}} \cdot \frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}{n}$$

24. Calcula el volumen de los siguientes troncos de prisma:

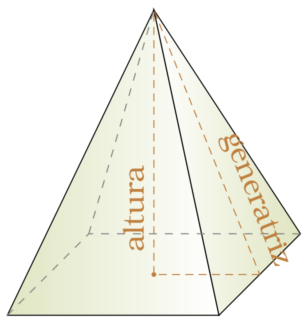
    a) Su base es un triángulo rectángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm. Sus alturas son 1 cm, 4 cm y 3 cm.

    b) Su base es un rectángulo de lados 20 cm y 15 cm. Tiene dos alturas de 4 cm y otras dos de 5 cm.

    c) Su base es un triángulo equilátero de lado 4 m. Sus alturas son 1 m, 2m y 6 m.

Pirámides

Una **pirámide** es un poliedro formado por una base poligonal y caras laterales triangulares que confluyen a un punto común llamado vértice.
Un caso particular de pirámide es el **tetraedro**, un poliedro regular formado por 4 triángulos equiláteros.

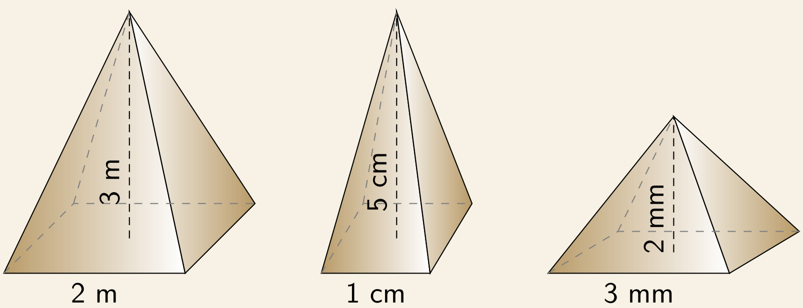


El área de una pirámide es la suma del área de su base y sus caras laterales.
El volumen de una pirámide es la tercera parte del producto del área de la base y la altura.

$$V = \frac{A_{\text{base}} \cdot \text{altura}}{3}$$

Debemos observar que la altura de la pirámide y su generatriz (altura de una de sus caras laterales) se pueden relacionar mediante el teorema de Pitágoras, por lo que es habitual que los problemas nos faciliten solo uno de los dos datos.

25. Calcula el área y el volumen de las siguientes pirámides de base cuadrada:

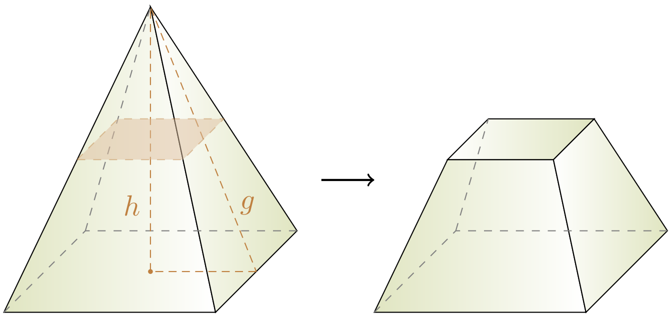


26. La Gran Pirámide de Giza se asienta sobre una base de 52900 m^2 y tiene una altura de 140 metros. Calcula el volumen de maquetas de la pirámide realizadas en las siguientes escalas:

    a) 1:20   *b*) 1:100   *c*) 1:1000

(cc) BY-NC

Pirámide truncada



Para obtener una **pirámide truncada** o **tronco de pirámide** también la cortaremos con un plano. En esta ocasión escogeremos uno paralelo a la base para que la figura resultante sea más sencilla, de modo que obtendremos un tronco con dos bases paralelas.

En este caso, el fragmento eliminado es también una pirámide y además es **semejante** a la original.

27. Hemos partido una pirámide de 10 metros de altura y base cuadrada de 3 metros de arista, justo a la mitad de su altura, obteniendo un tronco de pirámide de 5 metros de altura.

    a) Utiliza un razonamiento de semejanza para hallar las dimensiones de la base superior. Calcula el área de ambas bases.

    b) Halla la generatriz de la pirámide original, y utiliza un razonamiento de semejanza para deducir el segmento de la misma que pertenece al tronco.
    Calcula el área lateral del tronco de pirámide.

    c) Calcula el área y el volumen del tronco de pirámide.

28. Tenemos un tronco de pirámide cuya base mayor tiene un área de 900 cm^2, cuya base menor tiene un área de 25 cm^2 y cuya altura es de 12 cm.

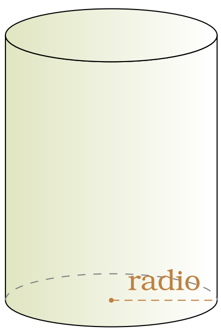
    a) Deduce la razón de semejanza entre la pirámide completa y el trozo eliminado.

    b) Utiliza la razón de semejanza para conocer la altura que tendría la pirámide completa.

    c) Calcula el volumen del tronco de pirámide.

Cilindros

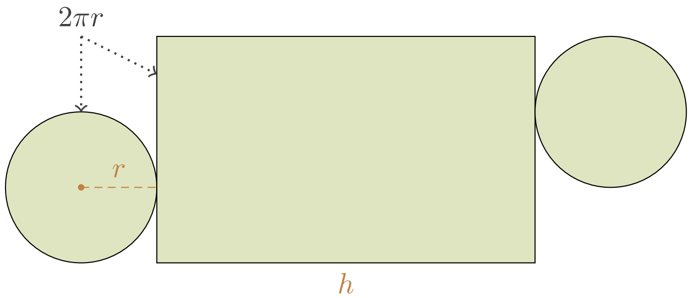
Un **cilindro** es una figura formada por dos bases circulares unidas entre sí por una superficie curva.



Dado que las bases son círculos, el área de la base se calcula simplemente con la fórmula del área de un círculo.

En el desarrollo plano del cilindro vemos que la superficie que une ambas bases equivale a un rectángulo cuya longitud es la misma que la circunferencia ($2\pi r$) y cuya altura es la altura del cilindro (h).

BY-NC



$$A = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \longrightarrow \begin{cases} A_{\text{base}} = \pi r^2 \\ A_{\text{lateral}} = 2\pi r \cdot h \end{cases}$$

El volumen de un cilindro se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

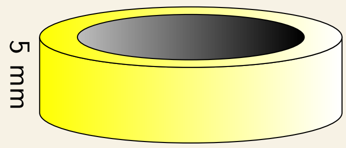
$$V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura}$$

29. Una lata de refresco mide 10 centímetros de altura, y tiene una base circular de diámetro 6'5 centímetros.

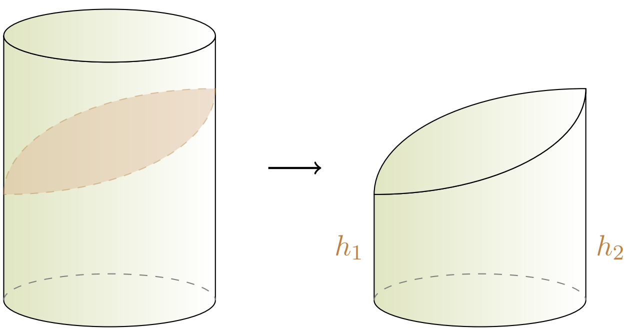
    a) ¿Cuántos cm^2 de aluminio son necesarios para su fabricación?

    b) Calcula el volumen de refresco que puede albergar y exprésalo en mililitros.

30. Un anillo de 5 mm tiene un diámetro interior de 16'6 mm y un diámetro exterior de 17 mm. ¿Qué cantidad de oro fundido es necesario para fabricarlo?



CILINDRO TRUNCADO



Si cortamos un cilindro con un plano no paralelo a las bases, obtenemos dos **cilindros truncados** o **troncos de cilindro**.

El volumen de un tronco de cilindro es el producto del área de la base por la media aritmética de la mayor y la menor altura a la que el cilindro ha sido cortado.

$$V = A_{\text{base}} \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}$$

31. Calcula el volumen de los siguientes troncos de cilindro:

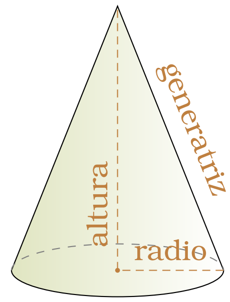
    a) El radio de su base es 3 m, su altura mínima es 1 m y su altura máxima es 2 m.

    b) El radio de su base es 2 m, su altura mínima es 1 m y su altura máxima es 3 m.

    c) El radio de su base es 15 cm, su altura mínima es 8 cm y su altura máxima es 10 cm.

(cc) BY-NC

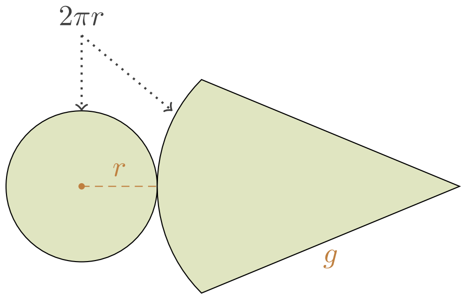
Conos



Un **cono** es una figura formada por una base circular y una superficie curva que la une con su vértice.

Dado que la base es una figura conocida, el cálculo del área de la base no entraña ninguna dificultad.

En el desarrollo plano del cono vemos que el lateral es un sector circular de radio la genetratriz g, cuyo arco coincide con la longitud de la circunferencia de la base.
Es decir, la circunferencia completa hubiese medido $2\pi g$ pero tenemos un trozo de solo $2\pi r$, así que trata de una proporción $\frac{2\pi r}{2\pi g}$ de un círculo de radio g.



$$A = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \longrightarrow \begin{cases} A_{\text{base}} = \pi r^2 \\ A_{\text{lateral}} = \frac{\cancel{2\pi} r}{\cancel{2\pi} g} \cdot \pi g^2 = \pi r g \end{cases}$$

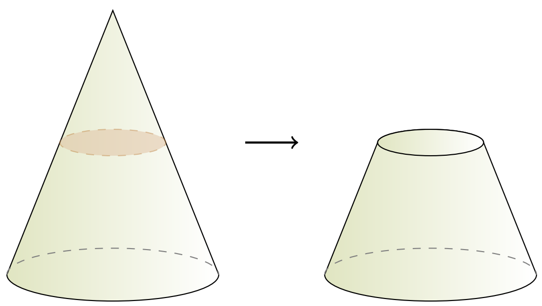
El volumen de un cono es la tercera parte del producto del área de la base y la altura.

$$V = \frac{A_{\text{base}} \cdot \text{altura}}{3}$$

Al igual que ocurría en la pirámide, la altura del cono y su generatriz se pueden relacionar mediante el teorema de Pitágoras, por lo que es habitual que los problemas nos faciliten solo uno de los dos datos.

32. Calcula el área y el volumen de un cono de altura 5 metros y cuya base tiene radio 2 metros.
33. Calcula el área y el volumen de un cono de altura 5 metros y cuya base tiene diámetro 2 metros.

Cono truncado



Para obtener un **cono truncado** o **tronco de cono** también lo cortaremos con un plano paralelo a la base para que la figura resultante sea más sencilla, de modo que obtendremos un tronco con dos bases paralelas.

En este caso, el fragmento eliminado es también un cono y además es **semejante** al original.

(cc) BY-NC

34. Hemos partido un cono de 10 metros de altura y 3 metros de radio, justo a la mitad de su altura, obteniendo un tronco de cono de 5 metros de altura.

    a) Calcula el área de ambas bases.

    b) Calcula el volumen del tronco de pirámide.

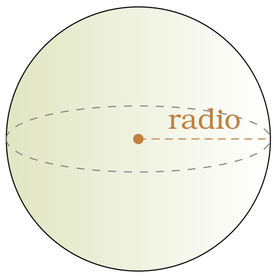
35. Tenemos un tronco de cono cuya base mayor tiene un área de 144 cm^2, cuya base menor tiene un área de 16 cm^2 y cuya altura es de 12 cm.

    a) ¿Qué altura tendría el cono completo?

    b) Calcula el volumen del tronco de pirámide.

ESFERAS

Una **esfera** es una superficie curva cuyos puntos equidistan de otro llamado centro. El área de la esfera se calcula mediante la fórmula:



$$A = 4\pi r^2$$

El volumen de la esfera se calcula mediante la fórmula:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

36. En una heladería me han ofrecido un helado en cucurucho. He medido el cono desde la punta hasta el borde de la circunferencia, y son 10 cm. También he medido el diámetro de la circunferencia, y son 4 cm.

    a) ¿Qué volumen de helado cabe en el cono?

    b) Además de llenar todo el cucurucho con helado, asoma sobre el borde media esfera adicional. ¿Qué volumen de helado hay en esa semiesfera?

    c) Entonces, ¿cuántos mililitros de helado me han ofrecido en total?

(cc) BY-NC

TRIGONOMETRÍA

UNIDADES DE MEDIDA ANGULARES

Para medir amplitudes de ángulos es frecuente utilizar el **sistema sexagesimal**.
La unidad de medida en este sistema es el **grado** (°) y sus submúltiplos son el **minuto** (') y el **segundo** (").

En nuestra calculadora utilizaremos el botón para introducir medidas angulares en ese formato, y también para convertirlas a formato decimal (y viceversa).

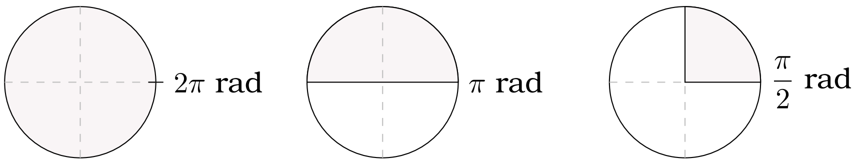
1. Escribe los siguientes ángulos en tu calculadora:

   a) $3°15'20''$ b) $97°0'35''$ c) $12'32''$ d) $98''$

2. Opera los siguientes ángulos y exprésalos en grados, minutos y segundos:

   a) $32,25° + 42,7°$ b) $3 \cdot 34,25°$ c) $\frac{2}{3} \cdot 50°$ d) $32,99° - 45,21°$

Trabajar en sistema sexagesimal es más incómodo que en decimal, por ello desde 1995 en el Sistema Internacional de Unidades se considera otra unidad para las magnitudes angulares: el **radián**.
En radianes la amplitud del ángulo mide lo mismo que el arco de circunferencia goniométrica (de radio 1) que le corresponde.



Para convertir grados en radianes o viceversa podemos utilizar una simple regla de tres teniendo en cuenta la equivalencia entre 2π radianes y $180°$.

3. Expresa estos ángulos en radianes:

   a) $30°$ b) $45°$ c) $60°$ d) $270°$ e) $43°15'$ f) $167°50''$

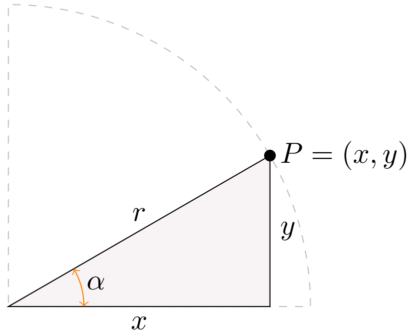
4. Expresa estos ángulos en sistema sexagesimal:

   a) $\frac{3}{4}\pi$ rad b) 3π rad c) $\frac{4}{5}\pi$ rad d) $\frac{1}{8}\pi$ rad e) 200 rad

(cc) BY-NC

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Llamamos **razones trigonométricas** de un ángulo agudo a las razones obtenidas entre dos de los lados del triángulo.



Razones trigonométricas básicas:

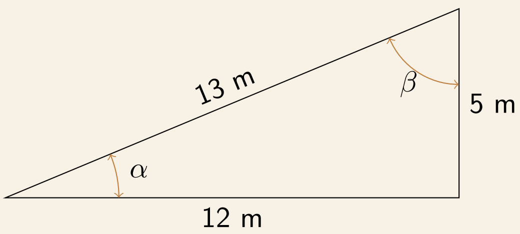
Coseno de α: $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{r}$ cos

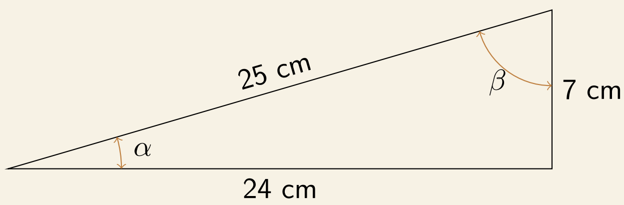
Seno de α: $\mathrm{sen}(\alpha) = \dfrac{y}{r}$ sen sin

Tangente de α: $\tan(\alpha) = \dfrac{y}{x}$ tan tg

Las calculadoras pueden configurarse para los dos tipos de unidades angulares (sexagesimales o radianes). Reconfigura tu calculadora siempre que sea necesario, o bien convierte la medida del ángulo.

5. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos α y β, y observa cómo se relacionan entre sí.





6. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos y compáralas:

   a) $0°$ b) $90°$ c) $30°$ d) $60°$ e) $45°$

7. El coseno, el seno y la tangente de un ángulo son funciones.
   Para asegurarte de que están bien definidas debes comprobar que un ángulo α solo puede tener una imagen, independientemente de los valores r, x e y del triángulo tomado como referencia.
   Utiliza tus conocimientos de geometría para demostrarlo.

8. Si el cateto contiguo a un ángulo en un triángulo rectángulo mide 3 cm y la tangente de ese ángulo vale $\dfrac{3}{4}$, ¿cuánto miden los demás lados?

9. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 2 cm y la tangente de uno de sus ángulos vale 1, ¿cuánto miden los otros lados?

(cc) BY-NC

Las inversas de las razones trigonométricas nos facilitan el ángulo agudo cuyo coseno (o seno o tangente) tiene un determinado valor.

Razones trigonométricas inversas:

Arco coseno de n: α tal que $n = \cos(\alpha)$ $\cos^{-1}$ arccos

Arco seno de n: α tal que $n = \operatorname{sen}(\alpha)$ sen^{-1} arcsin

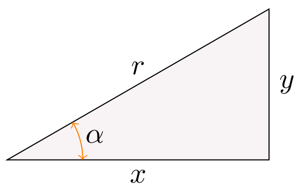
Arco tangente de n: α tal que $n = \tan(\alpha)$ $\tan^{-1}$ arctg

10. Halla los siguientes ángulos agudos, y exprésalos en grados y en radianes:

 a) cuyo seno vale $\frac{1}{2}$ *b*) cuyo coseno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *c*) cuya tangente vale 5

Relaciones entre razones trigonométricas

Si observamos la definición de las razones trigonométricas, resulta bastante evidente que están relacionadas entre sí.
Veamos las propiedades más relevantes y su demostración.



$$\tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{y}{r} : \frac{x}{r} = \frac{y \cdot \cancel{r}}{x \cdot \cancel{r}} = \frac{y}{x} = \tan(\alpha)$$

$$[\cos(\alpha)]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha)]^2 = 1$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Es habitual denotar las potencias de las razones trigonométricas colocando el exponente sobre el nombre.

$$\cos^2(\alpha) \equiv [\cos(\alpha)]^2 \qquad \operatorname{sen}^2(\alpha) \equiv [\operatorname{sen}(\alpha)]^2 \qquad \tan^2(\alpha) \equiv [\tan(\alpha)]^2$$

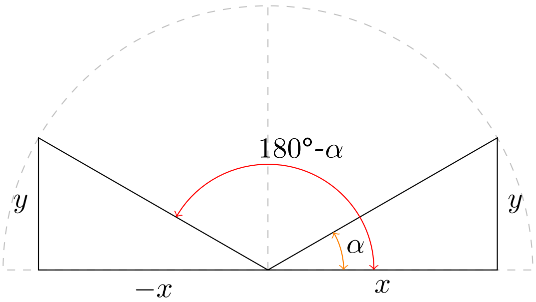
11. Sabiendo que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2}{3}$, halla $\cos(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$.

12. Comprueba si estas parejas de razones trigonométricas pertenecen al mismo ángulo:

 a) $\cos(\alpha) = 0,8660$, $\operatorname{sen}(\alpha) = 0,5$
 b) $\cos(\alpha) = 0,2588$, $\operatorname{sen}(\alpha) = 0,1485$
 c) $\cos(\alpha) = 0,6691$, $\operatorname{sen}(\alpha) = 0,2754$
 d) $\cos(\alpha) = 0,1736$, $\tan(\alpha) = 0,4663$
 e) $\cos(\alpha) = 0,9397$, $\tan(\alpha) = 0,3640$
 f) $\cos(\alpha) = 0,7313$, $\tan(\alpha) = 0,9325$

CC BY-NC

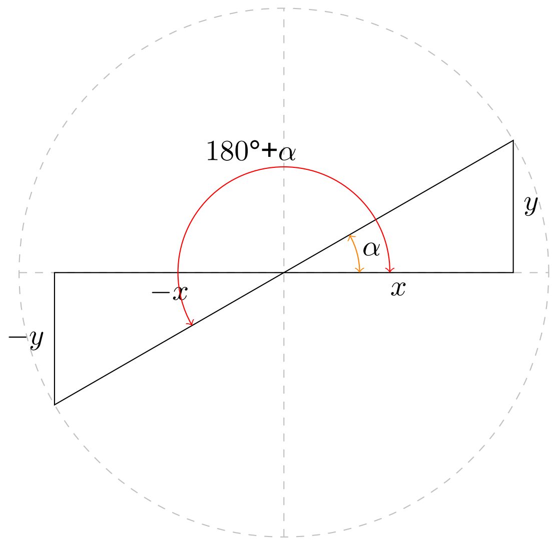
Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera



Los ángulos del segundo cuadrante (que miden entre $90°$ y $180°$) tendrán coseno negativo y seno positivo.

13. Halla los ángulos del segundo cuadrante que cumplan:

    a) $\cos(\alpha) = -0,5$ b) $\operatorname{sen}(\beta) = 0,1485$ c) $\operatorname{sen}(\gamma) = 0,8660$ d) $\tan(\delta) = -2$



Los ángulos del tercer cuadrante (que miden entre $180°$ y $270°$) tendrán coseno negativo y seno negativo.

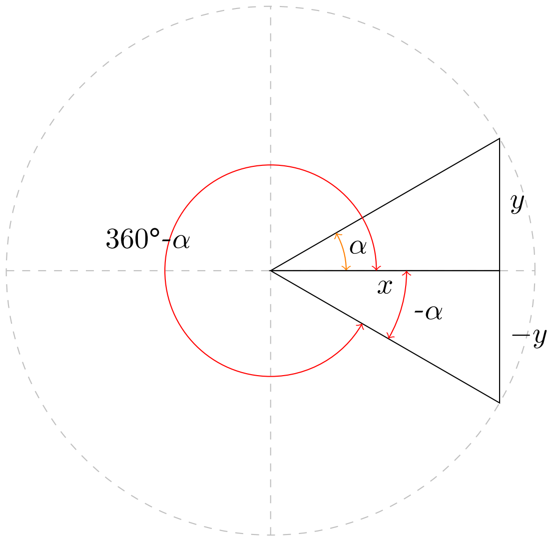
14. Halla los ángulos del tercer cuadrante que cumplan:

    a) $\cos(\alpha) = -0,5$
    b) $\operatorname{sen}(\beta) = -0,1485$
    c) $\operatorname{sen}(\gamma) = -0,8660$
    d) $\tan(\delta) = 2$
    e) $\operatorname{sen}(\lambda) = -0,5$
    f) $\cos(\theta) = -0,8660$

15. Indica en qué cuadrante están los siguientes ángulos y expresa su amplitud en grados y radianes:

    a) $\cos\alpha = 0,90631$, $\operatorname{sen}\alpha = -0,42262$ b) $\cos\beta = -0,90631$, $\operatorname{sen}\beta = -0,42262$

(cc) BY-NC



Los ángulos del cuarto cuadrante (que miden entre 270° y 360°) tendrán coseno positivo y seno negativo.

16. Halla los ángulos del cuarto cuadrante que cumplan:

    a) $\cos(\alpha) = 0,5$
    b) $\operatorname{sen}(\beta) = -0,1485$
    c) $\operatorname{sen}(\gamma) = -0,8660$
    d) $\tan(\delta) = -2$
    e) $\operatorname{sen}(\lambda) = -0,5$
    f) $\cos(\theta) = 0,8660$

17. Indica en qué cuadrante están los siguientes ángulos y expresa su amplitud en grados y radianes:

    a) $\cos\alpha = 0,17365$, $\operatorname{sen}\alpha = 0,98481$
    b) $\cos\beta = -0,17365$, $\operatorname{sen}\beta = 0,98481$
    c) $\cos\gamma = -0,17365$, $\operatorname{sen}\gamma = -0,98481$
    d) $\cos\delta = 0,17365$, $\operatorname{sen}\delta = -0,98481$

18. Indica en qué cuadrante están los siguientes ángulos y expresa su amplitud en grados y radianes:

    a) $\cos\alpha = 0,30902$, $\tan\alpha = -3,0777$
    b) $\cos\beta = -0,30902$, $\tan\beta = -3,0777$
    c) $\cos\beta = 0,30902$, $\tan\beta = 3,0777$
    d) $\cos\beta = -0,30902$, $\tan\beta = 3,0777$

19. Calcula todos los ángulos de la circunferencia que verifiquen estas igualdades, e indica en que cuadrantes se encuentran:

    a) $\tan(\alpha) = 1$
    b) $\tan(\alpha) = -1$
    c) $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$
    d) $\tan(\alpha) = -\sqrt{3}$

20. Calcula todos los ángulos que verifiquen estas igualdades.

    a) $\operatorname{sen}(\alpha) = \cos(\alpha)$
    b) $\operatorname{sen}^2(\alpha) = 1$
    c) $\operatorname{sen}(\alpha) = 1 - \cos\alpha$
    d) $\tan^2(\alpha) = 1$
    e) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{2}$
    f) $\operatorname{sen}(\alpha) = \tan(\alpha)$

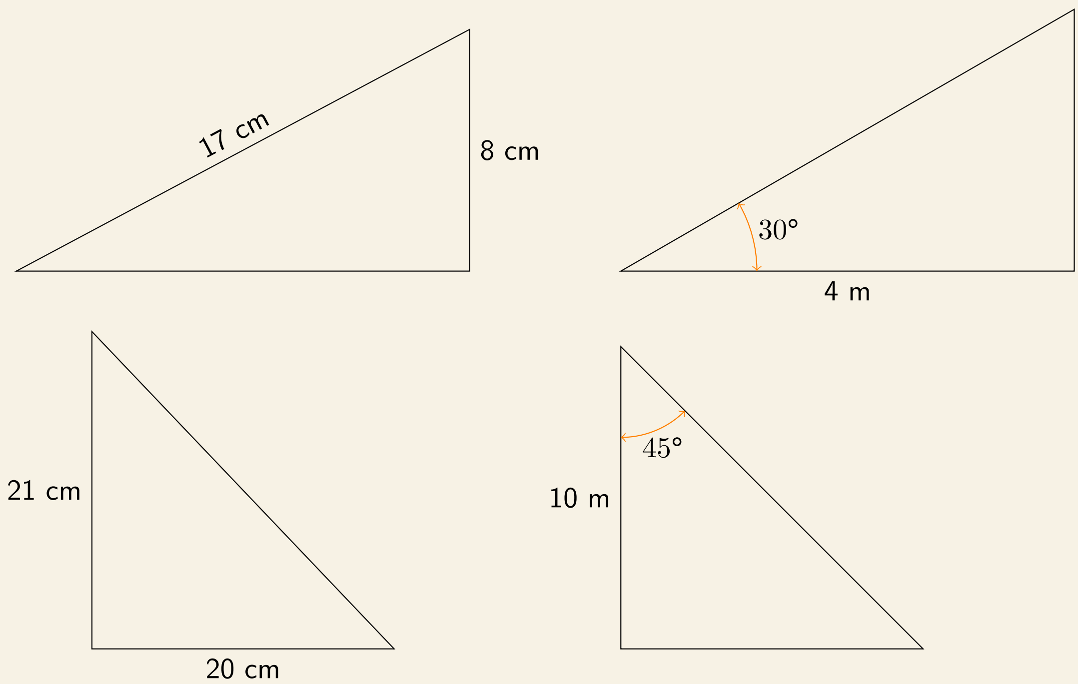
(cc) BY-NC

Resolución de triángulos rectángulos

Llamamos resolver un triángulo a calcular la medida de todos sus lados y de todos sus ángulos a partir de los elementos conocidos.

Las herramientas con las que contamos son fundamentalmente el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas. Recordemos además que los tres ángulos interiores de un triángulo deben sumar $180°$.

21. Resuelve los siguientes triángulos:



22. Resuelve un triángulo rectángulo sabiendo que:

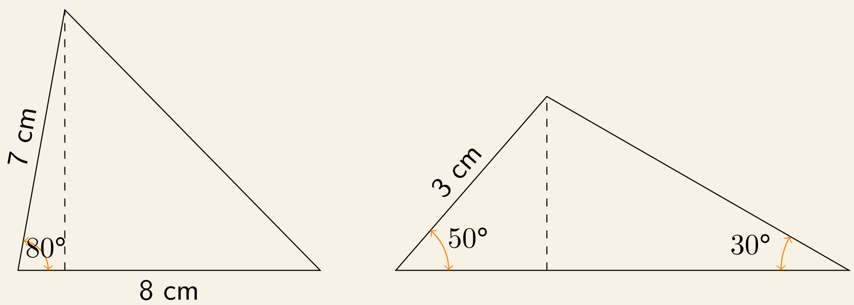
    a) Los catetos miden 11 y 60 cm.

    b) Uno de sus catetos mide 15 cm y su hipotenusa 17 cm.

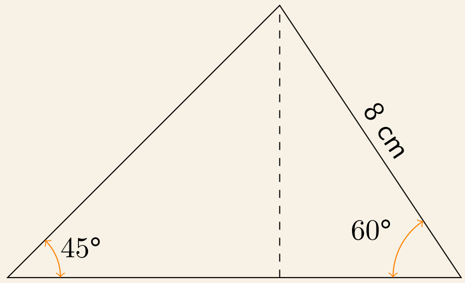
    c) Uno de sus catetos mide 9 m y el otro mide un metro menos que la hipotenusa.

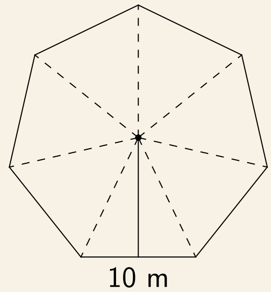
    d) La hipotenusa mide 10 m y la tangente de uno de sus ángulos es 0,75.

23. Calcula el área de las siguientes figuras:



BY-NC





Problemas:

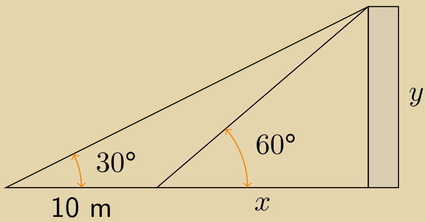
24. Un árbol de 5 metros de altura proyecta una sombra de 6,5 metros de longitud. Encuentra el ángulo en el que inciden los rayos de sol en él.

25. Cuando los rayos del sol forman $40°$ con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 metros. ¿Cuál es su altura?

26. Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?

27. Nuestra cometa está volando a 5 metros de altura, con la cuerda totalmente estirada y formando un ángulo de $60°$ con el suelo. ¿Cuánto mide dicha cuerda?

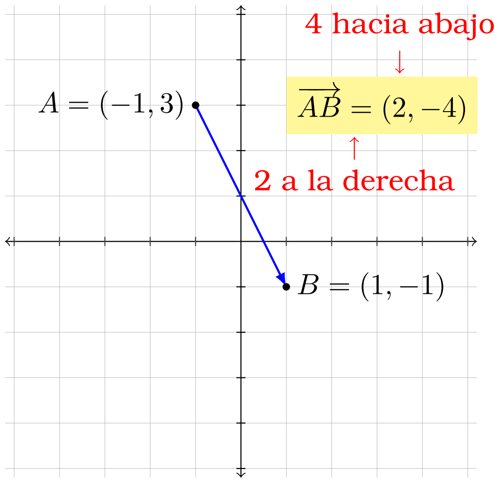
28. Calcula la altura de un edificio, sabiendo que desde donde estamos vemos el punto más alto en un ángulo de $30°$, y si nos acercamos 10 metros entonces la vemos en un ángulo de $60°$.



BY-NC

Geometría analítica

Vectores en el plano



Llamamos **vector** $\overrightarrow{AB}$ al segmento orientado cuyo **origen** es el punto A y cuyo **extremo** es el punto B.

Gráficamente lo representamos como el segmento que une ambos puntos y una flecha apuntando hacia el extremo para indicar el su sentido.

Lo denotamos por una pareja de coordenadas que indican la traslación que se realiza para llegar del punto A hasta el punto B.

1. Halla los vectores que unen los siguientes pares de puntos:

   a) $A = (0,1)$, $B = (2,3)$
   c) $E = (-1,3)$, $F = (4,3)$
   e) $I = (0,0)$, $J = (-5,-3)$
   b) $C = (3,4)$, $D = (2,3)$
   d) $G = (3,1)$, $H = (2,-1)$
   f) $K = (3,4)$, $L = (3,7)$

2. ¿Cuál será el vector cuyo origen está en el punto $A = (x_A, y_A)$ y cuyo extremo en el punto $B = (x_B, y_B)$?

3. Si el vector $\overrightarrow{AB} = (2,-1)$ tiene origen en el punto $A = (-5,3)$ ¿cuál será su extremo?

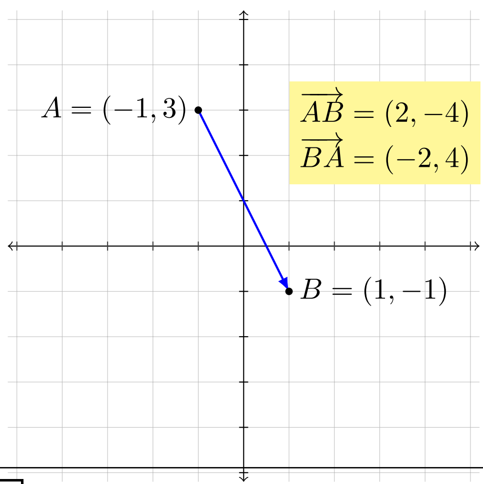
Un vector también se suele denotar con una letra minúscula con ($\vec{u}$), sin hacer referencia al origen ni al extremo. Es lo que llamamos un **vector libre**.

Características de un vector

La línea recta sobre la que trazamos nuestro vector se llama **dirección** del vector.

Dicha dirección tiene dos posibles **sentidos**, dependiendo de hacia donde nos movemos en la dirección.

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene sentido opuesto al vector $\overrightarrow{BA}$.

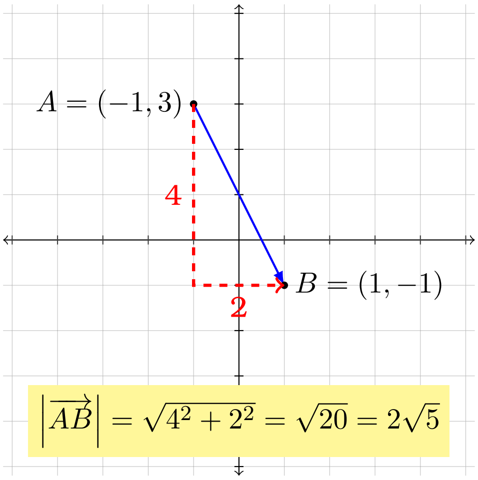


(cc) BY-NC

Llamamos **módulo** de un vector a su longitud.

El módulo del vector $\vec{u}$ se denota por $|\vec{u}|$.

Para calcularlo basta aplicar el Teorema de Pitágoras.



4. Calcula el módulo de los vectores que unen los siguientes pares de puntos:

   a) $A = (0, 1)$, $B = (2, 3)$ b) $C = (3, 4)$, $D = (2, 3)$ c) $E = (-1, 3)$, $F = (4, 3)$

5. Calcula el módulo de los siguientes vectores:

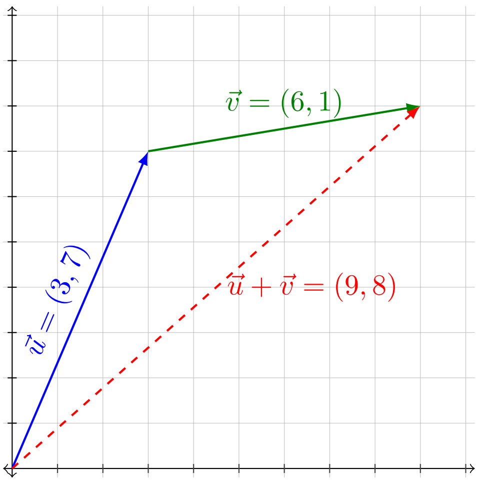
   a) $\vec{a} = (3, 4)$ b) $\vec{b} = (5, -12)$ c) $\vec{c} = (-7, -24)$ d) $\vec{d} = (-8, 15)$

6. ¿Cuál será el módulo de un vector cualquiera $\vec{u} = (x_u, y_u)$?

Operaciones con vectores

En general, sumar quiere decir añadir un valor a otro.
De modo análogo, sumar vectores es añadir un movimiento a otro, trasladando primero según uno de los vectores y luego según el otro.

La suma de vectores es una operación conmutativa.



7. Determina gráficamente y calcula las coordenadas de la suma de estos vectores:

   a) $\vec{u} = (3, 2)$, $\vec{v} = (5, 2)$
   b) $\vec{u} = (4, 1)$, $\vec{v} = (3, -2)$
   c) $\vec{u} = (6, 5)$, $\vec{v} = (-7, -3)$
   d) $\vec{u} = (-4, -2)$, $\vec{v} = (-3, 0)$
   e) $\vec{u} = (-6, 3)$, $\vec{v} = (5, -8)$
   f) $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (-2, -3)$

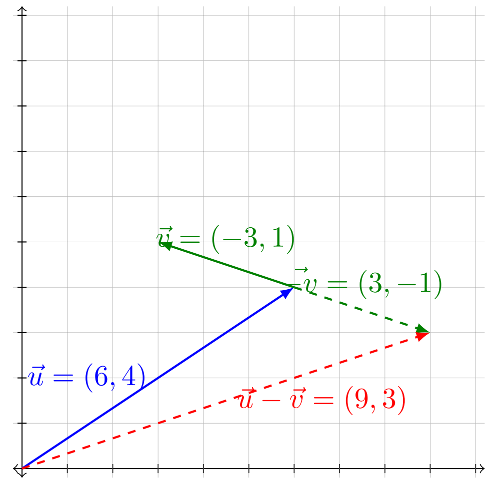
8. ¿Cuál será la suma de los vectores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ y $\vec{v} = (x_v, y_v)$?

(cc) BY-NC

Por otro lado, restar es sumar el opuesto.

Así que restar vectores implica sumar a un vector el opuesto del otro, entendiendo por opuesto aquel que tiene la misma dirección pero sentido contrario.

La resta de vectores NO es una operación conmutativa.



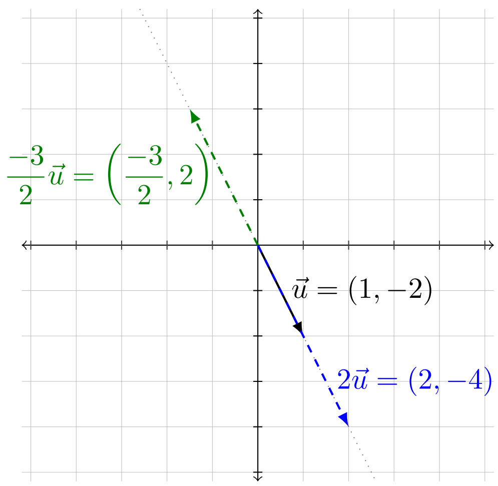
9. Determina gráficamente y calcula las coordenadas de la resta de estos vectores:

   a) $\vec{u} = (3, 2)$, $\vec{v} = (5, 2)$
   b) $\vec{u} = (4, 1)$, $\vec{v} = (3, -2)$
   c) $\vec{u} = (6, 5)$, $\vec{v} = (-7, -3)$
   d) $\vec{u} = (-4, -2)$, $\vec{v} = (-3, 0)$
   e) $\vec{u} = (-6, 3)$, $\vec{v} = (5, -8)$
   f) $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (-2, -3)$

10. ¿Cuál será la diferencia de los vectores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ y $\vec{v} = (x_v, y_v)$?

Multiplicar un vector por un número consiste en sumar el vector consigo mismo tantas veces como indique el número.

El vector resultante siempre tiene la misma dirección que el original.



11. ¿Cuál será el resultado de multiplicar el número k por el vector $\vec{u} = (x_u, y_u)$?

12. Realiza las siguientes multiplicaciones:

   a) $3 \cdot (4, -1)$
   b) $-2 \cdot (1, 3)$
   c) $\frac{3}{4} \cdot (6, 8)$
   d) $2\pi \cdot (5, 0)$

13. Realiza las siguientes operaciones combinadas con vectores:

   a) $2 \cdot (7, -1) + 3 \cdot (-2, 4)$
   b) $-\frac{2}{3} \cdot (5, 0) + \frac{1}{3} \cdot (-10, 3)$
   c) $3 \cdot (4, 8) - 2 \cdot (6, 12)$

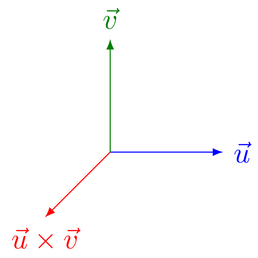
(cc) BY-NC

Hay dos modos diferentes de multiplicar un vector por otro, que mencionaremos aunque no son materia de este curso.

Utilizando el producto escalar se obtiene un número, cuyo valor nos permite conocer el ángulo que forman los dos vectores.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$$

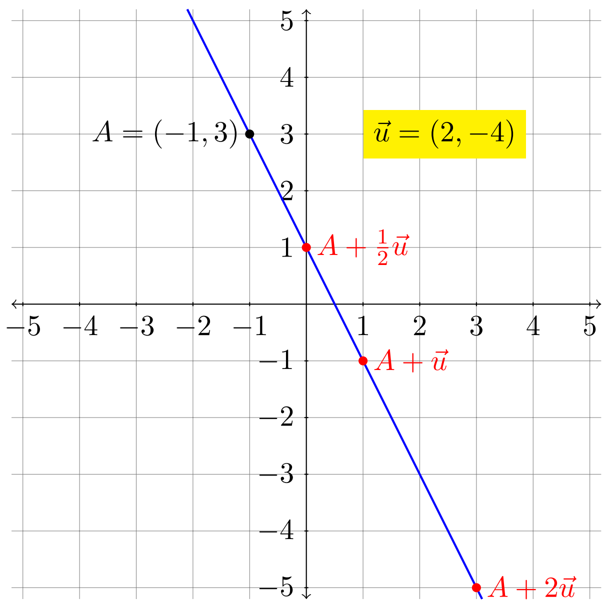
Utilizando el llamado producto vectorial se obtiene un nuevo vector, perpendicular a los dos primeros. Por ello tiene sentido definirlo cuando trabajamos con tres dimensiones, pero no con dos.



Ecuaciones de la recta

Para describir algebraicamente una recta necesitamos conocer al menos un punto que pertenezca a ella y además su dirección, expresada como un **vector director**. Esos datos nos permiten expresar una ecuación que deben cumplir todos los puntos de la recta.

Ecuación vectorial



La forma más sencilla de plantear una ecuación de la recta es tomar un punto de referencia y a partir de ahí movernos en la dirección de la recta tanto como el vector director, o dos veces el vector, o media vez el vector, etc.

Esa «cantidad de veces» el vector puede ser cualquier número, y lo caracterizaremos con el parámetro t que puede tomar cualquier valor real.

$$(x, y) = (x_A, y_A) + t \cdot (x_u, y_u) \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$(x, y) = (-1, 3) + t \cdot (2, -4) \qquad t \in \mathbb{R}$$

14. Halla la ecuación vectorial de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos:

a) $A = (0, 1),\ B = (2, 3)$
b) $C = (3, 4),\ D = (2, 3)$
c) $E = (-1, 3),\ F = (4, 3)$
d) $G = (3, 1),\ H = (2, -1)$
e) $I = (0, 0),\ J = (-5, -3)$
f) $K = (3, 4),\ L = (3, 7)$
g) $M = (1, 7),\ N = (-1, 3)$
h) $P = (-5, 3),\ Q = (-3, 2)$

(cc) BY-NC

15. ¿Existe algún valor del parámetro t para el que el punto $R = (3, 5)$ pertenezca a cada una de las rectas anteriores?

Ecuaciones paramétricas

La ecuación vectorial se puede reescribir, observando por un lado lo que ocurre con la coordenada x y por otro lado lo que ocurre con la coordenada y.

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot x_u \\ y = y_A + t \cdot y_u \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

16. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, con las que ya trabajamos en ejercicios anteriores:

    a) $A = (0, 1)$, $B = (2, 3)$
    b) $C = (3, 4)$, $D = (2, 3)$
    c) $E = (-1, 3)$, $F = (4, 3)$
    d) $G = (3, 1)$, $H = (2, -1)$
    e) $I = (0, 0)$, $J = (-5, -3)$
    f) $K = (3, 4)$, $L = (3, 7)$
    g) $M = (1, 7)$, $N = (-1, 3)$
    h) $P = (-5, 3)$, $Q = (-3, 2)$

17. ¿Existe algún valor del parámetro t para el que el punto $S = (-3, -1)$ pertenezca a cada una de las rectas anteriores?

Ecuación continua

Utilizar un parámetro es útil para plantear ecuaciones, pero comprobar si un punto pertenece a una recta resulta complejo. Por eso intentaremos librarnos de él, utilizando el método de igualación (que vimos en el tema de sistemas de ecuaciones).

$$\frac{y - y_A}{y_u} = \frac{x - x_A}{x_u}$$

$$\frac{y - 3}{-4} = \frac{x + 1}{2}$$

18. Halla la ecuación continua de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, utilizando las ecuaciones paramétricas que ya has obtenido, en aquellos casos en los que sea posible:

    a) $A = (0, 1)$, $B = (2, 3)$
    b) $C = (3, 4)$, $D = (2, 3)$
    c) $E = (-1, 3)$, $F = (4, 3)$
    d) $G = (3, 1)$, $H = (2, -1)$
    e) $I = (0, 0)$, $J = (-5, -3)$
    f) $K = (3, 4)$, $L = (3, 7)$
    g) $M = (1, 7)$, $N = (-1, 3)$
    h) $P = (-5, 3)$, $Q = (-3, 2)$

19. ¿A cuáles de las rectas anteriores pertenece el punto $T = (5, 5)$?

(cc) BY-NC

20. a) ¿Qué tipos de rectas no tienen ecuación continua? ¿Por qué?

    b) ¿Qué ecuación sencilla podría describir esas rectas?

Ecuación punto-pendiente

La ecuación continua ya facilita mucha información pero podemos simplificarla multiplicando por el coeficiente y_u, obteniendo la pendiente $m = \frac{y_u}{x_u}$ en el otro miembro de la ecuación.

$$y - y_A = m \cdot (x - x_A)$$

$$y - 3 = -2 \cdot (x + 1)$$

Además es posible calcular la ecuación punto-pendiente incluso para rectas horizontales, a pesar de no haber obtenido previamente la ecuación continua.

21. Halla la ecuación punto-pendiente de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, utilizando la ecuación continua que ya has obtenido:

    a) $A = (0,1)$, $B = (2,3)$
    b) $C = (3,4)$, $D = (2,3)$
    c) $G = (3,1)$, $H = (2,-1)$
    d) $I = (0,0)$, $J = (-5,-3)$
    e) $M = (1,7)$, $N = (-1,3)$
    f) $P = (-5,3)$, $Q = (-3,2)$

22. La recta que pasa por los puntos $E = (-1,3)$ y $F = (4,3)$ es horizontal y por lo tanto no tiene ecuación continua. ¿Cuál es su ecuación punto-pendiente?

23. La recta que pasa por los puntos $K = (3,4)$ y $L = (3,7)$ tampoco tiene ecuación continua, pero en este caso no se puede calcular la punto-pendiente. ¿Por qué?

24. ¿A cuáles de las rectas anteriores pertenece el punto $U = (-11,7)$?

Ecuación explícita

Bastaría despejar la variable y de la ecuación de la recta para obtener una ecuación que coincide con la expresión que hemos visto en el tema de funciones lineales.

$$y = m \cdot x + n$$

$$y = -2x + 1$$

A diferencia de todas las demás ecuaciones, la explícita es única. Independientemente de los puntos tomados, obtendremos siempre la misma ecuación.

(cc) BY-NC

25. Halla la ecuación explícita de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos:

a) $A = (0, 1)$, $B = (2, 3)$
b) $C = (3, 4)$, $D = (2, 3)$
c) $E = (-1, 3)$, $F = (4, 3)$
d) $G = (3, 1)$, $H = (2, -1)$
e) $I = (0, 0)$, $J = (-5, -3)$
f) $M = (1, 7)$, $N = (-1, 3)$
g) $P = (-5, 3)$, $Q = (-3, 2)$

26. ¿A cuáles de las rectas anteriores pertenece el punto $V = (-1, 0)$?

Ecuación general

Esta ecuación puede obtenerse a partir de la continua, la punto-pendiente o la explícita. Basta operar y reordenar los términos de manera adecuada.

$$Ax + By + C = 0$$

$$2x + y - 1 = 0$$

27. Halla la ecuación general de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos, utilizando alguna de las ecuaciones obtenidas anteriormente:

a) $A = (0, 1)$, $B = (2, 3)$
b) $C = (3, 4)$, $D = (2, 3)$
c) $E = (-1, 3)$, $F = (4, 3)$
d) $G = (3, 1)$, $H = (2, -1)$
e) $I = (0, 0)$, $J = (-5, -3)$
f) $M = (1, 7)$, $N = (-1, 3)$
g) $P = (-5, 3)$, $Q = (-3, 2)$

28. ¿A cuáles de las rectas anteriores pertenece el punto $V = (7, -4)$?

29. Observa cada una de las ecuaciones generales que has obtenido y también la pendiente de esas rectas. ¿Puedes encontrar alguna relación?

Una vez conocidas todas las ecuaciones de la recta, es importante entender la información que nos ofrecen y saber trasladarla a otra de las ecuaciones.

30. Escribe todas las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:

a) $A = (4, 6)$, $B = (3, 8)$
b) $C = (-3, -4)$, $D = (-5, -2)$
c) $E = (4, 7)$, $F = (8, 7)$
d) $G = (-2, 9)$, $H = (-2, 6)$

31. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta $3x + 2y - 5 = 0$.

32. Escribe la ecuación general de la recta $\dfrac{y-5}{2} = \dfrac{x-3}{-5}$.

33. Escribe la ecuación punto-pendiente de la recta $y = 4x + 2$.

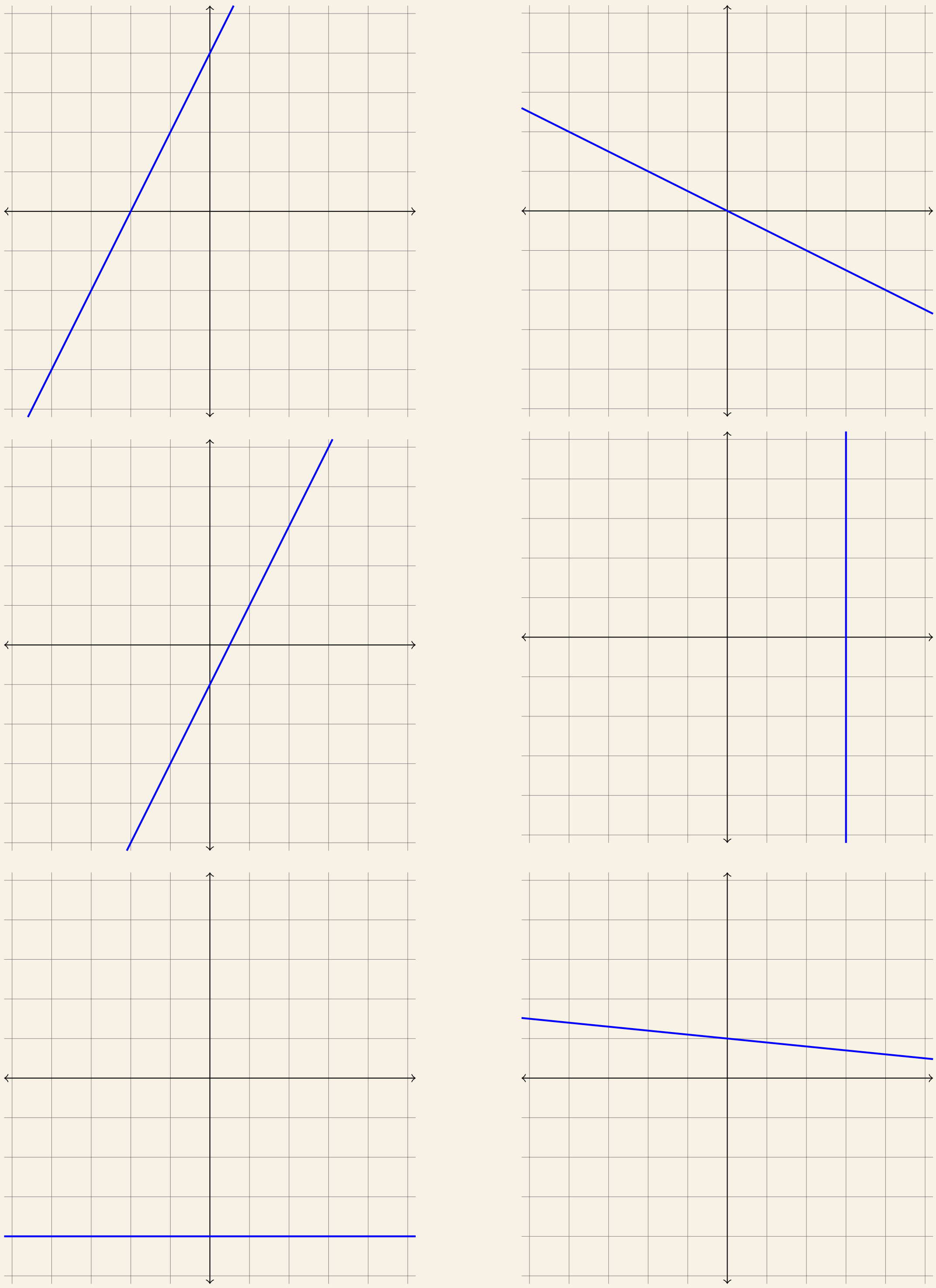
34. Escribe la ecuación explícita de la recta $3x + 2y + 8 = 0$.

(cc) BY-NC

35. No es posible obtener todos los tipos de ecuaciones para una recta horizontal. ¿Por qué? ¿Cuáles sí podrán hallarse?

36. No es posible obtener todos los tipos de ecuaciones para una recta vertical. ¿Por qué? ¿Cuáles sí podrán hallarse?

37. Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

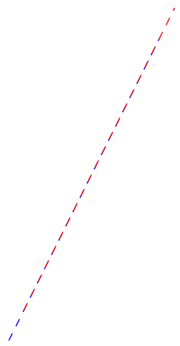


(cc) BY-NC

Posición relativa de rectas

En el plano, dos rectas pueden ser secantes, paralelas o coincidentes.

Rectas coincidentes



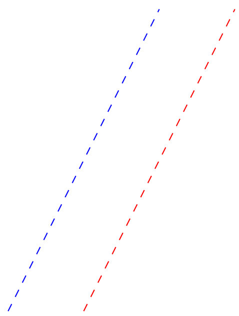
Decimos que dos rectas son **coincidentes** si todos sus puntos son comunes.

Si coinciden entonces lógicamente han de tener la misma dirección. Y tener la misma dirección implica que:

- Sus vectores directores son equivalentes.
- Sus pendientes son iguales.

Al tener la misma dirección sabemos que si tienen un punto en común deben tenerlos todos. Por lo tanto bastará comprobar si uno de los puntos de una recta pertenece también a la otra.

Rectas paralelas



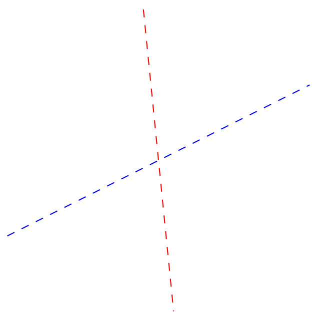
Decimos que dos rectas son **paralelas** si tienen la misma dirección pero no tienen ningún punto en común.

Por lo tanto si tienen la misma dirección:

- Sus vectores directores son equivalentes.
- Sus pendientes son iguales.

Pero al tomar un punto cualquiera de una recta observamos que no puede pertenecer a la otra, por lo tanto las rectas deben ser paralelas.

Rectas secantes



Decimos que dos rectas son **secantes** si tienen un único punto en común.

Para comprobar que son secantes basta comprobar que no tienen la misma dirección.

Además, puede hallarse el punto de intersección de ambas rectas solucionando el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de ambas rectas.

(cc) BY-NC

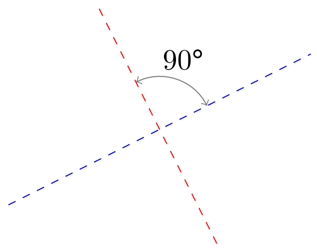
38. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas. En caso de que sean secantes, halla la intersección.

a) $\begin{cases} r: & y=-2x+1 \\ s: & 2x-3+2=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: & \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1} \\ s: & y=-2x-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} r: & (x,y)=(0,1)+t(1,1) \quad t\in\mathbb{R} \\ s: & 2x-2y+1=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} r: & (x,y)=(2,3)+t(1,4) \quad t\in\mathbb{R} \\ s: & \dfrac{x-3}{-8}=\dfrac{y-1}{-2} \end{cases}$



Hay un caso particular de rectas secantes que tiene especial interés: el de las rectas **perpendiculares**, que son aquellas que forman ángulos de 90°.

El vector director (y en consecuencia la pendiente) de dos rectas perpendiculares están relacionados, lo que nos permitirá construir de forma sencilla rectas perpendiculares a una dada.

39. a) Representa gráficamente la recta $r:\ (x,y)=(0,0)+t(2,1)$, $t\in\mathbb{R}$.
    b) En el mismo eje de coordenadas, dibuja una recta perpendicular a ella. Hay infinitas, puedes dibujar la que pase por el punto $(0,0)$.
    c) ¿Cuál es el vector director de esa nueva recta?

40. a) Representa gráficamente la recta $r:\ (x,y)=(3,1)+t(-3,4)$, $t\in\mathbb{R}$.
    b) En el mismo eje de coordenadas, dibuja una recta perpendicular a ella.
    c) ¿Cuál es el vector director de esa nueva recta?

41. Si la recta r tiene vector director $\vec{u}=(x_u,y_u)$, ¿cuál será el vector director de una recta perpendicular a ella?

42. Si la recta s tiene pendiente m, ¿cuál será la pendiente de una recta perpendicular a ella?

43. Escribe la ecuación vectorial de la recta perpendicular a $y=3x-2$ que pase por el punto $(3,7)$.

44. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{x+3}{7}$ que pase por el punto $(1,0)$.

45. Escribe la ecuación continua de la recta perpendicular a $y-4=3(x-1)$ que pase por el punto $(1,4)$.

46. Escribe la ecuación punto-pendiente de la recta perpendicular a $3x+5y-2=0$ que pase por el punto $(4,-2)$.

47. Escribe la ecuación explícita de la recta perpendicular a $6x-y+3=0$ que pase por el punto $(-2,1)$.

48. Escribe la ecuación general de la recta perpendicular a $y=\dfrac{1}{2}x-3$ que pase por el punto $(0,0)$.

(cc) BY-NC

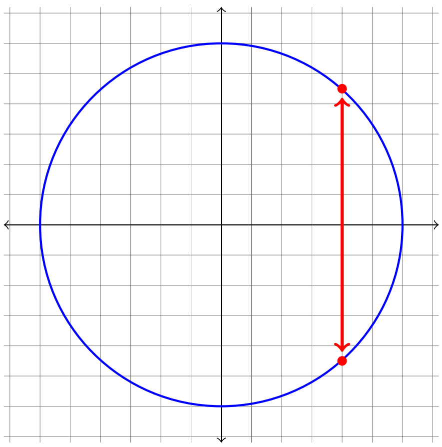
Estudio de funciones

Concepto de función

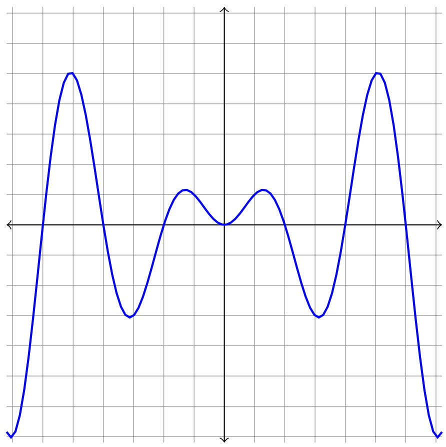
Una **función** es una relación entre los elementos de dos conjuntos tal que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un único valor del conjunto final.

Las **funciones numéricas** que estudiaremos en este tema relacionan dos magnitudes, por eso pueden representarse como parejas de números (x, y), es decir, como puntos en un plano cartesiano.
En este caso, para ser función debe asegurarse que para cada valor de la coordenada x existe un único valor de la coordenada y, o lo que es lo mismo, que **para cada** x **existe un único punto** en la gráfica.

En una función puede haber múltiples valores x para los cuales su imagen sea la misma y, es decir, puede haber muchos puntos a la misma altura.



Si hay dos puntos con el mismo valor de x (es decir, están en la misma recta vertical) entonces NO es función.



Aún así, una función puede tener formas bastante complicadas.
Observa los puntos a la misma altura.

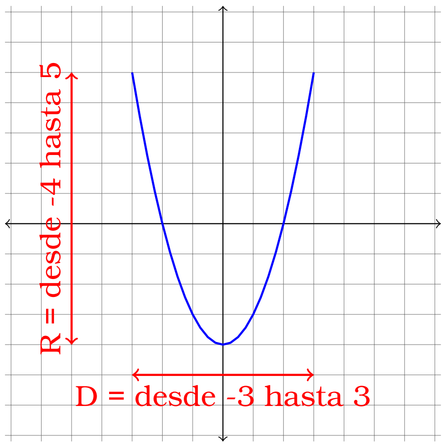
Estudio de funciones elementales

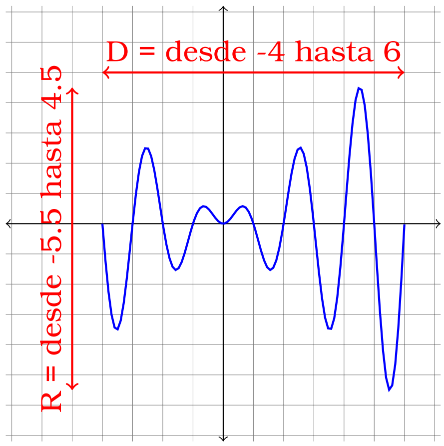
Dominio y recorrido

El **dominio** de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (x), es decir, *de izquierda a derecha*.
El **recorrido** de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente (y), es decir, *de abajo a arriba*.

(cc) BY-NC

El dominio y el recorrido de una función pueden corresponder a un solo intervalo, varios intervalos, semirrectas o incluso toda la recta real.





Es posible hallar el dominio de una función a partir de su expresión analítica, sin disponer de la gráfica, simplemente razonando para qué valores de x es posible calcular $f(x)$.

Debemos tener la precaución de evitar:

- Dividir entre cero.
- Raíces pares de un número negativo.

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \Longrightarrow D(f) = \mathbf{R} - \{-2\}$$
$$g(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow D(g) = [0, +\infty)$$

1. Halla el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 7$ c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ e) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ d) $f(x) = \dfrac{x-3}{2}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$

2. Halla el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2+7}{x^3+4x^2-3x-18}$ b) $f(x) = \sqrt{4x^3 - 3x + 1}$

3. Halla el dominio de las siguientes funciones, teniendo en cuenta que las funciones trigonométricas toman valores x expresados en radianes:

   a) $f(x) = \dfrac{7}{\cos(x)}$ b) $f(x) = \dfrac{x-2}{\operatorname{sen}^2(x)}$ c) $f(x) = \tan(x)$ d) $f(x) = \ln(x)$

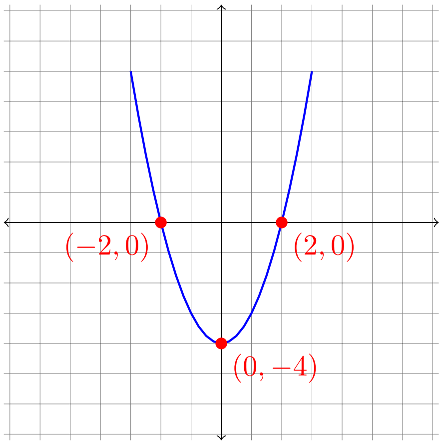
4. ¿Cuál es el recorrido de las siguientes funciones?

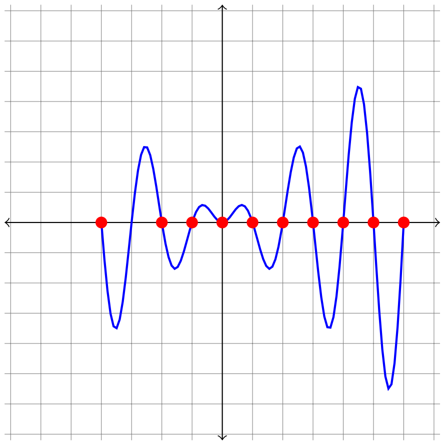
   a) $f(x) = 5x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(cc) BY-NC

Puntos de corte con los ejes

Para conocer y representar la gráfica de una función es conveniente conocer los puntos de corte con los ejes coordenados, es decir, aquellos puntos en los que la función pasa exactamente por cada uno de los ejes.





- Los **puntos de corte con el eje horizontal** tienen siempre la segunda coordenada nula y se obtienen resolviendo la ecuación $f(x)=0$.
- Como mucho puede haber un **punto de corte con el eje vertical**, y se obtiene dando valor númérico $x=0$.

5. Halla el dominio y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

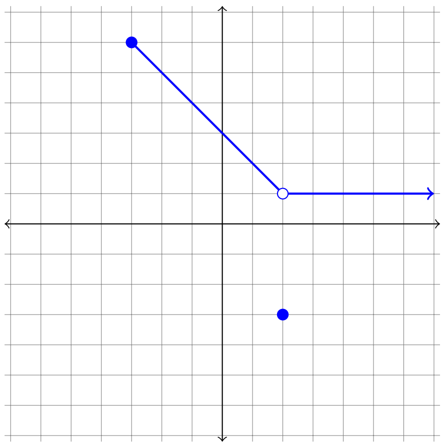
    a) $f(x)=4x^2-1$
    b) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$
    c) $f(x)=\sqrt{3x-1}$
    d) $f(x)=\dfrac{2x+5}{9x^2-12x+4}$
    e) $f(x)=\cos(x)$
    f) $f(x)=\ln(x)$

Continuidad

Una función es **continua** si su gráfica podría dibujarse sobre un papel sin levantar el lápiz en ningún momento. En caso contrario decimos que tiene una **discontinuidad** y la clasificamos en dos tipos diferentes:

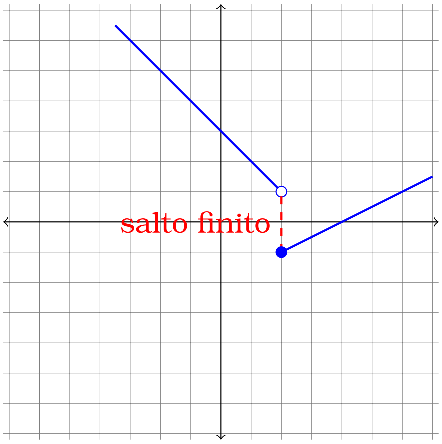
Discontinuidad evitable:
Hay un punto colocado en una posición que no es la adecuada para ser continua.

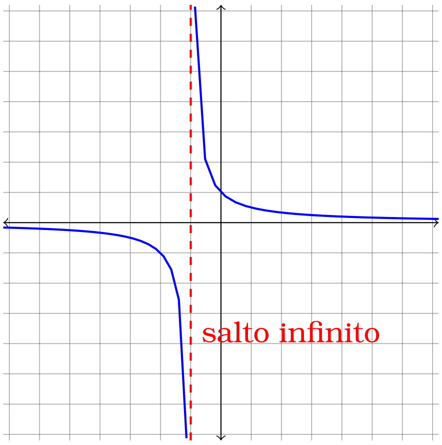
La llamamos evitable porque bastaría modificar ese punto para evitar la discontinuidad.



(cc) BY-NC

Discontinuidad de salto:
Hay un salto vertical (hacia arriba o hacia abajo, pero no hacia los lados) entre un trozo de línea y el siguiente.

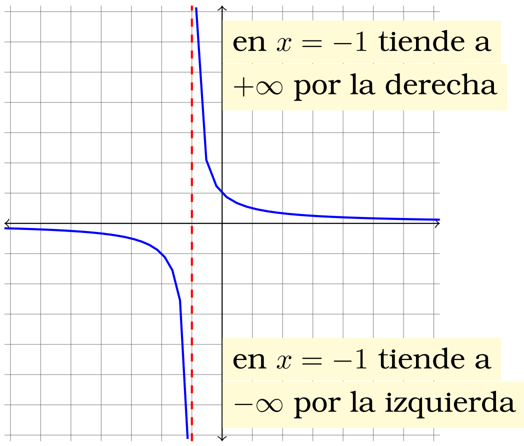




Con frecuencia las discontinuidades evitables y de salto finito se dan en **funciones definidas a trozos**, que veremos en el siguiente tema.
En cambio las discontinuidades de salto infinito suelen darse en los puntos que no pertenecen al dominio de la función.

Cuando nos encontramos con una discontinuidad de salto infinito, podemos indicar su forma diciendo que en ese punto **tiende por la izquierda** hacia $+\infty$ (o $-\infty$) y que **tiende por la derecha** hacia $+\infty$ (o $-\infty$).

Podemos observar qué tipo de tendencia hay dando valores numéricos a la función en las cercanías del punto.



6. Halla el dominio y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones. Observa su tendencia en los puntos en los que haya posibles discontinuidades de salto infinito.

a) $f(x) = x^2 - 9$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ c) $f(x) = \frac{3}{x^2-1}$ d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

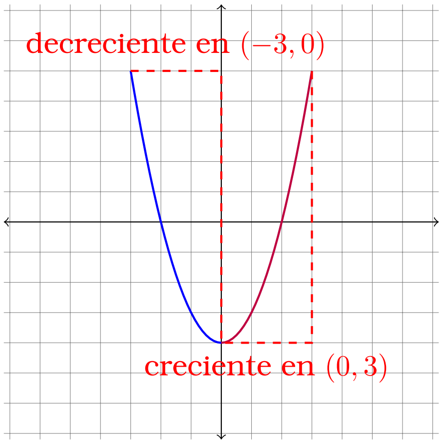
Monotonía

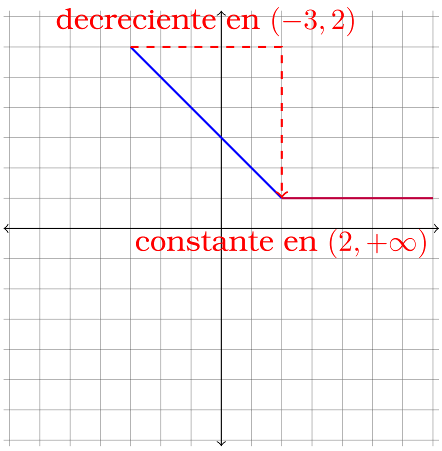
El estudio de la **monotonía** consiste en observar en qué intervalos la función es creciente, decreciente o constante.

- **Creciente:** al aumentar el valor de la variable independiente también aumenta el valor de la variable dependiente.
  En la gráfica, cuando nos movemos a la derecha también nos movemos hacia arriba.

CC BY-NC

- **Decreciente:** al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el valor de la variable dependiente.
  En la gráfica, cuando nos movemos a la derecha también nos movemos hacia abajo.
- **Constante:** la variable dependiente toma siempre el mismo valor.
  En la gráfica resulta un segmento horizontal.





7. Halla el dominio y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones. Observa su tendencia en los puntos oportunos y dibuja esquemáticamente su gráfica.

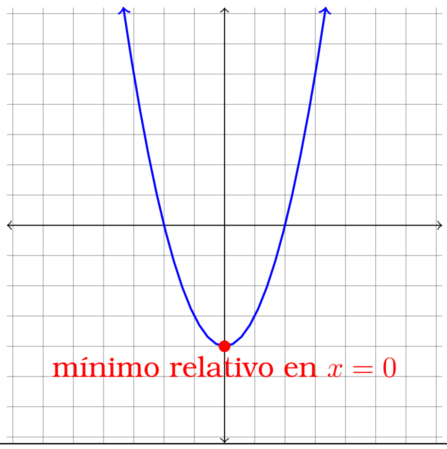
   a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ c) $f(x) = \dfrac{2}{4 - x^2}$

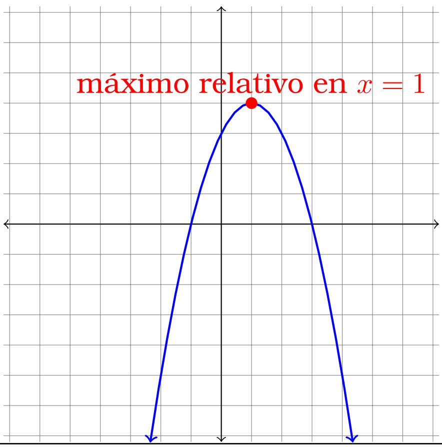
   Estudia su monotonía ayudándote de las gráficas que has dibujado.

Extremos

Los **extremos relativos** de una función son aquellos puntos en los que la gráfica muestra un punto más elevado o más bajo que aquellos a su alrededor.

- **Máximo:** A su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.
  Parece la cima de una colina.
- **Mínimo:** A su izquierda la función es decreciente y a su derecha creciente.
  Parece el punto más bajo de un valle.





(cc) BY-NC

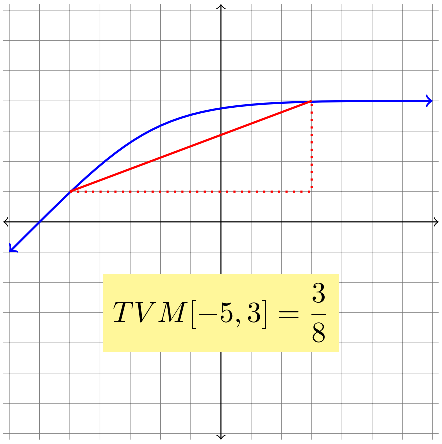
8. Halla el dominio y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones. Observa su tendencia en los puntos oportunos y dibuja esquemáticamente su gráfica.

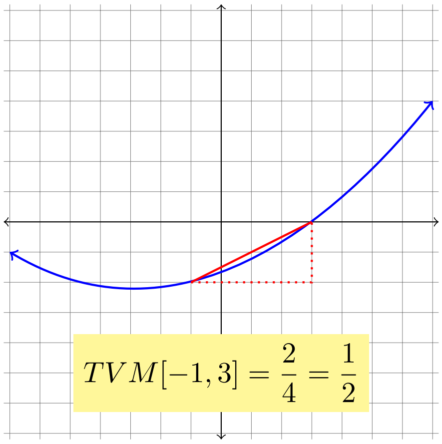
   a) $f(x) = 4x^2 + 4x - 3$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ c) $f(x) = \dfrac{5}{2x^2-18}$

   Estudia su monotonía y clasifica sus extremos ayudándote de las gráficas que has dibujado.

Tasa de variación media

La **tasa de variación media** de una función en un intervalo $[a, b]$ es la pendiente de la recta secante a su gráfica en $x = a$ y $x = b$, por lo que su valor nos puede dar alguna información sobre la monotonía de la gráfica.





$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

9. Calcula la tasa de variación media de $f(x) = x^2$ en los siguientes intervalos:

   a) $[0, 4]$ b) $[1, 2]$ c) $[-2, -1]$ d) $[-5, -4]$ e) $[-1, 2]$ f) $[-3, 3]$

10. Calcula la tasa de variación media de $f(x) = -2x^3$ en los siguientes intervalos:

   a) $[0, 4]$ b) $[1, 2]$ c) $[-2, -1]$ d) $[-5, -4]$ e) $[-1, 2]$ f) $[-3, 3]$

11. Calcula la tasa de variación media de $f(x) = \log(x)$ en los siguientes intervalos:

   a) $[1, 2]$ b) $[2, 3]$ c) $[3, 4]$ d) $[4, 5]$

(cc) BY-NC

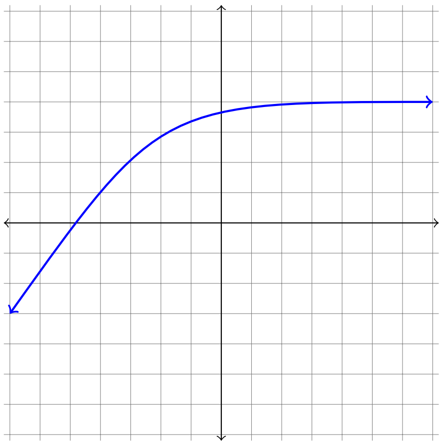
El próximo curso se profundizará en una generalización de la tasa de variación media para dos puntos cualesquiera muy muy próximos entre sí.

12. Calcula la tasa de variación media en $[x, x+h]$ para las funciones:

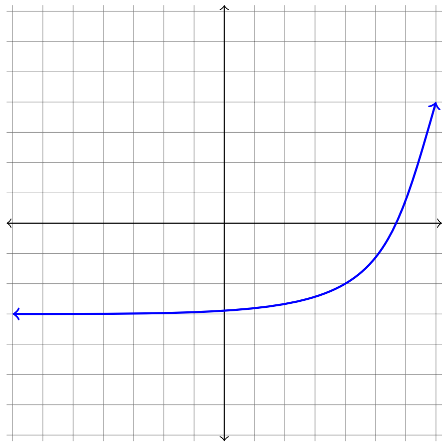
    a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Concavidad

Las dos siguientes gráficas corresponden a funciones crecientes en el intervalo $(-7, 7)$, pero el modo en el que crecen es diferente.



Concavidad hacia abajo.



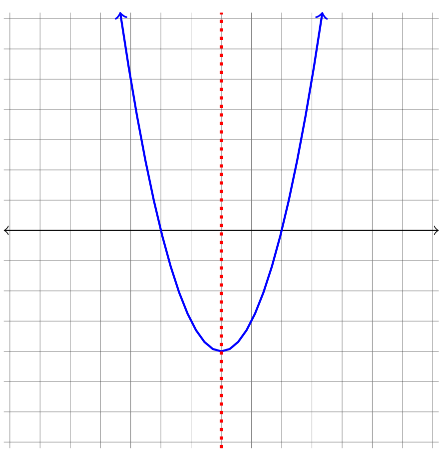
Concavidad hacia arriba.

13. Dibuja una gráfica esquemática y estudia la monotonía y concavidad de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{100} - x^2$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ d) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

Simetría

Decimos que una función presenta una **simetría** cuando una de sus mitades es el reflejo exacto de la otra, con respecto a una recta que hace las veces de espejo y que llamamos **eje de simetría**. En este curso estudiaremos dos tipos de simetrías:

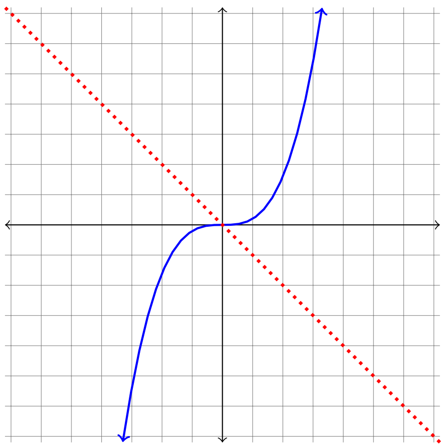


Una **función par** es aquella en la que el eje de simetría es el eje de coordenadas vertical $x = 0$, por lo que la gráfica a la izquierda de dicho eje es igual a la gráfica a la derecha.

$$f(-x) = f(x)$$

A este tipo de funciones se les llama también **simétricas con respecto al eje de ordenadas**.

(cc) BY-NC



Una **función impar** a aquella en la que el eje de simetría esla recta $y = -x$, por lo que la gráfica a la izquierda del eje vertical es justamente la opuesta a la gráfica a la derecha.

$$f(-x) = -f(x)$$

A este tipo de funciones se les llama también **simétricas con respecto al origen**.

14. Clasifica las siguientes funciones simétricas:

    a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = -7x^3$ c) $f(x) = 5x^4$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^5$

    ¿A qué crees que se debe el nombre de función par e impar?

15. Comprueba si las siguientes funciones son simétricas pares o impares:

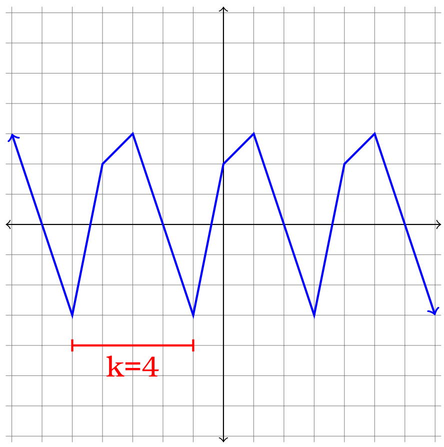
    a) $f(x) = x^5 - 3x^2$
    b) $f(x) = \frac{1}{x}$
    c) $f(x) = \cos(x)$
    d) $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$
    e) $f(x) = \frac{3}{x-1}$
    f) $f(x) = \log(x)$

Periodicidad

Una función es **periódica** cuando sus valores se repiten cada cierto intervalo.

$$f(x) = f(x+k)$$

La constante k corresponde al tamaño del intervalo que se repite y se llama **periodo**.



16. Representa en Geogebra las siguientes funciones. ¿Son periódicas?
    En caso afirmativo, ¿cuál es su periodo?

    a) $f(x) = x^2$
    b) $f(x) = \text{sen}(\pi \cdot x)$
    c) $f(x) = \cos(x)$
    d) $f(x) = E(x)$
    e) $f(x) = x - E(x)$
    f) $f(x) = \tan(x)$

    NOTA: La función $E(x)$ se llama parte entera y en Geogebra se denota *floor*(x).

(cc) BY-NC

Esta colección de características nos permite hacer un estudio bastante completo de una función a través de su gráfica, apoyándonos en la expresión algebraica cuando dispongamos de las herramientas para ello.

17. Representa en Geogebra las siguientes funciones. Estudia sus características, utilizando la gráfica o la expresión analítica según resulte conveniente:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = -3x^3$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d) $f(x) = x^4$

e) $f(x) = -3x^4$

f) $f(x) = \dfrac{x^3}{5} + 4$

g) $f(x) = |x|$

h) $f(x) = |2x - 3|$

i) $f(x) = |2x| - 3$

j) $f(x) = x^4 - 5x^2$

k) $f(x) = x^5 - 3x^3$

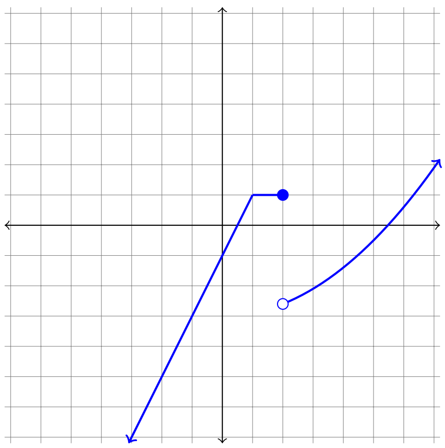
l) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

Funciones definidas a trozos

Existen funciones que se definen con distintas expresiones algebraicas para diferentes intervalos.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{x^2}{10} - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

f tiene tres trozos diferenciados:
uno para los valores de x en el intervalo $(-\infty, 1)$,
otro en $[1, 2]$ y el último en $(2, +\infty)$.



18. Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

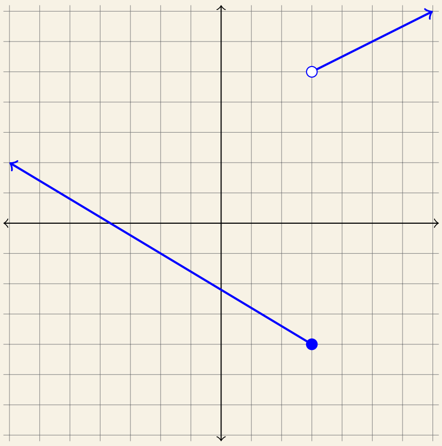
b) $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ 8 - 3x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

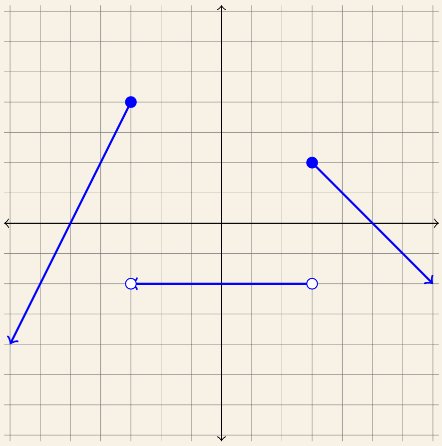
c) $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$

Haz un estudio de las funciones anteriores a partir de su gráfica.

(cc) BY-NC

19. Halla la expresión algebraica de las siguientes funciones:





(cc) BY-NC

FUNCIONES NOTABLES

En este tema veremos en profundidad las características de algunas funciones elementales especialmente relevantes.

Para ello nos ayudaremos de una representación gráfica aproximada que nos permita observar las características que no podamos obtener a partir de la expresión algebraica de la función.

Procedimiento

1. Halla el dominio.
2. Halla los puntos de corte con los ejes.
3. Comprueba si es par o impar.
4. Observa los valores cerca de las posibles discontinuidades de salto infinito.
5. Observa los valores cuando x crece o decrece indefinidamente.
6. Representa la gráfica de forma aproximada.

FUNCIONES POLINÓMICAS

En cursos anteriores ya has estudiado las funciones polinómicas de primer grado, cuya gráfica es una línea recta, y de segundo grado, que toman forma de parábola.

1. Haz un estudio completo de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 3x + 2$ b) $f(x) = 7 - 2x$ c) $f(x) = -3x^2$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4}$

2. ¿Cuándo puede ser una función polinómica de primer grado simétrica?
3. ¿Cuándo puede ser una función polinómica de segundo grado simétrica?

Las funciones polinómicas de otros grados tienen otras formas diferentes, por lo que en general es difícil generalizar una descripción común.

4. Haz un estudio completo de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = x^4$ c) $f(x) = x^3 - x^2$ d) $f(x) = x^4 - x^2$

(cc) BY-NC

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Llamamos **función de proporcionalidad inversa** a la función $f(x) = \frac{k}{x}$ siendo k un número real no nulo cualquiera.

5. Haz un estudio completo de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $f(x) = \frac{-1}{x}$ c) $f(x) = \frac{10}{x}$ d) $f(x) = \frac{-0'1}{x}$

FUNCIONES RACIONALES

Llamamos **función racional** a aquella que corresponde a un cociente de polinomios.
Por lo tanto las funciones de proporcionalidad inversa son un caso particular de funciones racionales.

6. Haz un estudio completo de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{2}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{5}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{-1}{x-2}$

7. Haz un estudio completo de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{3-x}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{2x}{x-2}$

8. ¿Qué conclusiones puedes obtener sobre las funciones racionales en las que su numerador y denominador son polinomios de primer grado?

9. Observa las diferencias con funciones racionales con polinomios de grado superior a 2.

   a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$

FUNCIONES EXPONENCIALES

Llamamos **función exponencial** a aquella dada por una potencia con base fija $a > 0$ y exponente variable.

10. Haz un estudio completo de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = 2^x$ c) $f(x) = 10^x$ e) $f(x) = e^x$

    b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ d) $f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ f) $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

11. ¿Qué conclusiones puedes obtener sobre las funciones exponenciales?

(cc) BY-NC

12. Observa las diferencias con estas otras funciones exponenciales:

a) $f(x) = 2^{x+1}$ b) $f(x) = 2^{x-3}$ c) $f(x) = 2^x + 1$ d) $f(x) = 2^x - 3$

Funciones logarítmicas

Llamamos **función logarítmica** a aquella del tipo $f(x) = \log_a(x)$ siendo $a > 0$.

13. Haz un estudio completo de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_2(x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ c) $f(x) = \log(x)$ d) $f(x) = \ln(x)$

14. ¿Qué conclusiones puedes obtener sobre las funciones exponenciales?

15. Observa las diferencias con estas otras funciones:

a) $f(x) = \log(x) + 3$
b) $f(x) = \log(x) - 2$
c) $f(x) = \log(x + 1)$
d) $f(x) = \log(x - 5)$

Funciones trigonométricas

Cuando definimos las funciones coseno, seno y tangente debemos tener en cuenta que x toma valores en radianes.

16. Haz un estudio completo de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos(x)$ b) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ c) $f(x) = \tan(x)$

(cc) BY-NC

Estadística

La estadística nos facilita herramientas para realizar suposiciones fundamentadas sobre un grupo grande de individuos observando solo unos pocos.

- Llamamos **población** al conjunto de *todos* los individuos sobre los que se realiza el estudio estadístico. Para conocer las características de la población completa es necesario realizar un **censo**.
- Llamamos **muestra** a un subconjunto de la población en el que se recogen los datos del estudio, a partir de los cuales se pretende deducir características de toda la población.

1. Indica cúal es la población y cuál la muestra:
   a) Se va a realizar un estudio estadístico para decidir si conviene construír un nuevo polideportivo en una ciudad de 426 873 habitantes. Como preguntar a todas las personas es muy costoso, solo se preguntará a 1 258 habitantes de diferentes barrios.
   b) En un gimnasio deciden preguntar a sus 200 socios sus propuestas para actividades.
   c) Para hacer un estudio sobre los gustos musicales de los alumnos de 12 años de una ciudad, se ha escogido a 125 niños de esa edad.
2. En un estudio sobre la duración de las bombillas que fabrica una empresa, ¿crees conveniente estudiar toda la población? ¿Por qué?

Tipos de variables

La variable estadística es la característica estudiada.

- Variable **cualitativa** es la que expresa una cualidad, que no se puede cuantificar.
- Variable **cuantitativa** es la que se expresa numéricamente.

3. Indica cuáles de las siguientes variables son cuantitativas y cuales son cualitativas:
   a) Comida favorita.
   b) Profesión que te gusta.
   c) Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada.
   d) Número de alumnos de tu instituto.
   e) El color de los ojos de tus compañeros de clase.
   f) Cociente intelectual de los miembros de tu familia.
4. Da tres ejemplos de variables cualitativas y tres de variables cuantitativas.

(cc) BY-NC

Las variables cuantitativas, a su vez, se pueden clasificar en dos tipos:

- **discreta** si solo puede tomar valores aislados.
  Por ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ...
- **continua** si puede tomar valores dentro de un intervalo.
  Por ejemplo: todos los números decimales entre 0 y 1.

Una variable continua no puede ser medida con exactitud pues el valor observado depende de la precisión de los instrumentos de medición.
Ese hecho no debe llevarnos a confundirla con una variable discreta.

5. Indica cuáles de las siguientes variables cuantitativas son discretas y cuales son continuas:

   a) Número de manzanas vendidas cada día en una frutería.

   b) Temperaturas registradas cada hora en un observatorio.

   c) Período de duración de un automóvil.

   d) El diámetro de las ruedas de varios coches.

   e) Número de hijos de 50 familias.

   f) Censo anual de los españoles.

6. Indica cuáles de las siguientes variables son cualitativas, cuáles son cuantitativas discretas y cuáles cuantitativas continuas.

   a) El número de hijos de una familia.

   b) Número de personas que llegan a un consultorio en una hora.

   c) El número de árboles que hay en un parque.

   d) El número de canales de televisión que tienes en casa.

   e) Cantidad de empleados que trabajan en una tienda.

   f) Número de libros vendidos cada mes en Amazon.

   g) Número de clientes que visitan un supermercado por día.

   h) El color favorito de cada persona.

   i) El peso de una persona.

   j) La velocidad a la que va a un tren.

   k) Longitud en centímetros de un tenedor.

   l) La cantidad de dedos que tienes en la mano.

   m) El número de faltas en un partido de fútbol.

   n) El volumen de cerveza en una jarra.

   ñ) La nacionalidad de los jugadores de un equipo.

   o) Peso de las vacas en una granja.

   p) Tiempo que esperas al amor de tu vida.

(cc) BY-NC

q) Distancia que recorren los autos en una ciudad.

r) Red social más utilizada por cada persona.

s) Número de animales en una granja.

t) El diámetro de una esfera.

u) La estatura de tu mejor amigo.

v) El ancho de una pelota de fútbol.

w) Volumen de agua en una piscina.

x) Tiempo que demora el repartidor de una pizzería en entregar un pedido.

y) Velocidad a la que viaja un avión.

z) Modelo de coche más vendido de un concesionario.

Tablas de frecuencias

En un estudio estadístico, tras recoger los datos se cuentan y se agrupan.
En una tabla de frecuencias se representan *ordenados* los valores que toma la variable estadística (x_i) con las distintas frecuencias asociadas:

- **frecuencia absoluta** (n_i): número de veces que aparece x_i en el recuento.
- **frecuencia relativa** (f_i): proporción de veces que aparece x_i en el recuento.
  Puede expresarse como fracción $\frac{n_i}{n}$, donde n es el total de datos, o bien como porcentaje.
- **frecuencia absoluta acumulada** (N_i): es la suma de las frecuencias absolutas de valores menores o iguales que x_i.
- **frecuencia relativa acumulada** (F_i): es la suma de las frecuencias relativas de valores menores o iguales que x_i.
  Puede expresarse como fracción o bien como porcentaje.

Preguntamos a una serie de personas de cuántos automóviles dispone su familia:

1 0 1 1 2 2 1 1 2 1 1 1 3 0 2 2 1 1 2 2

Y creamos una tabla de frecuencias:

recuento de casos

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	2	$\frac{2}{20} = 0'1 = 10\,\%$	2	$\frac{2}{20} = 10\,\%$
1	10	$\frac{10}{20} = 0'5 = 50\,\%$	$2+10=12$	$\frac{12}{20} = 60\,\%$
2	7	$\frac{7}{20} = 0'35 = 35\,\%$	$12+7=19$	$\frac{19}{20} = 95\,\%$
3	1	$\frac{1}{20} = 0'05 = 5\,\%$	$19+1=20$	$\frac{20}{20} = 100\,\%$
Total	20	$1 = 100\,\%$		

comprobamos los totales

vamos añadiendo valores de la columna n_i

(cc) BY-NC

7. Durante el mes de junio, en una ciudad se han registrado las siguientes temperaturas máximas. Elabora con ellas una tabla de frecuencias.

32	31	28	29	33	32	31	30	31	31
27	28	29	30	32	31	31	30	30	29
29	30	30	31	30	31	34	33	33	29

8. Se le pidió a un grupo de personas que indiquen su color favorito. Elabora con ellos una tabla de frecuencias.

negro	azul	amarillo	rojo	azul	azul	rojo	negro	amarillo	rojo
rojo	amarillo	amarillo	azul	rojo	negro	azul	rojo	negro	amarillo

9. Un dentista observa el número de caries en 100 niños y resume la información en la siguiente tabla. Complétala con los datos que faltan.

Nº caries	n_i	f_i
0	25	0.25
1	20	0.2
2		
3	15	0.15
4		0.05

10. En mi pueblo viven 1 100 familias. El 40 % de las familias tiene un solo hijo, el 35 % ninguno, el 11 % dos hijos y el resto más de dos.

    a) Calcula cuántas familias tienen ninguno, uno, dos o más hijos.

    b) Elabora una tabla de frecuencias con los datos obtenidos, y comprueba que los porcentajes coinciden con los del enunciado.

11. Hemos preguntado a un grupo de personas cuántas horas practicaban deporte a la semana. Elabora una tabla de frecuencias.

2	1	4	2	3	2	1	0	1	3
7	2	9	0	2	1	3	3	3	2
2	3	3	3	3	3	4	3	3	2

12. Realizamos un estudio para conocer el número de televisores que hay en cada vivienda en una determinada zona de la ciudad. Elabora una tabla de frecuencias.

1	1	2	2	2	2	0	0	4	3
2	3	4	3	4	1	1	1	2	0
3	4	2	2	4	4	2	1	4	1
1	1	2	2	2	2	1	1	1	2
2	1	1	3	3	1	1	2	2	1

(cc) BY-NC

Cuando trabajamos con variables cualitativas continuas solemos agrupar los valores en distintos intervalos, a los que llamaremos **clases**, y construir nuestra tabla de frecuencias de modo exactamente análogo.

La única diferencia que merece la pena notar es que al calcular parámetros podemos necesitar un valor numérico que represente al intervalo y para ello tomaremos la **marca de clase**, es decir, el valor central del intervalo.

Los alumnos de un centro, en rangos de edades.

clase	x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
$[12-14)$	13	148	$\frac{148}{350} \approx 42\,\%$	148	$42\,\%$
$[14-16)$	15	133	$\frac{135}{350} = 38\,\%$	281	$80\,\%$
$[16-18)$	17	62	$\frac{62}{350} \approx 18\,\%$	343	$98\,\%$
$[18-20)$	19	7	$\frac{7}{350} = 2\,\%$	350	$100\,\%$
Total		350	$1 = 100\,\%$		

13. Hemos preguntado a la salida de un supermercado cuanto se han gastado en la compra:

26'45	43'91	22'15	29'03	31'25	34'21	25'12	21'34	28'76	26'51

Agrupa los datos de 5 en 5 a partir de los 20 euros, y haz la tabla de frecuencias.

14. Se han medido los pesos de un grupo de recién nacidos, y los resultados en kilos han sido los siguientes:

3'2	3'1	2'8	2'9	3'3	3'2	3'1	3'0	3'1	3'1
3'7	3'8	2'9	3'0	3'2	3'1	3'1	3'0	3'0	3'4
3'9	3'0	3'5	3'6	3'8	3'3	3'4	3'3	3'3	3'7

Elabora una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos de 200 gramos.

15. Los datos que se dan a continuación corresponden a los pesos en kilos de ochenta personas:

60	66	77	70	66	68	57	70	66	52
75	65	69	71	58	66	67	74	61	63
69	80	59	66	70	67	78	75	64	71
81	62	64	69	68	72	83	56	65	74
67	54	65	65	69	61	67	73	57	62
67	68	63	67	71	68	76	61	62	63
76	61	67	67	64	72	64	73	79	58
67	71	68	59	69	70	66	62	63	66

a) Elabora una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos de 5 kg.

b) Calcula el porcentaje de personas de peso menor que 65 kg.

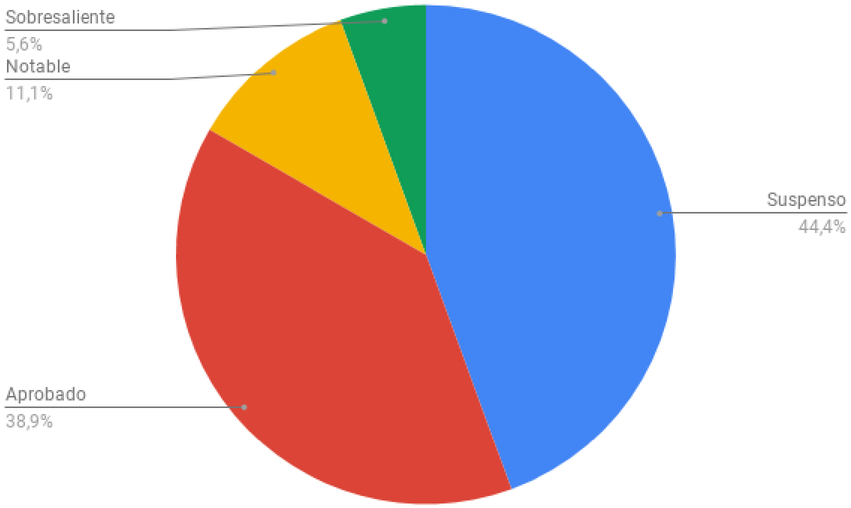
c) Calcula el porcentaje de personas de peso mayor o igual que 70 Kg pero menor que 85 kg.

(cc) BY-NC

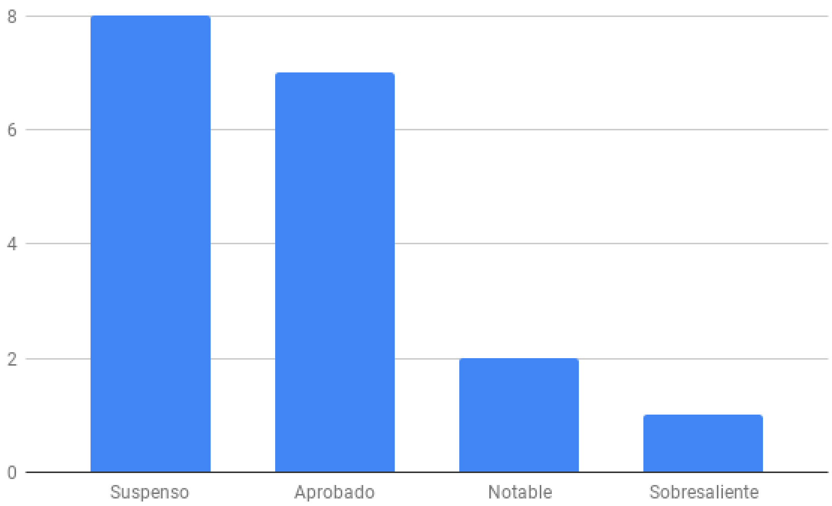
GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Para presentar de modo visual los datos estadístico podemos apoyarnos en distintos tipos de gráficos:

- Para representar variables cualitativas frecuentemente se utiliza un **gráficos de sectores circulares**, en el que a cada valor se le asigna un sector de tamaño proporcional a su frecuencia.

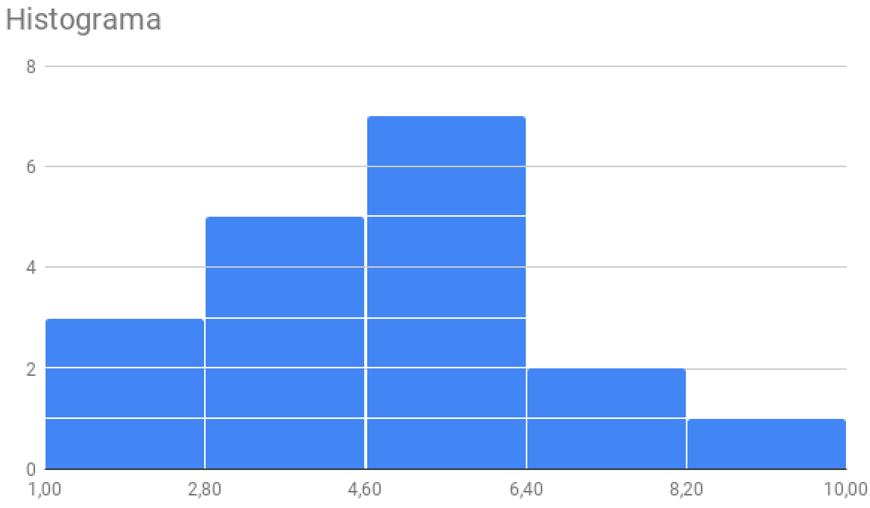


- Para representar variables cualitativas y cuantitativas discretas se puede utilizar un **diagrama de barras** en el que a cada valor se le asigna una barra de tamaño proporcional a su frecuencia.



(cc) BY-NC

- Para representar variables cuantitativas con datos agrupados se puede utilizar un **histograma**, similar a un diagrama de barras en el que la base de cada barra corresponde con todo un intervalo.



16. Crea gráficos estadísticos adecuados para las tablas de frecuencias de los ejercicios del apartado anterior.

Parámetros de posición

Los parámetros de posición nos permiten obtener información simplificada de una variable estadística.

Moda

La **moda** (M_o) es el valor más frecuente de la variable.
Ten en cuenta que algunas variables pueden tener más de una moda.

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

La moda de estos datos es $M = 5$, porque es el valor que más veces se repite.

17. Las alturas de los miembros de la familia son: 1'72, 1'85, 1'65, 1'65 y 1'58. Halla la moda.
18. Mis notas de clase son: 4, 4'5, 5, 4, 5'5, 4, 6, 4, 5 y 6'5. Halla la moda.
19. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la moda.

20. Halla la moda de las variables del apartado de tablas de frecuencias.

CC BY-NC

Media

La **media aritmética simple** ($\overline{x}$) es el resultado de sumar todos los valores posibles y dividirlo entre el número de datos.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

En total tenemos 10 datos, así que los sumamos todos y dividimos entre 10.

$$\overline{x} = \frac{4+4+3'5+5+4'5+3+5+6+3'5+5}{10} = 4'35$$

21. Las alturas de los miembros de la familia son: 1'72, 1'85, 1'65, 1'65 y 1'58. Calcula la media.
22. Mis notas de clase son: 4, 4'5, 5, 4, 5'5, 4, 6, 4, 5 y 6'5. Calcula la media.
23. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la media.

Si trabajamos a partir de una tabla de frecuencias, en lugar de sumar un valor n_i veces podemos multiplicar $x_i \cdot n_i$.

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + \cdots + x_m \cdot f_m}{n}$$

x_i	n_i	f_i
0	2	$\frac{2}{20} = 10\,\%$
1	10	$\frac{10}{20} = 50\,\%$
2	7	$\frac{7}{20} = 35\,\%$
3	1	$\frac{1}{20} = 5\,\%$
Total	20	$1 = 100\,\%$

$$\longrightarrow \overline{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1}{20} = 1'35$$

24. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	16	32	12	4	1

a) ¿Cuál es la moda? *b*) Calcula la media.

25. Calcula la media de las variables *cuantitativas* del apartado de tablas de frecuencias.

(cc) BY-NC

La **media ponderada** es otro tipo de media utilizado muy frecuentemente, en el que cada valor x_i se multiplica por su peso (es decir, la importancia que tiene respecto al total) y se divide entre la suma de los pesos.

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot p_1 + \cdots + x_n \cdot p_n}{p_1 + \cdots + p_n}$$

26. En una asignatura, la cualificación se calcula como el 80 % de la nota de exámenes, el 10 % la nota de las tareas de clase y casa y otro 10 % la actitud respecto al trabajo.

    a) Halla la cualificación de un alumno que obtuvo un 5 en los exámenes, pero tiene un 0 en las tareas y otro 0 en el trabajo.

    b) Halla la cualificación de otro alumno que obtuvo un 4 en los exámenes, pero tiene la nota máxima en tareas y trabajo.

Mediana

La **mediana** es el valor central de la variable, obtenida tras ordenar todos los valores de menor a mayor.

- Si los datos son impares es sencillo, pues al ordenarlos de menor a mayor es evidente cuál es el valor central.
- Si los datos son pares habrá dos valores centrales, así que hallamos la media aritmética simple de ambos.

4 4 3'5 5 4'5 3 5 6 3'5 5

Antes de nada, tenemos que ordenar los datos de menor a mayor.

3 3'5 3'5 4 4 4'5 5 5 5 6

Como en el centro hay dos números, les hacemos la media aritmética:

$$Me = \frac{4 + 4'5}{2} = 4'25$$

27. Las alturas de los miembros de la familia son: 1'72, 1'85, 1'65, 1'65 y 1'58. Calcula la mediana.
28. Mis notas de clase son: 4, 4'5, 5, 4, 5'5, 4, 6, 4, 5 y 6'5. Calcula la mediana.
29. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la mediana.

30. Calcula la mediana de las variables *cuantitativas* del apartado de tablas de frecuencias. Compáralo con la media y la moda.

(cc) BY-NC

Cuartiles

Si la mediana se obtiene dividiendo la lista de datos ordenados a la mitad, los **cuartiles** se obtienen dividiéndola en cuartos de forma análoga.

- Q_1 es el primer cuartil, hay un cuarto de valores menores que él.
- Q_2 es el segundo cuartil. Coincide con la mediana.
- Q_3 es el tercer cuartil, hay un cuarto de valores mayores que él.

3 3'5 3'5 4 **4 4'5** 5 5 5 6

Como en total hay 10 datos al partir a la mitad nos quedan 5 datos a la izquierda y 5 datos a la derecha, por eso $Q_2 = Me = 4'25$.

Al repartir esos 5 nuevamente en dos mitades, el valor central será Q_1 y Q_3 respectivamente.

3 3'5 **3'5** 4 4 | 4'5 5 **5** 5 6

$Q_1 = 3'5 \qquad Q_3 = 5$

31. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Halla los cuartiles.

32. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	16	32	12	4	1

Halla los cuartiles.

33. Calcula los cuartiles de las variables *cuantitativas* del apartado de tablas de frecuencias.

Parámetros de dispersión

Si los parámetros de posición nos dan una idea de dónde está el centro, los parámetros de posición nos indican si la mayoría de los datos están próximos a ese centro o repartidos a mayor distancia.

Rango

El **rango o recorrido** es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor.

El **rango intercuartículo** es la diferencia entre el tercer cuartil y el primero.

3 3'5 **3'5** 4 4 | 4'5 5 **5** 5 6

$R = 6 - 3 = 3 \qquad R_I = 5 - 3'5 = 1'5$

(cc) BY-NC

34. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Halla el rango y el rango intercuartílico.

35. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	16	32	12	4	1

a) Halla el rango.

b) Halla el rango intercuartílico.

36. Halla el rango y el rango intercuartílico de las variables *cuantitativas* del apartado de tablas de frecuencias.

VARIANZA

Llamamos **desviación respecto a la media** a la diferencia entre cada dato y la media, es decir, $x_i - \overline{x}$.

La **varianza** (s^2) es la media de los cuadrados de las desviaciones.

$$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

Si desarrollamos los cuadrados y reorganizamos los sumandos del numerador, podemos expresar la varianza de esta otra forma:

$$s^2 = \frac{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}{n} - (\overline{x})^2$$

Y, por supuesto, si trabajamos a partir de una tabla de frecuencias en lugar de sumar un valor n_i veces podemos multiplicarlos por n_i.

x_i	n_i	f_i
0	2	$\frac{2}{20} = 10\,\%$
1	10	$\frac{10}{20} = 50\,\%$
2	7	$\frac{7}{20} = 35\,\%$
3	1	$\frac{1}{20} = 5\,\%$
Total	20	$1 = 100\,\%$

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1}{20} = 1'35$$

$$s^2 = \frac{0^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 10 + 2^2 \cdot 7 + 3^2 \cdot 1}{20} - 1'35^2$$

$$= 2'35 - 1'8225 = 0'5275$$

DESVIACIÓN TÍPICA

La **desviación típica** (s) es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$s = +\sqrt{s^2}$$

CC BY-NC

37. En un examen 3 personas obtuvieron 5 de nota, 5 personas obtuvieron 4 de nota, y 2 personas obtuvieron 3 de nota. Calcula la varianza y la desviación típica.

38. Se le pregunta a varias parejas cuántos hijos tienen, y se organizan los datos en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	16	32	12	4	1

Calcula la varianza y la desviación típica.

39. Calcula la varianza y desviación típica de las variables *cuantitativas* del apartado de tablas de frecuencias.

Diagramas de cajas y bigotes

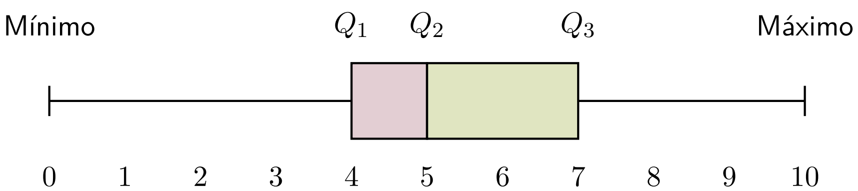
Los diagramas nos permiten describir varias características importantes al mismo tiempo de un modo visual, de forma análogo a los gráficos estadísticos que nos permiten «ver» los datos de un solo vistazo.

Los **diagramas de caja y bigotes** (también llamados *boxplots*) se centran en dos aspectos: la dispersión y la simetría.
Para su realización se representan la mediana, los cuartiles y el rango de los datos sobre un rectángulo, alineado horizontal o verticalmente.

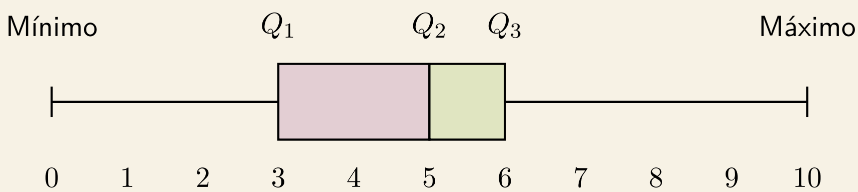
Un grupo de 20 alumnos ha conseguido las siguientes cualificaciones en una prueba:

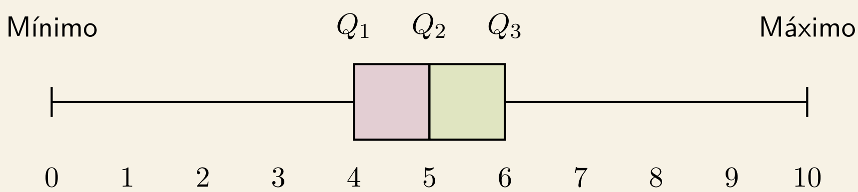
0	2'75	3	3'5	3'75	4'25	4'5	4'5	4'75	5
5	5'25	5'5	6'5	6'5	7'5	8	8	9	10

Que podemos representar gráficamente como:

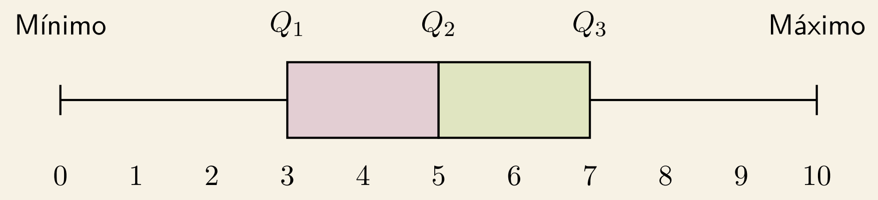


40. Los siguientes diagramas representan las notas en diferentes grupos. Interprétalos.





(cc) BY-NC



41. Elabora los diagramas de cajas y bigotes de las variables *cuantitativas discretas* del apartado de tablas de frecuencias.

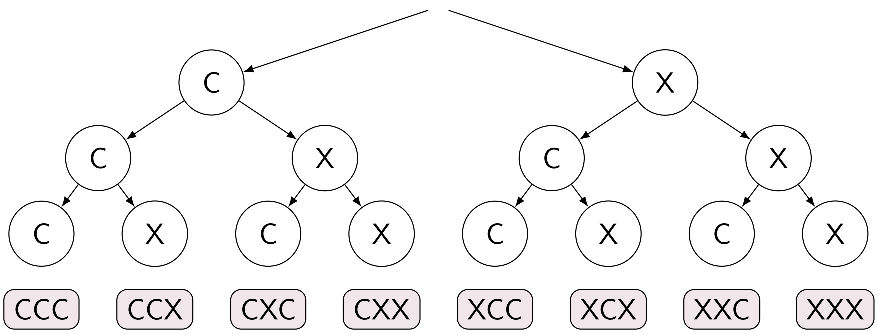
(cc) BY-NC

PROBABILIDAD

COMBINATORIA

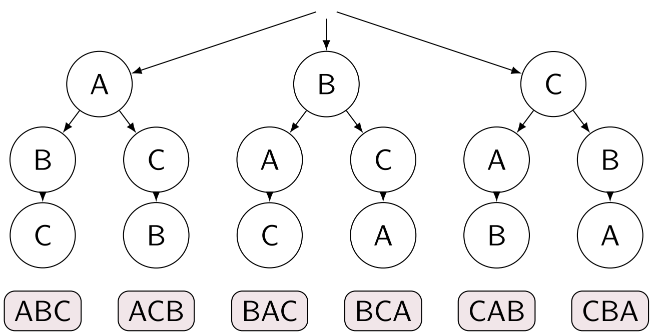
La **combinatoria** es una rama de la matemática que estudia las ordenaciones o agrupaciones de un determinado número de elementos.
Para ayudarnos a calcular la cantidad de ordenaciones o agrupaciones posibles, utilizaremos **diagramas de árbol** como apoyo.

Lanzamos una moneda 3 veces consecutivas y anotamos el resultado (cara o cruz) en el orden en el que aparecen. Escribiremos C para representar cara y X para representar cruz.



1. *a*) Lanzamos una moneda 4 veces consecutivas. ¿Cuántos son los resultados posibles?
   b) Lanzamos la moneda 7 veces consecutivas. ¿Cuántos son los resultados posibles?
2. Tenemos tiras de cinco colores distintos (rojo, blanco, azul, verde y negro) para elaborar diseños de banderas.
   a) Con dos franjas, ¿cuántas banderas diferentes pueden crearse?
   b) ¿Y con tres franjas? ¿Y con diez franjas?

Ángela, Bárbara y Carolina se disputan los primeros puestos de una carrera. Veamos en qué orden podrían llegar.



(cc) BY-NC

El **factorial de un número natural** n es el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

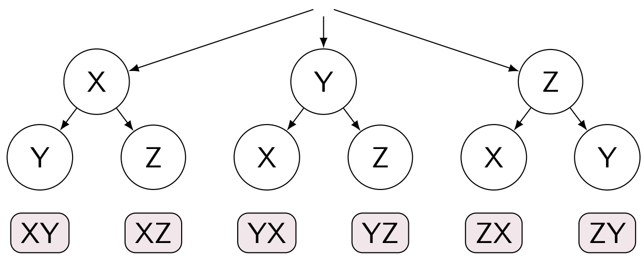
En la calculadora científica puede utilizarse la tecla $\boxed{x!}$.

El valor de $0!$ se define según el convenio de producto vacío.

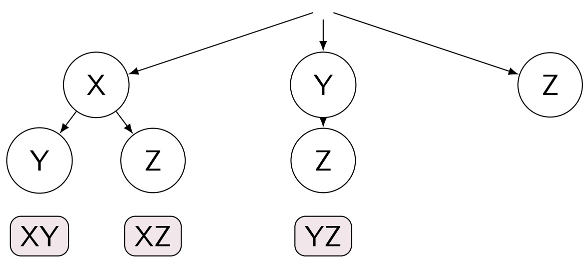
$$0! = 1$$

3. En la categoría junior de una competición participan 7 jóvenes deportistas. ¿De cuántas formas pueden ordenarse en la tabla de clasificación?
4. En una asignatura hay matriculadas trece personas. ¿De cuántas formas pueden ponerse en fila?
5. Tras mezclar las cartas de una baraja de 40 naipes, ¿de cuántas formas distintas podrían aparecer ordenadas?
6. ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar cinco personas en un banco de cuatro asientos?
7. ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar cinco personas en un banco de cinco asientos?

Veamos de cuántas formas diferentes se pueden sentar tres personas (X, Y, Z) en un banco de dos asientos.



Pero si solo nos interesa quienes se sientan pero no en que orden se sientan, observamos que en realidad varias de esas combinaciones aparecen repetidas.



BY-NC

Llamamos **número combinatorio** o **coeficiente binomial** de n sobre r a:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Para que tenga sentido definirlo de ese modo, es requisito imprescindible que ambos sean números naturales y que $n \geq r$.

En la calculadora científica puede utilizarse la tecla nCr .

8. ¿Cuántas combinaciones diferentes de 7 personas podríamos hacer en un banco de 3 asientos?
9. 5 personas juegan a las sillas musicales, así que hay colocadas 4 sillas. ¿Cuántas combinaciones posibles de personas sentadas hay?
10. Para aprobar un examen de cinco preguntas hay que contestar bien tres de ellas. ¿De cuántas formas diferentes se pueden elegir las tres preguntas?
11. Cinco personas desean cruzar un río en una barca en la que sólo pueden subir dos personas. ¿Cuántas formas diferentes tienen de cruzar el río?

En general, utilizando diagramas de árbol y ayudándonos con la calculadora podremos resolver multitud de problemas de combinatoria, pero debemos tener presente que no todas las situaciones se podrán plantear con las fórmulas vistas anteriormente.

Utiliza diagramas de árbol para hallar la solución:

12. ¿Cuántas elecciones distintas de delegado/a y subdelegado/a se pueden realizar en una clase de 25 personas?
13. *a*) ¿Cuántas maneras diferentes hay de formar un tren con cuatro coches de pasajeros y un coche cafetería?

    b) ¿Cuántas maneras diferentes hay de formar un tren con tres coches de pasajeros, un coche cafetería y un vagón de correos?
14. En una clase de 30 alumnos se elige a 5 al azar para realizar una tarea. ¿Cuántas elecciones distintas hay?
15. Con los dígitos $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

    a) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar?

    b) ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar?

    c) ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar?

    d) ¿Cuántos números de cinco cifras diferentes se pueden formar?

    e) ¿Cuántos de los números de cinco cifras diferentes son menores que $70\,000$?
16. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos $\{0, 2, 4, 6, 8\}$? ¿Y de cinco?
17. En el juego de la primitiva hay 49 bolas numeradas, de las que los jugadores escogen seis. ¿Entre cuántas posibles combinaciones escogen al jugar?

(cc) BY-NC

Álgebra de conjuntos

Experimentos aleatorios y deterministas

Un **experimento** consiste en analizar un fenómeno en determinadas circunstancias.

- Un **experimento determinista** es aquel en los que se puede llegar a predecir el resultado, pues está determinado por las condiciones iniciales.
- Un **experimento aleatorio** es aquel en el que incluso con las mismas condiciones iniciales los resultados pueden ser diversos.

A cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio se le llama **suceso elemental**.

El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los sucesos elementales.
Lo representaremos con la letra E o bien la letra griega Ω.

	E
Lanzamiento de un dado	$\{1,2,3,4,5,6\}$
Lanzamiento de dos monedas	{XX, XC, CX, CC}

Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral, es decir, un conjunto formado por sucesos elementales. Un suceso puede estar formado por un solo suceso elemental, o por varios. Incluso todos, o ninguno.

Tipos de sucesos

- **Suceso elemental** es el formado por un único elemento del espacio muestral.
- **Suceso compuesto** es el formado por varios elementos del espacio muestral.
- **Suceso imposible** es el que nunca se verifica, pues no incluye ningún valor del espacio muestral. Se denota por el símbolo $\varnothing$.

18. Tenemos dado ordinario con sus caras numeradas. Nuestro experimento consiste en lanzarlo una vez, obteniendo el espacio muestral $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

    a) ¿Cuántos sucesos elementales tiene? ¿Cuáles son?

    b) ¿Cuántos sucesos compuestos de 2 elementos tiene?

    c) ¿Cuántos sucesos compuestos de 3 elementos tiene?

    d) ¿Cuántos sucesos compuestos de 4 elementos tiene?

    e) ¿Cuántos sucesos compuestos de 5 elementos tiene?

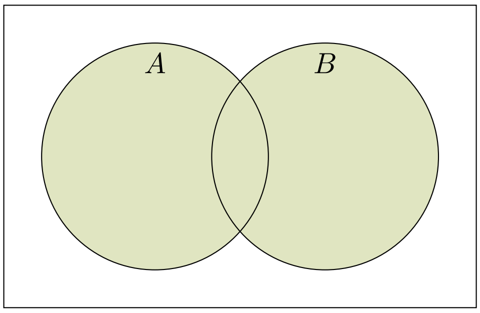
    f) Entonces, ¿cuántos sucesos son posibles?

(cc) BY-NC

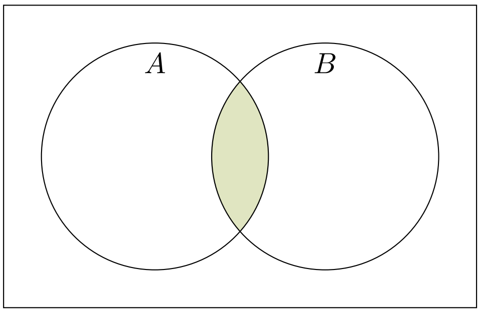
Operaciones con sucesos

Teniendo en cuenta que los sucesos son conjuntos, podemos realizar con ellos todas las operaciones que se definen para conjuntos:

El suceso **unión** ($A \cup B$) está formado por todos los elementos de A y todos los elementos de B. Es decir, son los elementos que pertenecen a A **o** pertenecen a B.



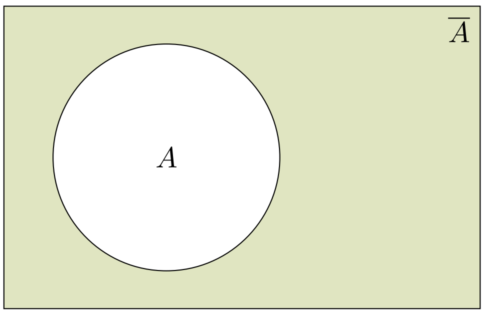
El suceso **intersección** ($A \cap B$) está formado por los elementos comunes de A y B. Es decir, son los elementos que pertenecen a A **y** pertenecen a B.



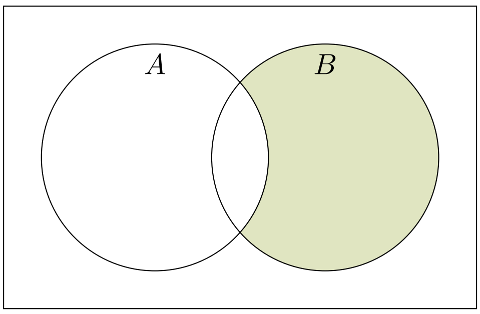
19. El espacio muestral del lanzamiento de dos monedas es $\Omega = \{XX, XC, CX, CC\}$.
    a) Indica cuáles son los elementos de los sucesos $A =$«obtener alguna cara», $B =$«obtener alguna cruz».
    b) Indica cuáles son los elementos de $A \cup B$ y los de $A \cap B$.

20. El espacio muestral del lanzamiento de un dado es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
    a) Indica los elementos de los sucesos $A =$«obtener impar», $B =$«obtener menor que 5», $C =$«obtener mayor que 2».
    b) Indica los elementos de $A \cap B$, $A \cap B$ y $B \cap C$.
    c) Indica los elementos de $A \cup B$, $A \cup B$ y $B \cup C$.

El suceso **complementario** ($\overline{A}$) está formado por los elementos que no están en A.



El suceso **diferencia** ($B - A$) está formado por aquellos elementos de B que no están en A. Coincide con $B \cap \overline{A}$.



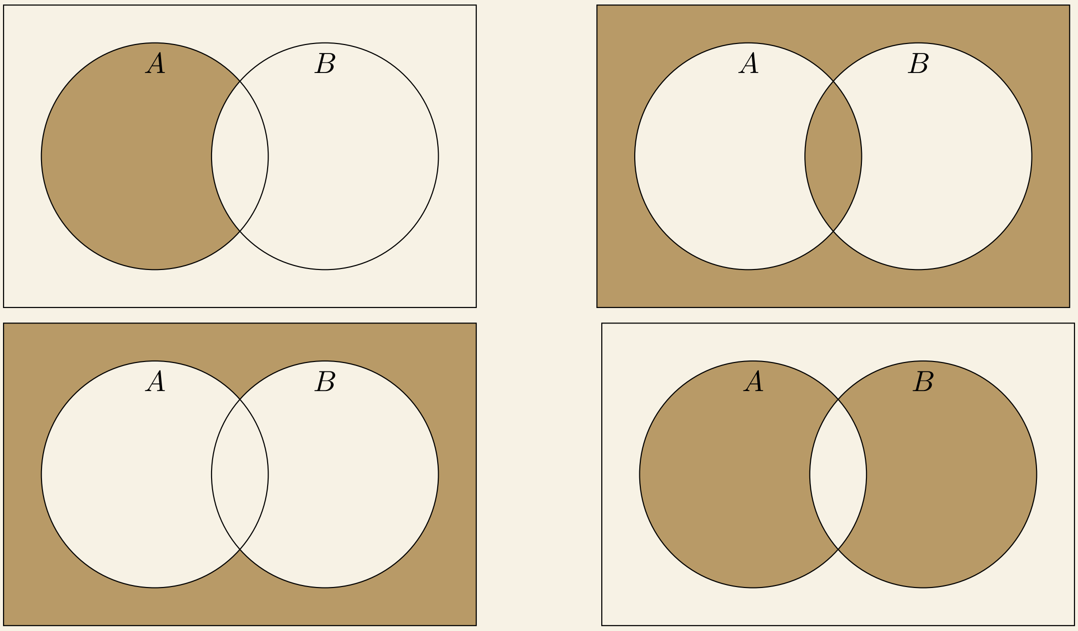
21. *a*) ¿Cuál es el espacio muestral del lanzamiento de tres monedas?
    b) Indica cuáles son los elementos de los sucesos $A =$«obtener alguna cara», $B =$«obtener alguna cruz», $C =$«obtener dos caras», $D =$«obtener una cruz».

(cc) BY-NC

c) Describe (con palabras o elementos) los sucesos:

a) $\overline{A}$
b) $\overline{B}$
c) $\overline{C}$
d) $\overline{D}$
e) $A - B$
f) $B - A$
g) $A - C$
h) $B - C$
i) $D - A$
j) $D - B$

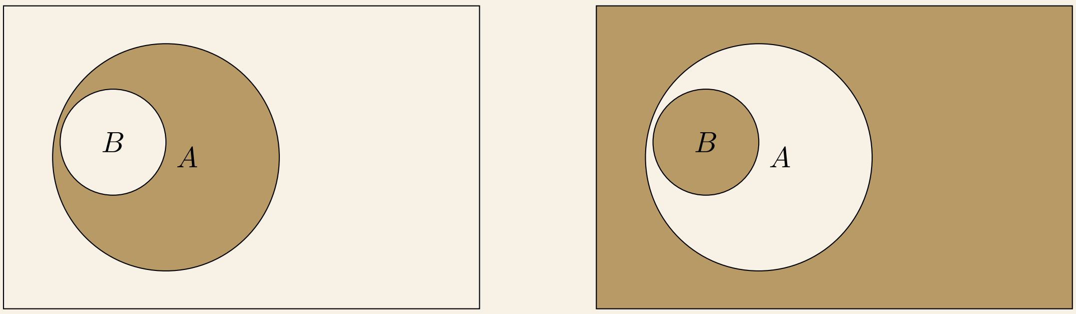
22. Identifica los siguientes sucesos:



23. El espacio muestral $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ contiene los sucesos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, e\}$. Halla:

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $\overline{A \cup B}$
d) $\overline{A \cap B}$
e) $\overline{A} \cup \overline{B}$
f) $\overline{A} \cap \overline{B}$

24. Identifica los siguientes sucesos:

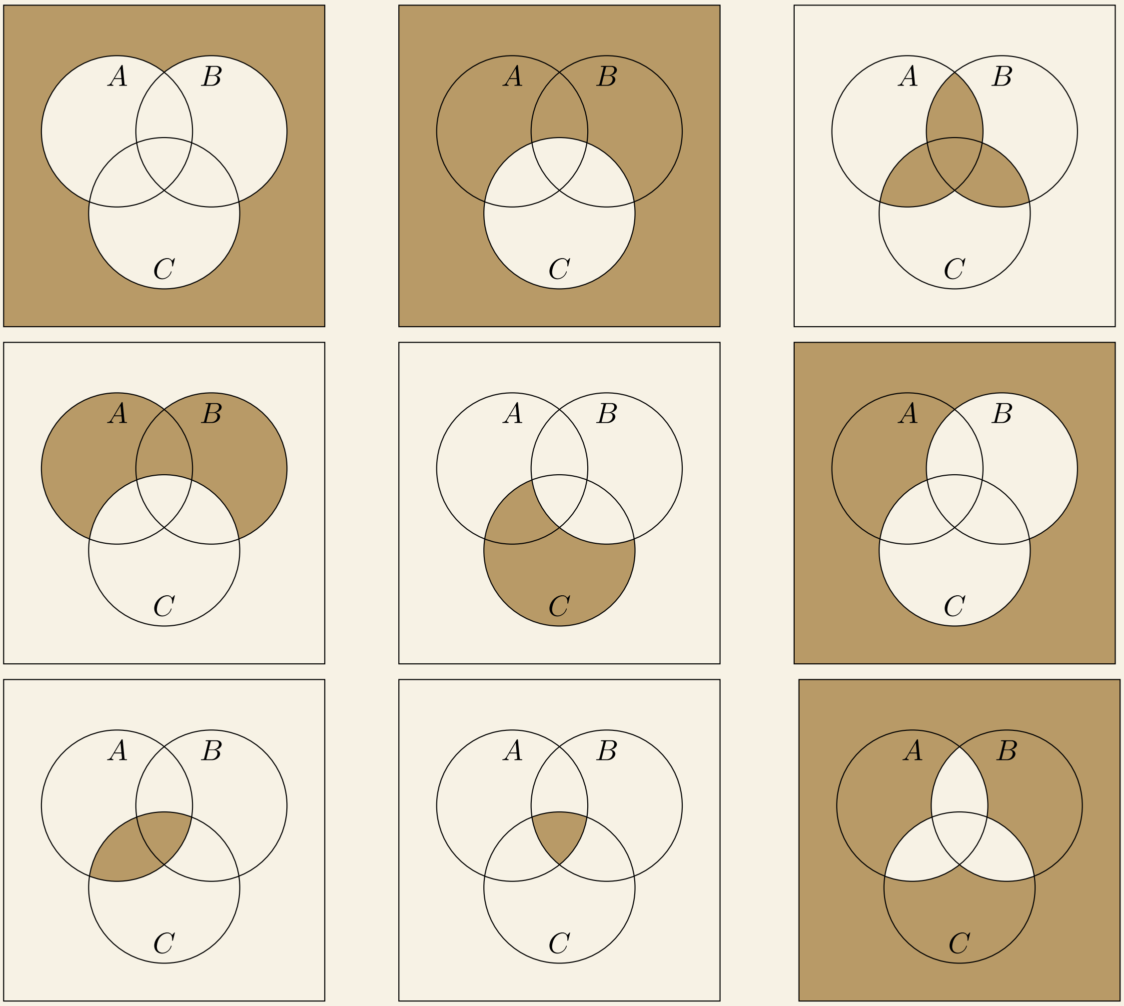


25. Al espacio muestral Ω = «letras del abecedario» pertenecen los sucesos A =«vocales», $B = \{m, a, t, e, s\}$ y $C = \{r, u, i, d, o\}$. Describe los siguientes sucesos:

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $\overline{A \cup B}$
d) $\overline{A \cap B}$
e) $\overline{A} \cup \overline{B}$
f) $\overline{A} \cap \overline{B}$
g) $A \cup C$
h) $A \cap C$
i) $B \cup C$
j) $\overline{B \cap C}$
k) $A \cap B \cap C$
l) $\overline{A} \cap (B \cup C)$

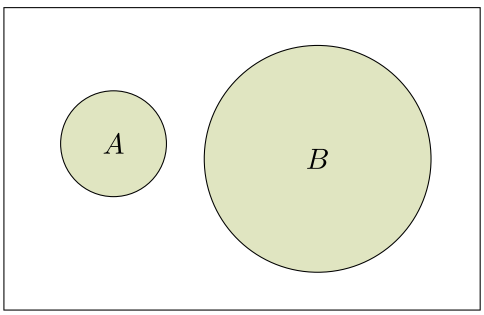
(cc) BY-NC

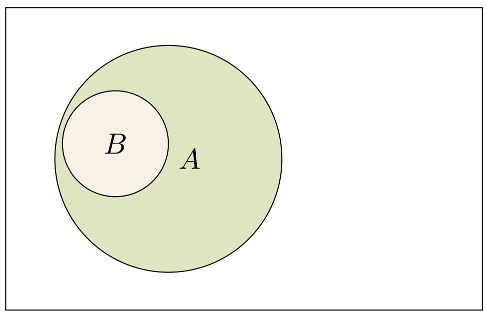
26. Identifica los siguientes conjuntos:



Decimos que dos sucesos son **incompatibles** cuando no tienen ningún elemento en común, es decir, $A \cap B = \varnothing$.

Por otro lado, decimos que un suceso está **contenido** ($A \subset B$) en otro si todos los elementos del primero pertenecen también al segundo.

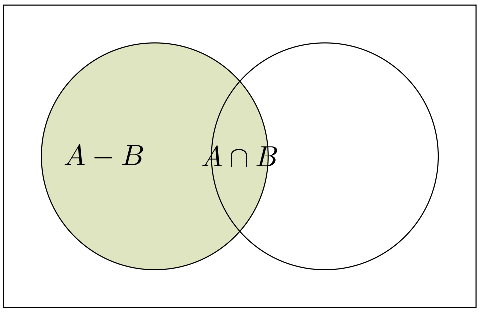




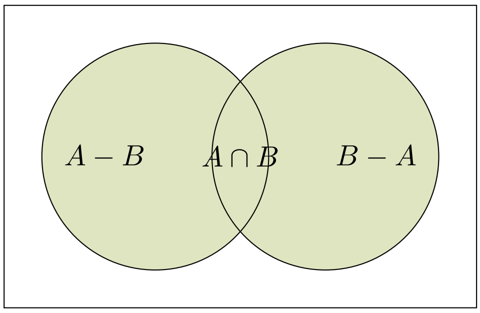
Observa que dos sucesos complementarios son siempre incompatibles ($A \cap \overline{A} = \varnothing$) pero el recíproco no es cierto en general.
Puede resultar interesante definir un conjunto en función de la unión de conjuntos incompatibles, pues el cálculo de probabilidades es más sencillo en ese caso.

BY-NC

- $A = (A - B) \cup (A \cap B)$



- $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$



27. En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se saca una bola y se considera los sucesos:

$A =$ «Sacar múltiplo de 3»
$B =$ «Sacar múltiplo de 5»
$C =$ «Sacar número par»
$D =$ «Sacar número mayor que 10»
$F =$ «Sacar número menor o igual que 10»
$G =$ «Sacar número que no sea múltiplo de 3»

a) Indica cuál es el suceso seguro.
b) Indica cuál es el suceso imposible.
c) Halla dos sucesos complementarios.
d) Halla dos sucesos incompatibles.

28. Tenemos una bolsa con 9 bolas, numeradas del 1 al 9, y realizamos el experimento que consiste en sacar una bola de la bolsa, anotar el número y devolverlo a la bolsa.
Consideremos los sucesos $A =$«salir un número primo» y $B =$«salir un cuadrado perfecto».

a) Halla los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.
b) ¿Son compatibles los sucesos A y B?
c) Halla $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

29. En familias de tres hijos, se estudia la distribución de sus sexos.
Por ejemplo (H, M, M) significa que el mayor es varón y las otras dos son mujeres.

a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?
b) Describe los sucesos $A =$ «la menor es mujer» y $B =$ «el mayor es hombre».
c) Halla $A \cap B$. ¿Son sucesos compatibles o incompatibles?

30. Realizamos un experimento que consiste en lanzar un dado y una moneda.

a) Describe el espacio muestral.
b) Describe los sucesos $A =$ «sacar menos de 3 en el dado» y $B =$ «sacar cruz en la moneda».
c) Halla $A \cap B$ y $A \cup B$.
d) Si además consideramos el suceso $C = \{1C, 2X, 3C, 4X, 5C, 6X\}$, describe $A \cap \overline{C}$ y $\overline{B} \cap C$.

31. Sean A, B y C tres sucesos de un mismo espacio muestral. Expresa en función de ellos los siguientes sucesos:

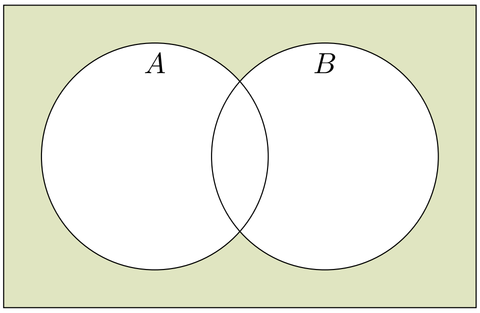
a) Se realiza alguno de los tres.
b) No se realiza ninguno de los tres.
c) Se realizan los tres.
d) Se realizan, por lo menos, dos de los tres.
e) Se realiza B pero no se realiza C.
f) Se realiza solo A.

(cc) BY-NC

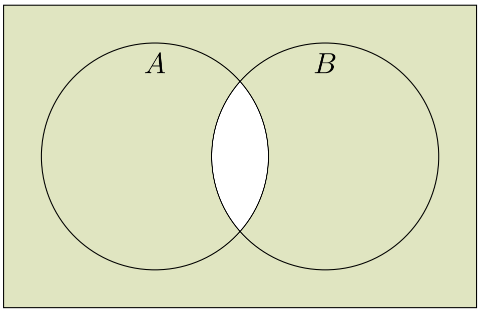
Leyes de Morgan

Las leyes de De Morgan son un par de reglas de transformación en lógica proposicional y álgebra de Boole que permiten expresar formalmente la relación entre la unión y la intersección de conjuntos bajo complementarios.

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



32. De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta. Si definimos los sucesos $A =$ «extraer un rey» y $B =$ «extraer una copa», describe los siguientes:

a) $A \cup B$	*c*) $A \cup \overline{B}$	*e*) $A - B$
b) $A \cap B$	*d*) $\overline{A} \cup \overline{B}$	*f*) $\overline{B} - \overline{A}$

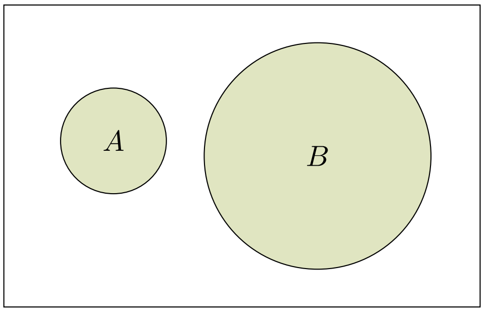
Cálculo de probabilidades

En la probabilidad clásica se define la **frecuencia relativa** de un suceso en un experimento realizado n veces:

$$f(A) = \frac{\text{nº casos favorables}}{n}$$

Para que además podamos construir un sistema probabilístico coherente, le exigimos que cumpla dos condiciones:

- La probabilidad total es un $100\,\%$, es decir, $P(E) = 1$.
- Si dos sucesos son incompatibles, conocer la probabilidad de cada uno de ellos nos permite calcular la probabilidad de la unión.
  $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



Por ello definimos la **probabilidad** de un experimento regular (es decir, en el que los sucesos elementales son equiprobables) del modo siguiente:

Regla de Laplace

$$P(A) = \frac{\text{nº sucesos } \textbf{elementales} \text{ contenidos en } A}{\text{nº sucesos elementales}}$$

CC BY-NC

33. ¿Cuál es la probabilidad al lanzar un dado de obtener un número impar?

34. Se lanza una moneda dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara una única vez?

35. En una baraja española de 40 cartas, estudia la probabilidad de que:

    a) salga un as
    b) salga oros
    c) salga el as de oros

36. En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se saca una bola y se considera los sucesos:

    $A =$ «Sacar múltiplo de 3»
    $B =$ «Sacar múltiplo de 5»
    $C =$ «Sacar número par»
    $D =$ «Sacar número mayor que 9»
    $E =$ «Sacar número menor o igual que 10»
    $F =$ «Sacar número que no sea múltiplo de 3»

    a) Calcula la probabilidad de los sucesos descritos.
    b) Calcula la probabilidad de $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap F$, $A \cap F$.

37. Calcula la probabilidad de tener un boleto ganador al jugar a la lotería.

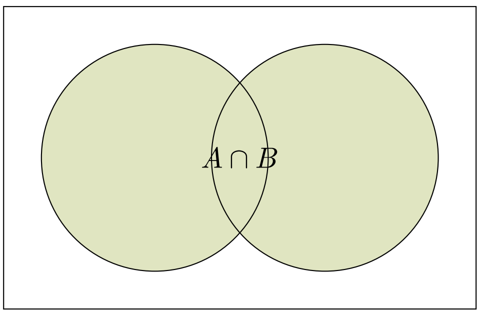
38. Calcula la probabilidad de tener una combinación ganadora al jugar a la primitiva.

Propiedades

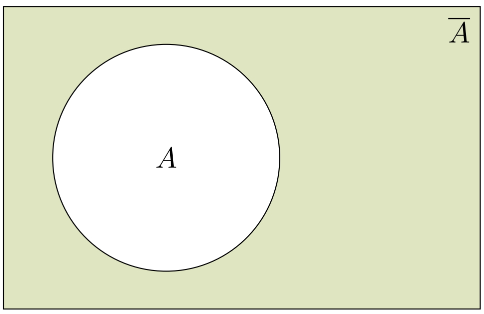
Es importante observar que la probabilidad de un suceso toma siempre valores entre 0 y 1.
Será 0 cuando se trate de un sucesos imposible y será 1 cuando se trate de un suceso seguro, y en general tomará cualquier otro valor intermedio.

Además es importante tener en cuenta estas otras dos propiedades de uso frecuente, que podemos razonar de forma sencilla a partir de un diagrama de conjuntos:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$



39. Sean A y B dos sucesos aleatorios con probabilidades $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calcula:

    a) $P(\overline{A})$
    b) $P(\overline{B})$
    c) $P(A - B)$
    d) $P(B - A)$
    e) $P(A \cup B)$

(cc) BY-NC

40. Sean A y B dos sucesos aleatorios incompatibles con probabilidades $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{5}$. Calcula:

a) $P(\overline{A})$ b) $P(\overline{B})$ c) $P(A - B)$ d) $P(B - A)$ e) $P(A \cup B)$

41. Sean A y B dos sucesos aleatorios con probabilidades $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$. Calcula:

a) $P(A \cap B)$ b) $P(A - B)$ c) $P(B - A)$ d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ e) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

42. Sean A y B dos sucesos aleatorios con probabilidades $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{5}$.
¿Son compatibles o incompatibles?

43. En un concesionario han observado las preferencias de los compradores respecto al color del coche. Un 25 % lo prefieren negro, un 10 % rojo, un 20 % azul y un 15 % gris.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador elija un coche negro o gris?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que elija un coche que no sea azul?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que elija un coche que no sea ni rojo ni azul?

44. Un 20 % del alumnado de una clase juega a balonmano, y el 40 % practica remo.
Si el 53 % de los alumnos practican alguno de los dos deportes, ¿cuál es el porcentaje que practica los dos deportes?

Probabilidad condicionada

Si se dispone de información adicional sobre un experimento, esta puede modificar la probabilidad de un suceso.

Consideremos el experimento consistente en extraer una carta de una baraja española de 40 cartas y los sucesos $A =$ «obtener figura» y $B =$ «obtener rey».

$$P(A) = \frac{12}{40} = 0'3 \qquad P(B) = \frac{4}{40} = 0'1$$

Pero si sabemos que la carta extraída es una figura (es decir, se verifica A) la probabilidad de que sea un rey pasa a ser:

$$P(B \text{ sabiendo que se cumple } A) = \frac{4}{12} = 0'\widehat{3} \neq 0'1$$

Llamaremos **probabilidad de B condicionada por A** a la probabilidad de que ocurra B sabiendo que ha ocurrido A.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

De ella se deduce inmediatamente la **regla del producto**:

(cc) BY-NC

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

45. El mismo profesor de matemáticas da clase, en tres grupos diferentes, a un total de 93 alumnos. En una evaluación los aprobados y suspensos de cada grupo fueron los siguientes:

	A	B	C
Aprobado	16	18	17
Suspenso	16	12	14

a) Halla la probabilidad de que un alumno escogido al azar sea del grupo A.

b) Halla la probabilidad de que un alumno escogido al azar sea del grupo A y haya aprobado.

c) Halla la probabilidad de que un alumno del grupo A haya aprobado.

46. Sean A y B dos sucesos aleatorios con probabilidades $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Emplea las propiedades de las probabilidad y calcula:

a) $P(B/A)$ *b*) $P(A/B)$ *c*) $P(\overline{B}/A)$ *d*) $P(B/\overline{A})$ *e*) $P(\overline{B}/\overline{A})$

47. En un instituto, el 80 % de alumnos de 2º de Bachillerato estudia Matemáticas, y el 60 % de los que estudian Matemáticas también estudia Física.
Si se elije al azar un estudiante de ese curso, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Matemáticas y Física?

48. Halla la probabilidad de que al extraer 3 cartas de una baraja española (de 40 cartas) todas sean de distinto palo.

49. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas y sin reintegrarla a la baraja se extrae otra. Calcula las probabilidades de:

a) Dos cartas de oros. *b*) Solo la segunda es de oros.

Decimos dos sucesos son **independientes** cuando la probabilidad de que ocurra uno no está influida por que haya ocurrido la otra, es decir, $P(A) = P(A/B)$ y $P(B) = P(A/B)$.

En ese caso, necesariamente se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

50. Halla la probabilidad de que al extraer tres cartas, con reemplazamiento, de una baraja española, sean todas espadas.

51. En una urna tenemos 4 bolas blancas, 3 bolas rojas y 3 bolas negras. Calcula la probabilidad de que en la primera extracción la bola sea blanca y en la segunda extracción la bola sea roja, en cada uno de estos casos:

a) Devolvemos la bola a la urna tras la primera extracción.

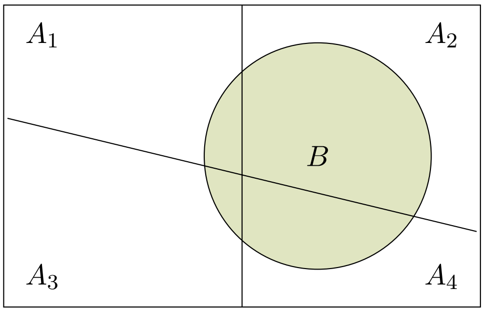
b) No devolvemos la bola a la urna tras la primera extracción.

(cc) BY-NC

Teorema de la probabilidad total

Si sabemos que los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles y su unión es todo el espacio muestral, podemos utilizarlos para particionar el espacio.

Entonces se puede calcular la probabilidad de cualquier otros suceso B como:



$$P(B) = P(B \cap A_1) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

Cuando conocemos la relación entre probabilidades de intersecciones y probabilidades condicionadas, podemos expresarlas del modo siguiente:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + \cdots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

52. Un gato persigue a un ratón. Este puede entrar en la puerta A, B o C, con probabilidades del 30 %, 50 % y 20 %. La probabilidad de que el gato cace al ratón si entra en la puerta A es del 40 %, en la B del 60 % y en la C del 10 %.
    Calcula la probabilidad de que el ratón sea cazada.

53. En una clase hay 22 alumnos y 18 alumnas. El número de chicos que aprobaron un examen es 14, y número de chicas que aprobaron es también 14.
    Si se escoge un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya suspendido?

54. En una fábrica de tornillos, una máquina fabrica el 40 % de los tornillos (de los que un 2 % son defectuosos), otra el 25 % (de los que el 5 % son defectuosos) y la última el resto (de los que el 3 % son defectuosos).
    a) Expresa esta información de forma esquemática o con una tabla de datos.
    b) Halla la probabilidad de que un tornillo sea defectuoso.

Teorema de Bayes

Resulta fundamental entender la diferencia entre las condiciones A/B y B/A, pues es frecuente cometer el error en el lenguaje no científico de confundir la una con la otra.

Supongamos de nuevo que los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son incompatibles y que su unión el todo el espacio muestral. Si deseamos conocer la probabilidad condicionada de uno de los sucesos A_k condicionada a otro suceso B, y conocemos la probabilidad de otro suceso B condicionada por cada uno de los sucesos de la partición, podemos relacionarlos.

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$$

Podemos desarrollar $P(B)$ según el teorema de las probabilidades totales:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + \cdots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

(cc) BY-NC

Y utilizando además la regla del producto en el numerador, obtenemos la siguiente expresión:

Teorema de Bayes

$$P(A_k/B) = \frac{P(B/A_k) \cdot P(A_k)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + \cdots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)}$$

55. En una zapatería hay tres estanterías. La primera tiene 50 pares de zapatos negros y 25 marrones, la segunda tiene 40 de cada color y la última 20 negros y 30 marrones.
   Si cogemos un par de zapatos marrones, calcula la probabilidad de que proceda de la segunda estantería.

56. Un fabricante de coches desea lanzar un modelo de coches el próximo año. Al estudiar la posible situación económica que habrá, contempla tres alternativas económicas que considera equiprobables: inflación, estabilidad o depresión. La probabilidad de que se lance al mercado el coche es del 70 % si hay inflación, 40 % si hay estabilidad y 10 % si hay depresión.

   a) Calcula la probabilidad de que el coche se lance al mercado.

   b) Si se lanza al mercado, determina la probabilidad de que exista inflación.

57. Disponemos de una prueba diagnóstica con una sensibilidad (proporción de pacientes enfermos que obtuvieron un resultado positivo) es del 85 % y cuya especificidad (proporción de pacientes sanos que obtuvieron un resultado negativo) es del 90 %.

   a) En la que la enfermedad es endémica y tiene una prevalencia de 12 %:

      (I) ¿Qué probabilidad tiene un paciente de obtener un falso positivo?

      (II) ¿Qué probabilidad tiene un paciente de obtener un falso negativo?

   b) En una zona en la que la enfermedad es rara y tiene una prevalencia de 0'1 %:

      (I) ¿Qué probabilidad tiene un paciente de obtener un falso positivo?

      (II) ¿Qué probabilidad tiene un paciente de obtener un falso negativo?

58. Disponemos de una prueba diagnóstica excelente, con una sensibilidad y una especificidad ambas de 95 %, para una enfermedad muy rara con una prevalencia de 0'02 %.

   a) ¿Qué probabilidad tiene un paciente de obtener un falso positivo?

   b) ¿Qué probabilidad tiene un paciente de obtener un falso negativo?

59. En la sala de pediatría de un hospital, el 60 % de los pacientes son niñas. El 35 % de los niños y el 20 % de las niñas son menores de 24 meses. La pediatra llama al primer paciente de la lista.

   a) Determina la probabilidad de que el paciente sea menor de 24 meses.

   b) Si tiene menos de 24 meses, ¿cuál es la probabilidad de que sea una niña?

(cc) BY-NC