Resumen Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

Matrices

- El producto se realiza multiplicando filas por columnas, por eso una matriz $m \times n$ se puede multiplicar por una matriz $n \times p$.
- El producto de matrices no es conmutativo: $AB \neq BA$
- Menor complementario M_{ij}: determinante obtenido al eliminar la fila i y la columna j
- Adjunto $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (y matriz adjunta la formada por los adjuntos)
- Matriz traspuesta A^t: se obtiene intercambiando filas por columnas
- Determinante $|A|$ de una matriz cuadrada A:
  - Regla de Sarrus (para matrices de orden 2 o 3):

$$\begin{array}{|ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

- $rang(A) =$ mayor orden del que podemos hallar menores no nulos
- Cálculo de la matriz inversa:
  - Método Gauss-Jordan: $(A|I) \longrightarrow (I|A^{-1})$
  - $A^{-1} = \dfrac{Adj(A^t)}{|A|}$
- Resolución de ecuaciones matriciales.

Sistemas de ecuaciones

- Clasificación según el número de soluciones.
- $AX = b \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b \Longrightarrow X = A^{-1}b$
  - Método de Gauss: $(A|b)$ y operar hasta obtener matriz triangular

Programación lineal

- Inecuaciones lineales con dos incógnitas: solución como semiplano.
- Esquema de resolución de problemas:
  - Identificar las dos variables.
  - Elaborar el conjunto de restricciones (inecuaciones).
  - Representar gráficamente la región factible del problema.
    - Representar la recta asociada a cada restricción.
    - Decidir el semiplano que corresponde a cada restricción.
    - La región factible como intersección de semiplanos.
  - Obtener los vértices de la región factible.
  - Identificar la función objetivo del problema.
  - Evaluar los vértices en la función objetivo.
  - Concluir cuál es el máximo/mínimo, y en qué valores se alcanza.

Límites

- Límite puntual, límites laterales, límites infinitos y límites en el infinito.
- Indeterminaciones:
  - Tipo $\frac{0}{0}$
    - En fracciones algebraicas simplificamos entre $x-a$
  - Tipo $\frac{\infty}{\infty}$
    - En fracciones algebraicas simplificamos entre x^n
    - En otras fracciones podemos multiplicar por el conjugado.
  - Tipo $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$:
    Operamos para convertir en una tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.
  - Tipo 1^∞, utilizando $e=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{F(x)}\right)^{F(x)}$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left[(1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{(f(x)-1)\cdot g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

- Asíntotas:
  - vertical en $x=a$: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$
  - horizontal en $y=b$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b\in\mathbb{R}$
  - oblicuas $y=mx+n$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=m\in\mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=n\in\mathbb{R}$
- f es continua en x_0 $\iff$ $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Derivación

- $f'(a) := \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Interpretación geométrica: $f'(a) = m$, siendo m la pendiente da recta tangente a f en la abscisa $x = a$.
- f derivable en $a \iff f$ continua en a y $f'(a^-) = f'(a^+)$
- Reglas básicas de derivación:
  - $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
  - $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
  - $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$
- Monotonía:
  - creciente en $x = a \iff f'(a) > 0$
  - decreciente en $x = a \iff f'(a) < 0$
- Concavidad:
  - cóncavo hacia arriba en $x = a \iff f''(a) > 0$
  - cóncavo hacia abajo en $x = a \iff f''(a) < 0$
- Puntos singulares:
  - Mínimo relativo en $x = a \iff f'(a) = 0, f''(a) > 0$
  - Máximo relativo en $x = a \iff f'(a) = 0, f''(a) < 0$
  - Punto de inflexión en $x = a \iff f''(a) = 0, f'''(a) \neq 0$
- Problemas de optimización: cálculo de máximos y mínimos.
- Representación gráfica de funciones:
  - Puntos de corte con los ejes.
  - Dominio y continuidad.
  - Asíntotas y ramas infinitas.
  - Monotonía y extremos relativos.
  - Curvatura y puntos de inflexión.

Integración

- Integral indefinida. Cálculo de primitivas inmediatas.
- Integral definida. Regla de Barrow:
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
- Área entre dos curvas: $A = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

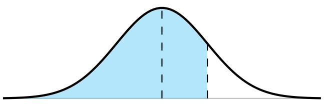
PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIONES

- Cálculo de probabilidades:
  - Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  - $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
  - Probabilidad condicionada: $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
  - A, B sucesos independientes $\iff$ $P(A/B) = P(A)$ $\iff$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
  - T.ª probabilidad total: $P(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$
  - T.ª de Bayes: $P(A_k/B) = \dfrac{P(B/A_k) \cdot P(A_k)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i)}$

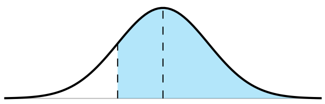
DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Distribución normal $N(\mu, \sigma)$:

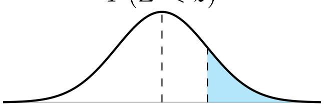
Tipificación $P(X < k) = P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} < \dfrac{k-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \dfrac{k-\mu}{\sigma}\right)$



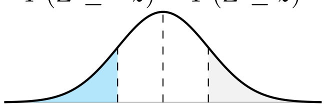
$P(Z < z)$



$P(Z \geq -z) = P(Z \leq z)$



$P(Z \geq z) = 1 - P(Z < z)$



$P(Z \leq -z) = P(Z \geq z) = 1 - P(Z < z)$

INFERENCIA ESTATÍSTICA

- Distribuciones muestrales.
  - Teorema central del límite.
  - Distribución muestral de medias.

$$X \sim N(\mu;\sigma) \qquad \Rightarrow \quad \overline{X} \sim N\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

  - Distribución muestral de proporciones.

$$p \quad \Rightarrow \quad \hat{P} \sim N\left(p;\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$$

- Estimación de parámetros.
  - Estimación puntual.

$\overline{x}$ estima μ $\qquad\qquad$ $\hat{p}$ estima p

  - Estimación mediante intervalos de confianza.

Media poblacional: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Proporción poblacional: $\left(\hat{p}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}};\hat{p}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right)$

    - Nivel de confianza: cálculo del valor crítico empleando la tablar normal en sentido inverso.
    - Relación entre confianza, error máximo admisible y tamaño mustral:

Media poblacional: $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Proporción poblacional: $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$

Nota:

Si conocemos un estimador puntual de p por una muestra previa, utilizamos dicho valor.

En caso contrario, se utiliza el caso de máxima indeterminación: $p = 1-p = 0'5$